UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

FACULTAD DE MATEMATICA ASTRONOMIA Y FISICA

SERIE "C"

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 16/95

Problemas de Matemática Básica

RECOPILACION DE MARIA J. DRUETTA

CIUDAD UNIVERSITARIA - 5000 CORDOBA
REPUBLICA ARGENTINA

EDITORES: Fernando Levstein

Carlos Olmos

Nº 16/95

Problemas de Matemática Básica

RECOPILACION DE MARIA J. DRUETTA

La presente publicación fue financiada por el CIEM con fondos del CONICET.

I N D I C E

Problemas de Matemática Básica

Recopilación de María J. Druetta

Este fascículo de problemas de Matemática Básica, surgió como una inquietud personal de publicar los exámenes correspondientes al Doctorado en Matemática que fueron tomados en la Facultad desde 1980. En un principio fueron recopilados por el Dr. Jorge Vargas y desde entonces, y con bastante persistencia, han sido recolectados a través de aproximadamente quince años para llegar a esta versión final. Los problemas han sido transcriptos de las versiones originales y no se han efectuado correcciones en los enunciados de los mismos.

Agradezco a la Comisión Editora de Publicaciones de Matemática su aporte y predisposición para llevar a cabo esta publicación, que esperamos sea de utilidad.

María J. Druetta

Octubre, 1995.

ALGEBRA

Diciembre, 1980

1. Sea p un primo, $p \neq 2$, $p \neq 3$. Probar que si G es un grupo de orden $3p^2$, entonces G es soluble.

2. Sea L el grupo $\mathbf{Z}^n$ de todas las n-tuplas de enteros. Sean $y_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in L, 1 \leq i \leq n$; y sea M el subgrupo de L generado por $\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$. Mostrar que el índice $[L : M] = |det(a_{ij})|$ si el determinante no es 0. ¿Qué se puede decir en el caso determinante 0?

3. Sea p un primo y a un entero no divisible por p. Mostrar que $x^p - x - a$ es irreducible sobre $\mathbf{Q}$.

4. Sea $p(x) = (x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

   Definir el grupo de Galois de un polinomio sobre un cuerpo cualquiera. Calcularlo en el caso de $p(\mathrm{x})$ sobre $\mathbf{Q}$ y expresarlo como grupo de transformaciones del conjunto de raíces de p.

Diciembre, 1981

A- Hacer 3 de 4.

1. Sea p un primo positivo y G un p-grupo finito. Entonces:

   (i) Si G es no trivial, entonces $Z(G)$ = centro de G también es no trivial.

   (ii) Si el órden de G es p^2 entonces G es abeliano. (muestre primero que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano).

   (iii) Determine las clases de isomorfismo de todos los grupos de órden p^2.

2. (i) Sea G un grupo abeliano y sea $I = \{x \in G : x = 0$ ó x tiene órden infinito$\}$. Si $I \neq \{0\}$ y subgrupo de G, entonces G es sin torsión.

(ii) Sea G un grupo tal que $\mathrm{Aut}(G)$ es trivial. Entonces G tiene órden 1 ó 2.

3. (i) El $\mathbf{Z}$-módulo $\mathbf{Q}$ no es finitamente generado. (Todo subgrupo de $\mathbf{Q}$ finitamente generado es cíclico).

   (ii) El $\mathbf{Z}$-módulo $\mathbf{Q}$ es sin torsión pero no es libre. (Si $H \subset \mathbf{Q}$ es un subgrupo libre entonces es cíclico).

4. Determine las clases de isomorfismos de grupos de órden 245.

B- Hacer 3 de 5.

1. Sea K un cuerpo finito y sea $G = SL(2, K)$.

   Determine el número de clases de conjugación de G.

2. Sean K, F cuerpos finitos con $K \subset F$. Pruebe que:

   (i) La extensión $F \supset K$ es de Galois.

   (ii) Calcule el grupo de Galois $G(F/\mathbf{Z}_p)$.

   (iii) Deduzca que $G(F/K)$ es cíclico.

3. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 6 \in \mathbf{Z}[x]$. Entonces:

   (i) Muestre que f es irreducible en $\mathbf{Z}[x]$.

   (ii) Calcule el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de f.

4. Sea R es un dominio Gaussiano (de factorización única).

   Sean $f, g \in R[x]$ polinomios primitivos. Pruebe que $h = fg$ es primitivo.

5. En un anillo noetheriano R, todo ideal contiene un producto de ideales primos.

Julio, 1982

Hacer 2 (dos) problemas de cada parte (Total: 6 problemas)

PARTE I

1. Sea G un grupo que tiene un endomorfismo α distinto de la aplicación identidad y no trivial tal que $\alpha^2 = \alpha$.

   Muestre que G contiene un subgrupo *normal* no trivial N y un subgrupo H no trivial tal que $N \cap H = \{e\}$ y $G = NH$.

2. Sea G un grupo de orden 30. Entonces, demuestre que:

   a) G no es simple.

   b) Más aún, G es resoluble.

3. Probar que un grupo abeliano de torsión es suma directa interna de p-grupos.

PARTE II

1. Sea A un anillo con identidad 1. Probar que si A no tiene ideales a izquierda no triviales (o a derecha), entonces A es un anillo de división.

   Sin embargo, el resultado no es cierto si A es un anillo sin ideales biláteros. Indicar un ejemplo.

2. Muestre que si un cuerpo finito de p^m elementos es un subcuerpo de un cuerpo de p^n elementos, entonces m divide a n. (Recuerde que el grupo multiplicativo de los elementos $\neq 0$ de un cuerpo finito es cíclico).

3. Enunciar y probar el "teorema de la base" de Hilbert para anillos noetherianos.

4. En cada uno de los casos siguientes dar un ejemplo que muestre que una matriz cuadrada A, B ó C existe y satisface a la condición indicada o si no dar una prueba que tal matriz no existe:

a) A es una matriz real 5×5 no-singular antisimétrica.

b) B es una matriz cuadrada real con polinomio característico $(x-2)^5$ y polinomio mínimo $(x-2)^3$.

c) C es una matriz 2×2 real tal que $C^6 = I$ pero ninguna potencia menor que C^6 es la identidad.

PARTE III

1. Sea F un cuerpo de característica $\neq 2$ que *no* admita extensiones de grado impar. Probar que toda extensión de Galois finita de F se obtiene por sucesivas extensiones cuadráticas. Precisamente:

   Si K/F es una extensión normal, separable, finita, entonces

   $K = F(\sqrt{a_n}, \ldots, \sqrt{a_1})$ con $a_i \in F(\sqrt{a_n}, \ldots \sqrt{a_{i+1}})$ para $i = n-1, \ldots 1$.

2. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbf{Q}[x]$ y sea K un cuerpo de descomposición sobre $\mathbf{Q}$.

   Pruebe que el grupo de Galois de $K/\mathbf{Q}$ es un grupo cíclico de orden 3.

3. Sea F un cuerpo, $\overline{F}$ una clausura algebraica y $\alpha \in \overline{F}$ pero $\alpha \notin F$.

   a) Muestre que existe un subcuerpo E de $\overline{F}$ maximal en la clase de todos los subcuerpos de $\overline{F}$ que contienen a F pero no a α

   b) Muestre que cualquier extensión de Galois finita de E tiene grupo de Galois cíclico.

   (Nota: Elija un elemento en el grupo de Galois que no fije a α).

Marzo, 1984

1. Determinar todos los grupos simples de orden ≤ 30.

2. Sea M un módulo noetheriano y sea $f : M \to M$ un endomorfismo. Pruebe que si f es suryectiva entonces f es biyectiva.

3. Sea F un cuerpo de característica $p > 0$ y sean x_1, x_2 algebraicamente independientes sobre F. Muestre que $[F(x_1, x_2); F(x_1^p, x_2^p)] = p^2$. Muestre además que existen infinitos cuerpos E tal que $F(x_1, x_2) \supset E \supset F(x_1^p, x_2^p)$.

4. Pruebe que si R es DIP (dominio a ideales principales) entonces R es DFU (dominio de factorización única). ¿Vale la recíproca?

5. Sea $C[0,1] = \{f : [0,1] \to R \ / \ f$ continua $\}$ el anillo de funciones continuas en $[0,1]$

   i) Si A es un subconjunto de $[0,1]$, $M_A = \{f \in C[0,1]) : f|_A = 0\}$ es un ideal en $C[0,1]$. Pruebe que si A $= \{p\}$, $M_{\{p\}}$ es maximal y si A $= U_p$, U_p entorno de p, M_{U_p} no es primo.

   ii) Decimos que un ideal I de $C[0,1]$ es fijo si $\cap_{f\in I} Z(f) \neq \emptyset$ donde $Z(f) = \{x \in [0,1]/f(x) = 0\}$. Pruebe que todo ideal propio de $C[0,1]$ es fijo.

   iii) Pruebe que $C[0,1]$ no es noetheriano.

Marzo, 1985

1. Sea G un grupo finito $H_1 \neq H_2$ dos subgrupos de índice 2. Probar que G contiene un tercer subgrupo de índice 2.

2. Calcular el orden de $GL(n, F_q)$

   $GL(n, F_q) = \{$matrices $n \times n$ inversibles con coeficientes en el cuerpo F_q de q elementos $\}$

   ($q = p^m$, p primo)

3. Sea G un grupo finito actuando en un subconjunto convexo K de $\mathbf{R}^n$.

La acción satisface: $g(\alpha x + \beta y) = \alpha(g.x) + \beta(g.y) \quad \forall g \in G,\ \alpha, \beta \in R,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ \alpha + \beta = 1,\ x, y \in K$

Pruebe que existe un punto de K fijo por dicha acción, es decir: existe $x \in K$ / $g.x = x\ \forall g \in G$.

4. Sea A un dominio de integridad. Pruebe que $A[x]$ es un dominio a ideales principales si y sólo si A es cuerpo.

5. Sea A un dominio a ideales principales. Defina cuando un elemento es irreducible y pruebe que todo elemento no nulo de A admite una descomposición en irreducibles.

6. Decidir si los siguientes polinomios son irreducibles sobre $\mathbf{Q}$ y calcular su discriminante:

$x^3 - x - 1;\ x^3 - 2$

Agosto, 1985

1. Verdadero o falso. Justifique

   a) $\mathbf{Z_6}$ tiene dos generadores.

   b) Si todo subgrupo propio de un grupo G es cíclico entonces G es cíclico.

   c) El grupo de automorfismos de $\mathbf{Z_4}$ es $\mathbf{Z_2}$

   d) Para todo subgrupo H de $S_n (n \leq 2)$ todos los elementos o exactamente la mitad de ellos son pares.

   e) Existen dos subgrupos de orden 3 de S_3.

f) No existen grupos simples de orden 15^2.

2. ¿Cuántos grupos abelianos no isomorfos hay de orden 24, 25?

3. Sea G un grupo, si H y K son subgrupos de índice finito, probar que $H \cap K$ es de índice finito.

4. ¿Es $\mathbf{Q}[x]/ < x^2 - 5x + 6 >$ un cuerpo?.

   ¿Es $\mathbf{Q}[x]/ < x^3 - 6x + 6 >$ un cuerpo?. Justifique.

5. Dar un representante de cada clase de equivalencia de matrices complejas 4 x 4 con único autovalor x; siendo la relación $A \sim B$ sii existe $C \in GL(4, \mathbf{C})$ con $A = CBC^{-1}$.

6. Probar que si F es un módulo libre finitamente generado sobre un anillo principal A y M es un submódulo de F entonces M es libre y su dimensión es menor o igual que la de F.

Diciembre, 1985

1. Probar que todo subgrupo finito del grupo multiplicativo de un cuerpo es cíclico.

2. Enunciar y demostrar los teoremas de Sylow.

3. Demostrar que el subanillo $\mathbf{Z}[i] \subset \mathbf{C}$ es principal (y por lo tanto dominio de factorización única). ¿Cuáles son las unidades? ¿Cuál es un máximo común divisor de 2 y (1 + i)?

4. Hallar todas las formas racionales posibles de las matrices 4×4 reales M tales que $M^4 = I$.

5. Sea M un A-módulo.

   a) Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) Todo submódulo de M es finitamente generado.

(ii) Toda sucesión estrictamente creciente de submódulos es finita.

(iii) Toda familia no vacía de submódulos posee un elemento maximal.

b) Demostrar que todo dominio a ideales principales satisface las condiciones anteriores como módulo sobre sí mismo.

Marzo, 1986

1. Sea G un grupo finito tal que $|G| = p^m s$ con p primo y $(p,s) = 1$.

   Probar que existe un subgrupo H de G tal que $|H| = p^m$.

2. Sea G un grupo finito. Probar que G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow si y sólo sí todo subgrupo de Sylow de G es normal en G. Dar un ejemplo de un grupo no abeliano con esta propiedad.

3. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso justificar la respuesta.

   a) Si $|G| = 175 \Rightarrow G$ es simple

   b) Todo grupo abeliano es imagen homomórfica de un grupo abeliano libre.

   c) Todo grupo abeliano es isomorfo a un subgrupo de un grupo divisible.

   d) Sea G un grupo finito y H un subgrupo propio de G. Entonces, $\bigcup_{x \in G} \; xHx^{-1} \neq G$.

4. Sea R un anillo conmutativo con identidad.

   a) Probar que si R es un dominio de ideales principales entonces R es dominio de factorización única.

   b) Mostrar que la recíproca de (a) no vale.

c) Dar un ejemplo de un anillo íntegro, conmutativo con identidad que no es de factorización única.

5. a) Sea D un anillo de división. Mostrar que $M_n(D)$, el anillo de matrices $n \times n$ sobre D, no tiene ideales propios.

   b) Dar un ejemplo de un anillo sin ideales maximales.

Marzo, 1987

1. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G tal que $([G:H], |H|) = 1$. Probar que si H es normal en G entonces H es el único subgrupo de G de orden $|H|$.

2. Probar que hay exactamente dos grupos no abelianos no isomorfos de orden 8.

3. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

   a) $\mathbf{Q}^+ = \{q \in \mathbf{Q} : q > 0\}$ con el producto no es un $\mathbf{Z}$-módulo libre.

   b) El número de grupos abelianos no isomorfos de orden $m = p_1^{n_1} ... p_k^{n_k}$ es $p(n_1)...p(n_k)$ donde $p(n)$ = número de particiones de n (recordar que $(r_1, ..., r_s)$ es una partición de n si $n = r_1 + ... + r_s$ y $r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_s$).

   c) Sea G tal que $|G| = p^n$ (p primo) y N un subgrupo normal no trivial de G. Entonces $N \cap Z(G) \neq 1$.

4. Sea A un dominio a ideales principales y M un A-módulo.

   a) Probar que M satisface la condición de cadena ascendente sobre submódulos $\Leftrightarrow$ M es finitamente generado.

   b) ¿Vale alguna de las implicaciones de (a) si se reemplaza cadena ascendente por cadena descendente?

5. Sea V un espacio vectorial sobre F de dimensión $< \infty$ y sea $T : V \to V$ lineal. Probar que V es un T-espacio cíclico $\Leftrightarrow$ si $S : V \to V$ es lineal y $ST = TS \Rightarrow S = p(T)$ para algún $p \in F[x]$.

Marzo, 1990

1. Sea $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ tal que $\{p(n) | n \in \mathbf{Z}\}$ contiene una infinidad de números primos. Probar que $p(x)$ es irreductible en $\mathbf{Z}[x]$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{Q}$. Sea $T : V \to V$ lineal tal que $T^5 = 1$. Supongamos que 1 no es autovalor de T. Calcule el polinomio minimal de T y pruebe que $dim_{\mathbf{Q}} V$ es múltiplo de 4.

3. Sea G un grupo finito de n elementos. Sea c el número de clases de conjugación de G.

   a) Muestre que card $\{(x, y) \in GxG : xy = yx\} = cn$.

   b) Muestre que si n es el múltiplo de 8, entonces $c \geq 5$.

4. Sea R un dominio a ideales principales. Sean m, n elementos de R y sea (m, n) un generador de $Rm + Rn$. Probar que

   $Hom_R\,(R/mR,\ R/nR) \simeq R/(m,n)R$

5. Sea $A = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ continua}, f(x+1) = f(x)\}$

   Sea $M = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ continua}, f(x+1) = -f(x), x \in \mathbf{R}\}$

   A es un anillo con suma y producto puntual y M es un A-módulo con multiplicación puntual. Sean $c(x) = cos\pi x, s(x) = sen\pi x$

   Notar que $c(x), s(x)$ están en M. Además $u, v \in M \Rightarrow u.v \in A$

   Probar:

   a) $c(x), s(x)$ generan M como A-módulo

b) Si $\mu \in M$, entonces existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $\mu(x) = 0$

c) M no es un A-módulo cíclico, luego M no es isomorfo a A como A-módulo

d) $M + M \simeq A + A$ como A-módulo

Diciembre, 1991

1. Probar que si G es un grupo de orden 112 entonces posee al menos un subgrupo normal.

   Ayuda: Suponer lo contrario y ver que al hacer actuar G, en los 2-grupos de Sylow se obtiene un $G' \simeq G, G' \subset S_7$ y considerar $A_7 \cap G'$.

2. Todo grupo abeliano finitamente generado es producto directo de un libre y un subgrupo finito.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta.

   a) Si m y n son enteros coprimos $Hom_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},\ \ Hom_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, A)) = 0$ para todo $\mathbf{Z}$ -módulo A.

   En los siguientes A es un anillo conmutativo y $P \subsetneq A$ es un ideal primo.

   b) Si $P \subsetneq A$ es un ideal primo entonces $P[x] \subsetneq A[x]$ es un ideal primo.

   c) Si A_p (localización de A en el primo P) es dominio de integridad para todo ideal primo P entonces A es dominio de integridad.

   d) Si $M \subsetneq A$ es un ideal maximal $M[x] \subsetneq A[x]$ es maximal.

4. Sea A un anillo conmutativo. Probar,

   a) Si $\alpha \in A$ es unidad y $x \in A$ es nilpotente entonces $\alpha + x$ es unidad.

b) $f(x) \in A[x]$ ($f(x) = \sum a_i x^i$) es unidad si y solo si a_0 es unidad y $\{a_i\}_{i>0}$ son nilpotentes.

c) $f(x) \in A[x]$ es divisor de 0 si y solo si existe $a \in A$ tal que $af = 0$.

5. Sea C una familia de módulos sobre el anillo A. Una función $\lambda : C \to \mathbf{Z}$ se llama aditiva si para toda sucesión exacta corta $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$, $M \in C$, se cumple $\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$. Probar que si

$0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_n \to 0$ es una sucesión exacta con $M_i \in C$ y λ es aditiva entonces $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \lambda(M_k) = 0$.

Marzo, 1992

1. Sea M un módulo de torsión sobre un dominio a ideales principales A. Pruebe que M es suma directa de sus componentes p-primarias, donde p recorre los elementos irreducibles de A.

2. Determine los ideales maximales I de $\mathbf{R}[x]$, y los posibles cocientes $\mathbf{R}[x] \,/\, I$, salvo isomorfismos.

3. Sea A un grupo abeliano finito y $a \in A$ un elemento de orden máximo en A. Pruebe que $< a >$, el subgrupo generado por A, es sumando directo de A.

4. Sean p, q primos, con $p > q$. Pruebe que si $p \not\equiv 1$, mod q, entonces existe un único grupo de orden pq y éste es cíclico. Prueve que si $p \equiv 1$, mod q, existe al menos un grupo no abeliano de orden pq.

5. Verdadero o falso? Justifique incluyendo una demostración o un contraejemplo. Resuelva sólo 2 de los siguientes.

   (i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean $T, S : V \to V$ transformaciones lineales idempotentes, esto es, $T^2 = T, S^2 = S$. Entonces, si los rangos de T y S tienen la misma dimensión, T es semejante a S.

(ii) Toda matriz compleja $n \times n$ es semejante a su traspuesta.

(iii) Si G es un grupo generado por dos elementos de orden finito x, y, esto es, existen $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1, n \neq 1$ tales que $x^n = y^m = 1$, entonces G es finito.

Diciembre, 1993

1. (a) Sea A anillo conmutativo, y sea S un subconjunto multiplicativo de A, que contiene al 0 (i.e., $0 \in S$, y si $x, y \in S$, entonces $xy \in S$.) Probar que existe un ideal I de A, maximal en el conjunto

$$F = \{J \, \text{ideal de A}: J \cap S = \emptyset\}$$

Más aún, este ideal es primo.

(b) Dar un ejemplo con $A = \mathbf{Z}$ y $S = \{3^r : r \in \mathbf{Z}\}$

2. (a) Sea

$$F = \mathbf{Z}_2[x] / < x^2 + x + 1 >$$

Probar que F es cuerpo.

(b) Sea M(2, F) el conjunto de matrices 2× 2 con coeficientes en F, y

$$\mathrm{O}\ (2, F) = \{A \in M(2, F) : AA^t = I\}$$

probar que O $(2, F)$ actúa en $F^2 = \{(x, y) : x, y \in F\}$ por transformaciones lineales: $(A, x) \rightarrow Ax$. Dividir F^2 en órbitas y dar el orden de los subgrupos de isotropía.

3. (Verdadero o Falso) Sea G grupo finito con todos sus subgrupos normales. Entonces G es abeliano.

4. (a) Sea $R_a = \mathbf{Q}[x]/ < x^2 - ax + 4 >$

Para qué enteros a es R_a un cuerpo?

(b) Es R_6 isomorfo a R_7 ?

Marzo, 1994

1. Sea A un anillo conmutativo con unidad, $I \subseteq A$ un ideal bilátero, $I \neq A$. Probar que I está contenido en algún ideal maximal de A.

2. Para $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, se define $\phi(n) = card\{d \in \mathbf{N} : 1 \leq d < n, d$ es coprimo a $n\}$. Probar que $a^{\phi(n)} \cong 1 \bmod n$, para todo $a \in \mathbf{Z}, a$ coprimo a n.

3. (i). Enumerar todos los grupos finitos de orden 253.

   (ii). Sea G un grupo finito de orden impar, V un espacio vectorial sobre $\mathbf{Q}, \chi : G \to \text{Aut } V$ un homorfismo de grupos. Probar que det $\chi(g) = 1$, para todo $g \in G$.

   (iii). Hallar todos los subgrupos finitos de $\mathbf{C}^X$.

4. Sea $C_m(X) = \sum_{0 \leq i \leq m-1} X^i \in \mathbf{Z}[X]$. Probar que C_m es irreducible si y sólo si m es primo.

5. (i). Enunciar y demostrar el teorema de clasificación de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales.

   (ii). Enunciar el teorema de la forma racional de un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Deducir de (i) la demostración.

Julio, 1994

1. (a) Sea M un módulo finitamente generado, sin torsión, sobre un DIP. Pruebe que M es libre.

   (b) Enuncie y pruebe el primer teorema de Sylow.

2. Caracterice los subgrupos normales de D_n.

3. Hacer 3 de los siguientes

   (i) Para cada d, divisor de n, hay un único subgrupo de orden d de $\mathbf{Z}_n$.

   (ii) Si G es un grupo finito, entonces todo elemento de G es un producto de elementos de orden del tipo p^k, con p primo.

   (iii) Si A, B son matrices reales semejantes sobre $\mathbf{C}$, entonces son semejantes sobre $\mathbf{R}$.

   (iv) Si $x, y \in \mathbf{N}$, entonces hay enteros α, β tales que $\alpha x + \beta y = (x, y)$, y $(\alpha, y) = 1$.

   (v) Si G es de orden p^3, con p primo, y además contiene mas de un subgrupo normal de orden p, entonces G es abeliano.

   (vi) $\mathbf{R}$ no es un $\mathbf{Q}$-espacio vectorial de dimensión finita.

4. (a) Sea A un anillo con 1 tal que para cada $x \in A$ hay un central idempotente e tal que $(x) = (e)((x)$ denota el ideal bilatero generado por $x)$.

   (i) Sea B el conjunto de los centrales idempotentes de A. Para $e, f \in B$ definamos $e \bigoplus f = e + f - 2ef$. Pruebe que $(B, \bigoplus, ..., 0, 1)$ es un anillo.

   (ii) Sea F el conjunto de los ideales finitamente generados de A. Pruebe que $f : B \to F, e \to (e)$, es una biyección la cual identifica la operación de B con la $\cap$, y la operación $\bigoplus$ con la suma de ideales.

   (b) Si I, J, K son ideales bilateros de un anillo con identidad A, entonces $I + J = A$ y $I \cap J \subseteq K$ implican que $(I + K) \cap (J + K) \subseteq K$.

Diciembre, 1994

1. Diga si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

   a. Sea G un grupo abeliano finito. Entonces $\mathrm{Aut}(G)$ es abeliano si y sólo si G es cíclico.

   b. S_n no tiene subgrupos cíclicos de orden mayor que n.

   c. Si R es un dominio de integridad tal que toda cadena de ideales de la forma

   $$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

   satisface que para algún $n, I_n = U_j$ para todo $j \geq n$, entonces R es un cuerpo.

2. Sea R un anillo y sea M un R-módulo irreducible. Si x es un elemento de M tal que $x + x \neq 0$, entonces existe un elemento y de M tal que $y + y = x$.

3. Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G cuyo índice es 12. Si G contiene un elemento de orden 18, probar que G no es simple.

4. Sea R un anillo conmutativo con unidad, y sean $M_1, \ldots, M_n$ ideales maximales de R distintos. Probar que:

   $$R/(M_1 \cap \ldots \cap M_n) = R/M_1 \times \ldots \times R/M_n$$

Marzo, 1995

1. Todo grupo de orden 15 es cíclico.

2. Sea G grupo finito cuyo orden es divisible por p, un número primo. Entonces existe un elemento de orden p en G. (No usar Sylow).

3. Un anillo R es de Boole si $x^2 = x$, $\forall x \in R$, (además R conmutativo con 1). En un anillo de Boole R, probar que

(i) $2x = 0$ para todo $x \in R$.

(ii) Cada ideal primo es maximal

(iii) Cada ideal de generación finita es principal.

4. Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión de R-módulos y homomorfismos (R anillo conmutativo con 1). Entonces esta sucesión es exacta $\Leftrightarrow$ $\forall$ R-módulo N la sucesión:

$$0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{g}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{f}} Hom(M', N)$$

es exacta ($\overline{g}(T) = Tog, etc.$)

5. Sea M una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo F. Si $tr(MX) = 0$ $\forall X$ matriz $n \times n \Rightarrow M = 0$

6. Sea $\mathbf{Z}_p$ los enteros módulos p, con p primo. Sean n y $d \in \mathbf{N}$ tal que $d|n$. Sea $f \in \mathbf{Z}_p[x]$, irreducible y canónico de grado d, entonces $f|x^{p^n} - x$ (en $\mathbf{Z}_p[x]$)

FUNCIONES ANALITICAS

Diciembre, 1980

1. Sea $U \subset \mathbf{C}$ conexo y abierto. $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $\mathbf{C}$, que converge a una función f unif. en compactos. Mostrar

   a) f es holomorfa en U

   b) $f_n' \to f'$ unif. en compactos en U.

   c) Si f_n nunca se anula en U entonces f es idénticamente nula ó f no se anula nunca en U.

2. Sea f holomorfa en un entorno abierto del disco unidad. Para $|z| < 1$, probar

$$f(z)(1 - |z|^2) = 1/2\pi i \int_{|t|=1} (1 - \bar{z}t/t - z) f(t) dt$$

y deducir la desigualdad

$$|f(z)|(1 - |z|^2) \leq 1/2\pi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta$$

3. Encontrar una aplicación conforme entre la región

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z - i|^2 < 2, \quad |z + i|^2 < 2\}$$

y el disco unidad.

4. Sea $D \subset \mathbf{C}$, conexo, abierto y relativamente compacto, f una función holomorfa definida en un entorno de $\bar{D}$. Si $|f(z)| = c =$ constante para $z \in \partial D =$ Frontera de D, pero $f \not\equiv$ constante en D mostrar que f toma cualquier valor de $|z| < c$.

5. Exponer en forma clara y concisa los conceptos y propiedades fundamentales de la continuación analítica (elemento funcional, continuación analítica directa, continuación analítica a lo largo de un camino, teorema de monodromía, función analítica global, superficie de Riemann).

   ¿Qué significa que la colección de todos los elementos funcionales (f, Ω) tales que $e^{f(z)} = z \; en \; \Omega$ constituyan una función analítica global?

Diciembre, 1981

1. Enunciar con precisión la forma más general que conoce del teorema integral de Cauchy. Probar con todo detalle la fórmula integral de Cauchy. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en una región Ω que contiene a z_0, entonces la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0 converge a la función en el disco abierto con centro z_0 más grande contenido en Ω.

2. Para cada una de las siguientes condiciones dar un ejemplo de una función entera $f(z)$ no constante que la satisfaga o indicar brevemente por qué un tal ejemplo no existe.

   a) $f(z) = f(z+1)$ para todo z.

   b) $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para todo z.

   c) $f^{(n)}(0) = n!$ $n = 1, 2, \ldots$

   d) $f(n) = 0$ $n = 1, 2, \ldots$

   e) $f(1/n) = 0$ $n = 1, 2, \ldots$

   f) $|f(z)| > 1$ para todo z.

   g) $|f(z)| = 1$ para todo z real.

   h) $f(z)$ real para todo z con $|z| = 1$.

3. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{cos x}{x^2 + a^2} dx$, a real.

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}$ dz donde f(z) = $\dfrac{z^2+1}{(z-3)^9(z+8)}$ donde γ es el cuadrado de vértices

   5 ± 5i, -5 ± 5i.

4. Transformar conformemente la intersección de los discos $|z| < 1$ y $|z - 1| < 1$ en el interior del círculo unidad. Elegir la transformación de tal manera que preserve las dos simetrías.

Julio, 1982

1. a) Sea $f(z)$ una función meromorfa en un abierto Ω y sea γ una curva simple cerrada en Ω tal que el interior de γ está contenido en Ω.

   Demostrar que si $f(z)$ no tiene polos ni ceros sobre γ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P\,,$$

   donde N y P son los números de ceros y polos respectivamente, de $f(z)$ que están en el interior de γ, contados cada uno con su multiplicidad.

   b) Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en Ω que satisfacen la desigualdad $|f(z)| > |g(z)|$ sobre γ. Demostrar que $4f(z)$ y $f(z)+g(z)$ tienen la misma cantidad de ceros (contados con su multiplicidad) dentro de γ.

   c) Sea $\{f_j(z)\}$ una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a una función $f(z)$, no idénticamente nula, sobre todo compacto de un abierto D. Demostar que $z_0 \in D$ es un cero de $F(z)$ de multiplicidad m si y sólo si existe un entorno V de z_0 tal que para n suficientemente grande $f_n(z)$ tiene ceros de multiplicidad total m en V.

2. Sea Ω un subrupo discreto de $\mathbf{C}$ con dos generadores $\{e_1, e_2\}$ linealmente independiente sobre $\mathbf{R}$. La función $p(z)$ de Weirstrass se define por

$$(1) \qquad p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

   a) Estimar la suma $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \frac{1}{|\omega|^3}$ sobre el paralelogramo $P_n = \{t_1e_1 + t_2e_2 : t_1, t_2 \in \mathbf{Z} \text{ y } \max\{|t_2|, |t_1|\} = n\}$.

   b) Demostrar que la serie (1), converge normalmente (uniformemente en valor absoluto) sobre todo compacto de $\mathbf{C}$, salvo un número finito de términos.

   c) ¿Es la función $p(z)$ una función meromorfa en todo $\mathbf{C}$? ¿Por qué?.

   d) Calcular el desarrollo de Laurent de $p(z)$ en el origen. ¿Es $p(z)$ una función par?.

3. Si alguno de los siguientes enunciados es verdadero, dar su demostración. Si alguno es falso dar un contraejemplo o una buena justificación.

   a) Si $f(z)$ y $g(z)$ son holomorfas para $|z| < 1$, continuas para $|z| \leq 1$ y $|f| \leq |g|$ sobre $|z| = 1$, entonces $|f| \leq |g|$ en $|z| < 1$.

   b) Si $f(z)$ es una función entera y $|f'(z)| \leq |f(z)|$ para todo z, entonces $f(z) = e^{az+b}$.

Marzo, 1984

1. Enunciar y dar una demostración del Lema de Schwarz.

2. Enunciar el teorema de Riemann de la representación conforme. ¿Cómo se pueden describir las representaciones conformes de Ω en Ω, para Ω simplemente conexo?

3. Dar una demostración del teorema del valor medio para funciones armónicas. ¿Puede dar más de una?

4. Mostrar que $\Pi_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$

5. Calcular

   a) Polos y residuos de $\dfrac{1}{z^3(1-z)^2}$

   b) Serie de Laurent alrededor del 1 de $\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$

   c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx.$

   d) ¿Qué puede decir de las series de Laurent de la función en (b), alrededor del 0, para $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ y $2 < |z|$?

Marzo, 1985

1. Enunciar y demostrar el teorema de Rouché.

2. Demostrar que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas univalentes (inyectivas) en un dominio Ω del plano, y si $f_n \to f$ uniformemente sobre todo subconjunto compacto de Ω, entonces f es univalente o constante.

3. Las siguientes son preguntas del tipo verdadero-falso. Si el enunciado es verdadero, dar una demostración. Si es falso dar un contraejemplo o una buena justificación.

   a) La ecuación $e^{z^2} = 4z^8$ tiene exactamente 8 soluciones (contando multiplicidad) en $|z| \leq 1$.

   b) La ecuación $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n!)^2} = 0$ tiene al menos una solución.

   c) Si f y g son holomorfas en $|z| < 1$, continuas en $|z| \leq 1$ y $|f| \leq |g|$ en $|z| = 1$, entonces $|f| \leq |g|$ en $|z| < 1$.

   d) Si f es entera y $|f'(z)| \leq |f(z)|$ para todo z, entonces $f(z) = e^{az+b}$.

   e) Sea F el conjunto de todas las funciones enteras f tales que

   $$|f(z)| < e^{|n|}$$

   para todo $z = x + in$ ó $z = n + iy (n \in \mathbf{Z};\ x, y \in \mathbf{R})$. Entonces F es una familia normal.

4. Sea Ω la región comprendida entre $|z| = 1$ y $|z - 1/2| = 1/2$.

   Hallar una biyección conforme de Ω sobre un semiplano.

5. a) Enunciar y demostrar el teorema de Mittag-Leffler (para todo el plano).

b) Desarrollar la función $\dfrac{\pi^2}{sen^2 \pi z}$ en fracciones parciales.

Diciembre, 1985

1. Sea $f_n : G \to \mathbf{C}$ (G abierto conexo $\subset \mathbf{C}$) una sucesión de funciones analíticas tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos en G. Probar que si f_n es inyectivo para todo n, entonces ó $f =$ cte ó f es inyectivo.

2. a) Sea G una región en $\mathbf{C}$ (abierto y conexo), sea $a \in G$ y $f : G - \{a\} \to \mathbf{C}$ analítica tal que $\Omega = f(G - \{a\})$ es acotado. Entonces f tiene singularidad evitable en $z = a$, y si f es inyectivo entonces $f(a) \in \partial\Omega$

   b) Mostrar que no existe una función analítica inyectiva que transforma $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$ sobre un anillo $\{z \in \mathbf{C} : 0 < r < |z| < R\}$

3. Sea G una región simplemente conexa distinta de $\mathbf{C}$ que es simétrica (esto es si $z \in G$, entonces $\overline{z} \in G$). Sea $a \in G \cap R$ y supongamos que $f : G \to D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ es una función inyectiva analítica con $f(a) = 0, f'(a) > 0$ y $f(G) = D$.

   Si $G^+ = \{z \in G : Imz > 0\}$, mostrar que $f(G^+)$ está enteramente contenido en $\{z : Imz > 0\}$ ó en $\{z : |Imz < 0\}$.

4. Sea f una función meromorfa en $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C}_\infty - f(\mathbf{C})$ contiene por lo menos tres puntos. Probar que f es cte ($\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ es el plano extendido).

5. ¿Son verdaderas las siguientes afirmaciones?. Justifique su respuesta con una prueba.

   a) Sea $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ y sea $f : \overline{D} \to \mathbf{C}$ una función continua tal que $f : D \to \mathbf{C}$ es analítica e inyectiva. Entonces existe z con $|z| = 1$ tal que $f(z) = f(z_0)$ con $z_0 \in D$.

b) Si f es entera y $|f(z)| < 1 + |z|^{1/2}$ para todo z entonces f es constante.

c) Si $f : G \to \mathbf{C}$ (G región) es analítica y no tiene ceros en G entonces $\log(|f(z)|)$ es armónica en G.

Marzo, 1986

1. Enuncie y demuestre el teorema del módulo máximo para una función analítica f en $A \subset \mathbf{C}$, A abierto conexo. ¿Si $u(x,y)$ es una función armónica en $\mathbf{R}^2$ acotada inferiormente en $\mathbf{R}^2$, es $u(x,y)$ constante? $(u(x,y) \geq M \ \forall x,y)$.

2. Dada $f(z) = z + \dfrac{1}{z}, z \neq 0$, determine la imagen por $f(z)$ de los círculos centrados en $z = 0$. Esboce el gráfico.

3. Sea $f(z)$ analítica en A abierto, $\overline{U} \subset A$ donde $U = \{z : |z| < 1\}$. Suponga que $|f(z)| > z$ si $|z| = 1$ y que $f(0) = 1$. Pruebe que $f(z)$ posee al menos un cero en U.

4. ¿Verdadero o falso?. Justifique con una demostración o un contraejemplo.

   i) Sea $f(z)$ analítica en A abierto, simplemente conexo, $\text{Im} f \subset \mathbf{C} - \{z_0\}$. Entonces existe $g(z)$ analítica en A tal que $f(z) = e^{g(z)} + z_0$

   ii) Si f es entera, $f(t) \in \mathbf{R} \ \forall t \in \mathbf{R}$, entonces $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, $\forall z$.

   iii) Si f es entera no constante y existen $z_1 \neq z_2$ tal que $f^{-1}\{z_1\}$ y $f^{-1}\{z_2\}$ son finitos, entonces $f^{-1}\{z\}$ es finito, $\forall z$.

   iv) $\displaystyle\oint \frac{dz}{\Gamma(z) sen \pi z} = 4\pi i$

5. (a) Sea $A \subset \mathbf{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación. Pruebe que existe una función entera tal que $f(z)$ y un número finito de derivadas toman valores prefijados en cada $a \in A$. Más precisamente: si $a \in A$ y $\omega_0(a), ..., \omega_{n_a}(a) \in \mathbf{C}$ $(n_a \in \mathbf{N})$ existe $f \in H(\mathbf{C})$ tal que $f^{(k)}(a) = \omega_k(a), 0 \leq k \leq n_a$.

(b) Pruebe que en $H(\mathbb{C})$, el anillo de las funciones enteras, todo ideal finitamente generado es principal. (Sugerencia: pruebe primero que si $f, g \in H(\mathbb{C})$ no tienen ceros comunes, existen $r, s \in H(\mathbb{C})$ tal que $rf + sg = 1$. Para ello use (a)).

Marzo, 1987

1. Sea f analítica en $D = \{z : |z| < 1\}$ y continua en $\overline{D}$ tal que $f(z)$ es real si $|z| = 1$. Probar que f es constante.

2. Demostrar el teorema de la aplicación abierta.

3. Decidir si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes. Justificar.

   a) Sea G un abierto simplemente conexo, $G \neq \mathbb{C}$; si $f : G \to G$ es analítica y $\exists\ a \in G$ con $f(a) = a \Rightarrow |f'(a)| \leq 1$.

   b) Si $f(z)$ tiene una singularidad no evitable en z_0, entonces $e^{f(z)}$ tiene una singularidad esencial en z_0.

   c) Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} n^2 z^n$ para $|z| < 1$, entonces f se extiende a una función analítica en $\mathbb{C}$ - $\{1\}$.

4. Probar que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. a) Probar que existe una función analítica en $D = \{z / |z| < 1\}$ que no se extiende analíticamente a un abierto conexo que contiene propiamente a D.

   b) Obtener la factorización de Weierstrass de $\frac{sen \pi z}{\pi z}$.

Marzo, 1990

1. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$ $\qquad a>0,\, b>0.$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{(\frac{1}{z^2})}dz$

2) Sea $D=\{z:|z|<1\}$. Pruebe que $\phi:D\to D$ es holomorfa y biyectiva si y sólo si existen $z_0\in D$, U, $|U|=1$, tales que $\phi(z)=U\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$.

3. Sea Ω abierto conexo. Pruebe que si $f_n\to f$ uniformemente sobre compactos en Ω y f_n no tiene ceros en Ω, entonces $f(z)\equiv 0$ ó f no tiene ceros en Ω.

4. Verdadero o Falso? Justifique dando una demostración o un contraejemplo.

   a) Sea f holomorfa en Ω conexo, $u=Ref, v=Imf$.
   Si existen constante a,b,c tales que $au+bv\equiv c$ entonces f es constante.

   b) Sea $f(z)$ holomorfa en un abierto Ω $f\neq cte$, $0\in\Omega$, f(0) $=0$
   Entonces existe $m\in N$, U abierto, $0\in U$ tal que para cada $z\in V=f(U)$ $z\neq 0$ existen m preimágenes; card $(f^{-1}(z))=m$.

   c) Si Ω abierto, $f_n\to f$ uniformemente sobre compactos en Ω, f_n holomorfa, $\forall n$ en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω y $f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ unif. compactos $\forall k\in N$.

5. Pruebe que si $f(z)$ es entera y $|f(z)|=1$ si $|z|=1$ entonces $f(z)=uz^n$ con $|u|=1, n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$.

   Determine todas las funciones racionales $f(z)$ en $\mathbf{C}$, tales que $|f(z)|=1$ si $|z|=1$.

Diciembre, 1991

1. Hallar una aplicación conforme biyectiva que transforme $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < Rez < \pi \text{ e } Im(z) > 0\}$ en $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

2. Sea $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ entera tal que $|f(z)| \leq e^{Im\, z}$.

   Mostrar que para $z \notin \pi Z$, $\frac{d}{dz}\Big(\frac{f(z)}{senz}\Big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}$, donde la serie de la derecha converge uniformemente sobre todo compacto $K \subset \mathbf{C}$ que no intersecte a $\pi\mathbf{Z}$.

   (si $\gamma_n(t) = (n+\frac{1}{2})\pi e^{it}$ para $t \in [-\pi, \pi]$ considerar la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{f(x)dx}{senx(x-z)^2}.$$

   Deducir, $cotag(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2\pi^2} \quad \forall z \notin \pi Z.$

3. Sea f analítica en un abierto de $\mathbf{C}$, Ω que contenga al disco unidad cerrado $\{z : |z| \leq 1\}$ y tal que $|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$. Demostrar que f es racional. ¿Puede ser más específico sobre la forma de f?

4. Probar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

5. Sea f meromorfa en Ω, abierto en $\mathbf{C}$. Si el conjunto de los ceros de f en Ω es $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ y el conjunto de los polos es $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ¿Por qué tales conjuntos son necesariamente numerables? Probar que para toda curva γ cerrada, C^1 homologa a cero en Ω, vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j \eta(\gamma, a_j) - \sum_k \eta(\gamma, b_k)$$

   donde cada cero y polo es contado tantas veces como su multiplicidad.

   Deducir que si $f : \Omega \to f(\Omega)$ es inyectiva y si $f(z_0) = w_0$ con $z_0 \in \Omega$ entonces existen $\in > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|w-w_0|<\delta \Rightarrow f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\epsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,z\,dz.$$

Marzo, 1992

1. Dados $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbf{C}$, con $|a_i|<1, i=1,...,m$ sea

$$f(z)=\Pi_{i=1}^{m}\frac{a_i-z}{1-\overline{a}_i z}.$$

Muestre que si $a \in \mathbf{C}$, $|a|<1, f(z)$ toma el valor a exactamente m veces en $\{z : |z|<1\}$. Muestre además que si $|a|>1$, la ecuación $f(z)=a$ tiene m raíces en $\{z : |z|>1\}$.

2. Sean U un abierto en $\mathbf{C}$, z_0 en U y sea $f(z)$ una función analítica en $U-\{z_0\}$. Pruebe que si z_0 es una singularidad esencial de $f(z)$ entonces la imagen de $V-\{z_0\}$, donde V es un entorno de z_0 contenido en U, es densa en $\mathbf{C}$.

3. Si $a \in \mathbf{R}$, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cosax}{2+x^2}dx.$$

4. Verdadero o falso?. Justifique su respuesta, dando una demostración o un contraejemplo.

   (i) Existe $f(z)$ analítica en $U=\mathbf{C}-[-2,2]$ tal que en $U, f(z)^2=z^2-4$.

   (ii) El disco $\{z : |z|<1\}$ es el mayor abierto conexo que contiene al 0 donde $\Pi_{n=1}^{\infty}(1+z^n)$, define una función holomorfa.

5. Sean $z_0, z_1 \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ y sean $\Lambda_0=\{m+nz_0 : m,n \in \mathbf{Z}\}$ y $\Lambda_1=\{m+nz_1 : m,n \in \mathbf{Z}\}$. Determinar todas las funciones holomorfas $f:\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}$ tales que

$$f(z+\lambda)-f(z)\in\Lambda_1, \forall z \in \mathbf{C},\ \ \forall\lambda\in\Lambda_0.$$

Diciembre, 1993

1. Sea f entera, $P(z)$ polinomio en $\mathbf{C}$, tales que $|f(z)| \leq |P(z)|$ $\forall z \in \mathbf{C}$. Probar que f es un polinomio.

2. Sea D un abierto de C, y $f : D \to \mathbf{C}$ continua en D y analítica en $D - L$, donde L es un segmento en D. Probar que f es analítica en D.

3. Sea G abierto de $C, f : G \to \mathbf{C}$ analítica e inyectiva. Probar que $f(G)$ es abierto, y que $f^{-1} : f(G) \to G$ es analítica.

4. (a) Dar el desarrollo en series de Laurent alrededcor de $x = 1$ de la función
$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 - 1}$$
(b) Encontrar y clasificar las singularidades de la función
$$g(x) = \frac{1}{xcos(x)}$$
En el caso de los polos, calcular el residuo correspondiente.
(c) Calcular
$$\int_0^\infty \frac{az}{1+x^3}$$

Marzo, 1994

1. Probar que toda función entera con un polo en ∞ es un polinomio.

2. Sea $\alpha \in C, |\alpha| \neq 1$, calcular
$$\int_0^{2\pi} (1 - 2\alpha cos\varphi + \alpha^2)^{-1} d\varphi$$

3. Considerar un polinomio en dos variables de grado $n \in \mathbf{Z}$ con coeficientes complejos $P(z, w)$. Supongase que w_0 es elegido tal que todos los n ceros de $z \to P(z, w_0)$ son distintos. Usar Rouche para probar que la misma propiedad vale para todo w en algún entorno conveniente de w_0.

4. (a) Sea $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}, S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Hallar todas las funciones meromorfas en $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ no constantes y analíticas en D tales que $f(S^1) \subseteq S^1$. (Observar que para $|a| < 1$ $f(z) = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ es una de tales funciones).

   (b) Cual es la respuesta a la misma pregunta pero tomando en lugar de D el semiplano superior y en lugar de S^1 la recta real?.

5. Hallar alguna transformación conforme g (i.e. analítica con inversa analítica) que transforme $\{z \in \mathbf{C} : |z-1| < 2\} \cap \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$ en el disco abierto $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$

Julio, 1994

1. Sea $\Omega = \mathbf{C} - [-1, 1]$. Definir una función $g : \Omega \to \mathbf{C}$ analítica en Ω tal que $\forall\, z \in \Omega \;\; g^2(z) = 1 - z^2$.

   Sea γ curva cerrada en Ω, continuamente diferenciable. ¿cuáles son los posibles valores de $\int_\gamma g(z)dz$?

2. Sea Ω abierto en $\mathbf{C}$; $f : \Omega \to \mathbf{C}$ analítica; sea a una singularidad aislada de f. Probar que a no puede ser un polo de e^f. Deducir que si Ref es acotada superiormente en un entorno reducido de a entonces a es una singularidad evitable de f, y que la misma no ocurra si se reemplaza acotada superiormente por acotada inferiormente.

3. Sea $\Omega = \{z \in \mathbf{C}/ -1 < R_e z < 1\}$, $\;D = \{z \in \mathbf{C}/|z| < 1\}$. Hallar $f : \Omega \to D$ biyectiva y analítica en Ω

4. Partiendo por ejemplo de que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ calcular las integrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^\infty cos(x^2)dx; \int_0^\infty sen(x^2)dx$.

5. (a) Si f analítica en $\{z/|z-z_0|<\delta\}$ con $\delta>0$ y si $f'(z_0)=0$, entonces f no es inyectiva en ningún entorno de z_0.

(b) Más generalmente, si $\delta>0$ y si f es analítica en $\{z\in \mathbf{C}/|z-z_0|<\delta\}$ satisface $f'(z_0)=f''(z_0)=...=f^{(n-1)}(z_0)=0$ y que $f^{(n)}(z_0)\neq 0$, entonces mostrar que $\exists\ \varepsilon>0$ tal que $|w-f(z_0)|<\varepsilon \Rightarrow$ la ecuación $f(z)=\omega$ tiene k raíces distintas en $\{z/(z-z_0)<\delta\}$.

Noviembre, 1994

1. Verdadero o Falso? (Responda con una demostración o un contraejemplo.)

(a) Si $f'(z_0)$ existe, entonces $f''(z_0)$ existe.

(b) Si f es meromorfa en una región simplemente conexa Ω, entonces $\frac{dg}{dz}=f$ tiene una solución g meromorfa en Ω sii los residuos de f en Ω son todos cero.

(c) Toda función continua de un disco cerrado $D\subset \mathbf{C}$ es límite uniforme de funciones analíticas en D.

2. Describa:

(a) Todos los valores de $(1+i)^i$.

(b) Todas las transformaciones conformes de la región $0<arg(z)<\frac{\pi}{3}$ sobre el disco unidad.

3. Sea f analítica en una región que contiene a una curva simple cerrada Γ, sea Ω el interior de Γ y supongamos que f es 1-1 en Ω.

(a) Demuestre en detalle: $f(\Omega)$ es abierto en $\mathbf{C}$.

(b) Demuestre en detalle: $f^{-1}:f(\Omega)\rightarrow\Omega$ es analítica.

(c) Demuestre: para todo $z\in f(\Omega)$

$$f^{-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{wf'(w)}{f(w)-z}dz.$$

4. Sea $P(z)$ un polinomio de grado ≥ 3 con raíces simples. Demuestre la "fórmula de interpolación de Lagrange":

$$\sum_{\{z:P(z)=0\}} \frac{z}{P'(z)} = 0.$$

5. (a) Calcule la integral
$$\int_{\Gamma_N} \frac{\pi \; cot \; \pi \; z}{z^2} dz$$
donde Γ_N es el borde del cuadrado limitado por las rectas $x = \pm(N + \frac{1}{2})$, $y = \pm(N + \frac{1}{2})$.

(b) Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Marzo, 1995

1. Construya una función entera f tal que $f(n) = n^n \;\; \forall n \in N$.

2. Probar que si $P(z) = z^n + a_{n-1} \, z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ tiene todas sus raíces simples entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|(a_{n-1}, ..., a_1, a_0) - (b_{n-1}, ... b_1, b_0)| < \delta$ entonces $Q(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ tiene la misma propiedad.

3. Calcular $\int_0^\infty \frac{senx}{x} dx$.

4. Sea f entera, sea P un polinomio. Probar que si $|f(z)| \leq P(|z|) \;\; \forall z \in \mathbf{C}$ entonces f es un polinomio.

   Que puede afirmar sobre f si $|e^{f(z)}| \leq P(|z|) \;\; \forall z \in \mathbf{C}$?

5. Supongase $f \in H(\Omega)$, $\;\; \Omega$ abierto en $\mathbf{C}$ tal que $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\} \subset \Omega$. Supongase además que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| = 1$. Cuantos puntos fijos puede tener f? en $D = \{z/|z| < 1\}$.

FUNCIONES REALES

Diciembre, 1980

1. Sea g$\in$ $L([0,1], \mu)$, μ = medida de Lebesgue, tal que

$$|\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx| \leq C \parallel \varphi \parallel_p \qquad p \geq 1$$

$\forall\varphi$, simple medible. Probar que $g \in L^q([0,1],\mu)$ con $1/q + 1/p = 1$.

2. Sea (X,μ) espacio de medida,

$$f_n : X \to \mathbf{C} \qquad \text{medibles tal que} \quad f_n \to \text{f} \quad \text{puntualmente}$$

y $\parallel f_n \parallel_1 \to \parallel f \parallel_1$, $0 \leq \parallel f \parallel_1 < \infty$. Probar que para cada $F_2 \subset$ X medible se cumple

a) $\int_{F_2} |f_n| \to \int_{F_2} |f|$

b) $\int_X |f_n - f| d_\mu \to 0 \qquad n \to \infty$.

3. Sea ν una medida de Borel compleja en $\mathbf{R}$; μ = medida de Lebesgue, probar que existen únicas ν_0, ν_1, ν_2, medidas complejas de Borel en $\mathbf{R}$ tal que $\nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$ con $\nu_0 \ll \mu$, ν_1 puramente atómica, ν_2 singular con respecto a μ y medida de puntos ceros.

4. Sea $V = \{f : [0,1] \to \mathbf{C}$, continuamente derivables$\}$

$$\|f\|_0 = sup|f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad \|f\|_{-1} = \sup|f'(x)|.$$

Probar que $(V, \|\ \|_0)$ y $(V, \|\ \|_1)$ es un espacio de Banach y que $(V, \|\ \|_0 + \|\ \|_{-1})$ es un espacio de Banach.

Diciembre, 1981

1. Supongamos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$, $\|f_n - f\|_p \to_n 0$ $f \in L^p(\mu)$ y además $f_n(X) \to_n g(x)$ a.e. ¿Qué relación existe entre f y g?

   (X, μ) es un espacio de medida arbitrario y μ es una medida positiva en $X, 1 \leq p < \infty$.

2. (X, μ) como en 1), $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$, $f_n(x) \to f(x)$ a.e. y además $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Probar que $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

3. Sea S^{n-1} la esfera unidad en $\mathbf{R}^n$. Para cada $x \in \mathbf{R}^n$ pongamos $x = ru$ $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, $u \in S^{n-1}$. Denotemos con m la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^n$ y definimos una medida σ en S^{n-1} por: si $A \subset S^{n-1}$ es un boreliano, ponemos

$$\tilde{\mathrm{A}} = \{ru \,/\, \mu \in A, 0 < r < 1\}$$

   y luego $\sigma(A) = n\mathrm{m}(\tilde{\mathrm{A}})$

   Probar que para toda función f en $\mathbf{R}^n$ no negativa y boreliana se cumple que

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\, dm = \int_0^{\infty} \Big(\int_{S^{n-1}} f(ru)d\sigma(u)\Big)r^{n-1}dr.$$

4. a) Dar un ejemplo de una función $f \in L^2(\mathbf{R})$ tal que $f \notin L^1(\mathbf{R})$ y sin embargo $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$.

   Hemos tomado

$$\widehat{f}(y) = \Big(\int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-ix.y}dx\Big)\,(2\pi)^{n/2}, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n.$$

   b) Mostrar que si $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ es invariante por rotaciones entonces $\widehat{f}$ también lo es.

Julio, 1982

1. Sea α un número irracional

   a) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ es continua y periódica de período 1. Probar que
   $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{N\to\infty} [\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha)]$
   Ayuda: Considerar el caso $f(x) = e^{2\pi i k x}$ (k entero).

   b) Probar que vale la misma fórmula si f es igual a la extensión periódica con período uno de la función característica de un intervalo contenido en $[0,1]$.

   c) Probar que si $A \subset [0,1]$ es un intevalo abierto, entonces existen infinitos números naturales n tales que $n_\alpha - [n_\alpha]$ pertenecen a A, $[y] =$ parte entera de y

2. Sea (X,μ) un espacio de medida. Sea $f_n : X \to \mathbf{C}$ una sucesión de funciones medibles que convergen "almost everywhere" a una función $f : X \to \mathbf{C}$

   a) Probar que si $f_n \in L_p(X,\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$ y $\|f_n\|_p(n \to \infty)\|f\|_p$, entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

   b) Mostrar mediante un ejemplo que esto no vale si $p = +\infty$.

3. Para cada uno de los enunciados indicar si son verdaderos o falsos. En caso de falsedad mostrarlo mediante un ejemplo.

   a) El teorema de Egoroff es válido para $(\mathbf{R},\mu)$, $\mu =$ medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$.

   b) Si $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, es integrable Riemann en cualquier intervalo finito y
   $$\lim_{N\to\infty} \int_0^N f(x)dx$$
   existe, entonces f es integrable Lebesgue en $[0,\infty)$.

4. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ es integrable Lebesgue y si $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\overline{f(y)}dy$.
   Mostrar que $g(\alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$.

5. Probar que el espacio normado $(V, \|\|)$ con $V = \{f : [0,1] \to \mathbf{C}$ de clase $C^2\}$ y $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ($\|h\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1}\{|h(x)|\}$) no es un espacio completo.

Marzo, 1984

1. Sea (X, M, μ) un espacio de medida, f una función integrable. Probar que para cada $\varepsilon > 0$, existe A medible, de media finita tal que:

   i) $\int_{X-A} |f| d\mu \leq \varepsilon$

   ii) f es acotada en A

   Ayuda: $\mu\{x : |f(x)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$

2. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ absolutamente continua y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ absolutamente continua y monótona creciente. Probar que $f \circ g$ es absolutamente continua.

3. Sea i la aplicación canónica de $L^1(\mathbf{R}$,m) en $(L^1)^{**}$. Probar que i no es suryectiva. ($\mathbf{R}$ = números reales, m = medida de Lebesgue).

4. Si $a \geq 0$, calcular

$$\int_{\mathbf{R}} (\frac{sen(ay)}{y})^2 dy.$$

5. Sea X un espacio métrico compacto. μ una medida positiva y boreliana en X, con $\mu(X) < +\infty$.

   Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2(X, \mu)$, defina

   $K_n(s, t = \sum_{r=1}^{n} f_r(s)\overline{f}_r(t)$ y $H_n(s) = \int_X |K_n(s,t)|\, dt$

   Para cada $g \in L^2(x, \mu)$ sea,

$$S_n(g,x) = \sum_{k=1}^{n}(g,f_k)f_k(x) = \int_X K_n(x,y)g(y)dy$$

Si $x_0 \in X$ es fijo, mostrar que la sucesión de sumas parciales $S_n(g,x_0)$ está acotada para toda $g \in \mathbf{C}(X)$ (por un número que depende de g y x_0) si y sólo si la sucesión numérica $H_n(x_0)$ es acotada.

Notación. $C(X) = \{f : X \to \mathbf{C}, \text{ continua }\}$, con $(g,f) = \int_X g(y)\overline{f(y)}d\mu$.

Marzo, 1985

1. (X,M,μ) un espacio de medida, $f_n, f : X \to \mathbf{C}$ medibles tal que:

$$f_n \to f \text{ puntualmente}, \quad |f_n(x)| \leq M \quad \forall x,n \text{ y } \mu(X) < +\infty$$

Probar, sin usar el teorema de convergencia dominada, que

$$\int_X |f_n - f|d\mu \to 0.$$

2. (X,M,μ) un espacio de medida con $\mu(X) = 1$, y sea $f : X \to [0,+\infty)$ integrable

Probar que:

a) Si $h(x) = (1+f(x)^2)^{1/2}$, entonces $h \in L_1(X,\mu)$

b) Si $c = \int_X f(x)d\mu(x)$, entonces $(1+c^2)^{1/2} \leq \int_X (1+f(x)^2)^{1/2}d\mu(x) \leq 1+c$.

3. Sea $D = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$

C(D) = espacio de funciones complejas continuas en D. Si $f \in C(D)$ sea $i(f) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ definido por

$$i(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

a) Probar que $i : (C(D), \|\|_\infty) \to (L^1(\mathbf{R}^n, dx), \|\|_1)$ es continuo.

b) Si $H \subset (C(D), \|\|_\infty)$ es compacto, entonces H es equicontinuo.

c) Sea H un conjunto de funciones continuas de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}$ de soporte contenido en D, tal H pensado como subconjunto de C(D) es compacto, entonces $\{F_f : f \in H\}$ es equicontinuo donde $F_f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x+s)f(s)ds$.

4. Sea (X, M, μ), $\mu(x) = 1$, $y\ f \in L_1(X, \mu)$ tal que

$\int_X |1 + zf(x)|\, d\mu(x) \geq 1, \ \ \forall z \in \mathbf{C}$. Probar que $\int_X f(x)d\mu(x) = 0$.

Ayuda:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{|1+zt|-1}{t}\right) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

5. a) Enunciar el teorema de Radon-Nikodym.

   b) Enunciar un teorema, para el cual una demostración use el teorema de Radon-Nikodym. Bosquejar la demostración de este teorema.

6. Calcular

   a) $$\int_0^\infty \int^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

   b) Probar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s^{2\lambda}} ds = \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\ (\lambda > 0)$.

Diciembre, 1985

1. Sea μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $F = [0, 1/2]$. Sean $f_1(x) = 2\chi_F(x) - 1$; $f_2(x) = x$.

   Sean $\mu_i(E) = \int_E f_i(x) d\mu(x)$ ($E \subset X$ medible Lebesgue).

   a) Probar que $\mu_2 \ll \mu_1$

   b) No es cierto que: Si $\mu_1(E) = 0$, entonces $\mu_2(E) = 0$

c) μ_2 no es equivalente a μ_1.

2. Sea $X = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ con la topología usual. Probar que existe una medida de Radon μ regular en X tal que

   i) $\mu(x) = 1$

   ii) $\mu(zA) = \mu(A)$ para todo A medible.

   Nota: $zA = \{zw,\ w \in A\}$.

   Deducir que si ν es una medida de Radon en X que satisface i) y ii) entonces para toda f función ν -integrable, se tiene que

$$\int_X f(zw)\, d\nu(w) = \int_X f(w)\, d\nu(w) \ \ \forall z \in X.$$

   Probar que si ν es una medida de Radon que satisface i) y ii) entonces existe un número real a tal que

   $\nu(E) = a\mu(E)$ para todo E boreliano.

   Ayuda: Usar y justificar la igualdad

   $\int_X \int_X f(zw)\, d\mu(z) d\nu(w) = \int_X \int_X f(zw)\, d\nu(w) d\mu(z)$ para todo f continua en X.

3. Sean $n \geq 2$ y (Y_i, M_i, μ_i) i = 1...n espacios de medidas σ-finitos.

   Sea $X = Y_1 \times \ldots \times Y_N$ con la *medida producto* μ.

   Sea $E_i = Y_1 \times \ldots \times Y_{i-1} \times Y_{i+1} \times \ldots \times Y_n$ con la medida producto que denotaremos por $\widehat{\mu}_i$.

   Sean $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbf{R} \geq 0$ μ -medibles tal que f_i no depende de x_i esto es $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots x_n) = h_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$

Si para todo i, f_i^{n-1} es $\widehat{\mu}_i$ - integrable probar que

$f(x_1...x_n) = \Pi_{i=1}^n f_i(x_1...x_n)$ es μ - integrable y $\int_X f d\mu \leq (B_1...B_n)^{1/n-1}$ donde $B_i = \int_{E_i} f_i^{n-1} d\widehat{\mu}_i$.

Ayuda: Inducción en n, justificar y aplicar una desigualdad de Hölder conveniente a $\int_X f d\mu = \int_{Y_n}(\int_{E_n}(f_1...f_{n-1})f_n d\widehat{\mu}_n$

4. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L^p(X,\mu), 0 < p < \infty$ que converge puntualmente a la función f.

   a) Probar que si $\|f_n\|_p \leq a < +\infty\ \forall n$, entonces $f \in L^p(X,\mu)$.

   b) Dar un ejemplo con $p = 1$ donde $\|f_n\|_1$ no converge a $\|f\|_1$.

   c) Si además $f \in L^p$ y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ probar que $\|f_n - f\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Marzo, 1986

1. Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ absolutamente continua. Para cada $[c,d] \subset [a,b]$ definimos $\omega([c,d]) = \max\{|\varphi(x) - \varphi(y)|, x, y \in [c,d]\}$

   a) Probar que para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi > 0$ tal que si $(]a_i,b_i[)_{i=1}^n$ es cualquier familia de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, entonces $\sum_{i=1}^n \omega([a_i,b_i]) < \epsilon$

   b) Probar que $\omega(\varphi([c,d]) = \omega([c,d])$

   c) Si $\omega(E) = 0$ y $E \subset [a,b]$ entonces $\omega(\varphi(E)) = 0$

   d) ¿Vale la afirmación c) para cualquier φ monótona?.

e) Dar otra demostración de c) cuando φ' es acotada en $[a,b]$.

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ continua. De acuerdo a su definición de integral de Lebesgue, probar que f es integrable Lebesgue y que la integral de Lebesgue de f coincide con la integral de Riemann de f.

3. Sea $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ creciente, biyectiva de clase $C^{(1)}$.

   Justificar que para toda $f\in L_1([c,d],\mathrm{m})$ entonces $h(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$ es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y que vale la igualdad $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)d\mathrm{m}\,(x)=\int_c^d f(y)d\mathrm{m}(y)$.

4. Sea $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ continua.

   a) Probar que si f es integrable Lebesgue en $[0,\infty)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx=\int_{[0,\infty)} f d\mathrm{m}$.

   b) Dar ejemplo de f tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f dx$ existe y sin embargo f no es integrable Lebesgue en $[0,\infty)$.

   c) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n |f|dx$ existe, entonces f es integrable Lebesgue en $[0,\infty)$.

5. Sean $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Sean μ_i, medidas en X_i de Radon (= regular y boreliana) tal que $\mu_i(X_i)=1$ para todo i. Probar que existe una única medida de Radon μ en $X=\Pi_{i=1}^{\infty}X_i$ tal que si $A_i\subset X_i$ es cerrado para todo i, entonces $\mu(A)=\Pi_{i=1}^{\infty}\mu_i(A_i)$, donde $A=\Pi_{i=1}^{\infty}A_i$

   Ayuda: Si $f_i:X_i\to\mathbf{C}$ es continua. Sea $\overline{f}_i(x)=f_i(x_i)$, $\overline{f}_i:X\to\mathbf{C}$,

   x_i = proyección de x en la i-coordenada.

   Si $V=\{f:X\to\mathbf{C}: f=\text{un producto finito de } \overline{f}_i's\}$, *entonces.*

   a) El subespacio generado por V es denso en $\mathbf{C}(X)$.

   b) Si $\overline{f}_1...\overline{f}_n=\overline{g}_{i_1}...\overline{g}_{i_s}$ entonces $\Pi_{i=1}^{n}\mu_i(f_i)=\Pi_{j=1}^{s}\mu_{i_j}(g_{i_j})$.

Marzo, 1987

1. Sea $p : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ y μ_p la medida en $\mathbf{Z}$ dada por $\mu_p(n) = p(n)$.

   a) Probar que si f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}, f(n) = a_n$ entonces f es μ_p- integrable $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |a_n p(n)| < \infty$ y en este caso $\int f d\mu_p = \sum a(n)p(n)$.

   b) Si $p_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $p_1(n) < p_2(n)$ $\forall n$, ¿es $L^1(\mathbf{Z}, \mu_{p_2})$ un subespacio cerrado de $L^1(Z, \mu_{p_1})$?.

2. Sea (X, μ) un espacio de medida, $a, b \in \mathbf{R}$ $a < b$, y $f : X \times (a,b) \to \mathbf{R}$ tal que

   a) si $t \in (a,b)$ $f(x,t) \in L'(X, d\mu(x))$

   b) si $x \in X$ existe $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ y es continua en (a,b)

   c) $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t) \in L'(X, d\mu(x))$ y para cada $t_0 \in (a,b)$ existe $g_{t_0} \in L'(X)$ y V_{t_0} un entorno de t_0 tal que $|\dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq g_{t_0}(x)$ para $t \in V_{t_0}$.

   Probar que $\dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_X f(x,t) d\mu(x)$ existe si $t \in (a,b)$ y coincide con $\int_X \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x)$.

3. Si $f, g \in L'(\mathbf{R}^n)$ sea $(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t) g(x-t) dt$.

   a) Pruebe que $f * g \in L'(\mathbf{R}^n)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

   b) Para $y \in \mathbf{R}^n$, $f \in L'(\mathbf{R}^n)$ sea $L_y\, f(x) = f(x-y)$. Pruebe que la función $\phi(y) = L_y(f)$ $\phi : \mathbf{R}^n \to L'(\mathbf{R}^n)$ es continua. Pruebe que $f * g$ es continua en $\mathbf{R}^n$.

4. Sean $l^1 = \{(a_n) | a_n \in C, \sum |a_n| < \infty\}$ $\quad \|(a_n)\|_1 = \sum |a_n|$

   $c_0 = \{(b_n) | b_n \in \mathbf{C} \lim\limits_{|n|\to\infty} |b_n| = 0\}, \|(b_n)\|_\infty = \sup |b_n|$.

   Pruebe que existe un isomorfismo: $l^1 \to c_0'$ (el dual de c_0) que preserva normas.

5. Responda, en dos de las tres afirmaciones siguientes si son verdaderas o falsas. Justifique con una demostración o un contraejemplo.

a) Si $f_n, f \in L'(X,\mu)$ y $f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

b) Si $f \in C^1[0,1]$ (o sea f tiene derivada continua en $(-\epsilon, 1+\epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$) existe una sucesión de polinomios $p_n(t)$ tal que

$$\text{máx}_{0\leq t\leq 1}|p_n(t) - f(t)| + \text{máx}_{0\leq t\leq 1}|p_n'(t) - f_n'(t)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

c) Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de clase $C^{(1)}$, $f(x+2\pi) = f(x) \quad x \in \mathbf{R}$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f.

Marzo, 1990

1. a) Sea $f \in L^1([a,b])$. Pruebe que si $\int_a^x f = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in [a,b]$.

   b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Es f de variación acotada en $[0,1]$?. Es f absolutamente continua en $[0,1]$?

2. Pruebe que si $f_n \to f$ en $L^p(x,\mu)$ y $g_n \to g$ en $L^\infty(x,\mu)$ entonces

$f_n\, g_n \to fg \quad$ en $\quad L^p(x,\mu), \quad 1 \leq p < \infty.$

3. a) Probar el teorema de Lousin: sea f medible en $[a,b]$. Entonces para cada $\epsilon > 0 \quad \exists\ E \subset [a,b], \ |E| < \epsilon$ tal que $f|_{|[a,b]-E}$ es continua.

   b) Probar que si $\epsilon = 0$ el resultado anterior no es siempre cierto.

4. Sea $f \epsilon L^1(\mathbf{R}^n), \quad g \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Probar que si

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\ g\ (y) dy$$

entonces $f * g \in L^p(R^n)$ y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\ \|g\|_p$.

5. Probar que $L^2[0,1]$ es de primera categoría en $L^1[0,1]$.

<u>Sugerencia:</u> Pruebe que $\{f \in L^1[0,1] \ / \ \int_0^1 |f|^2 \leq n\}$ es cerrado en $L^1[0,1]$ y tiene interior vacío

Diciembre, 1991

1. Enunciar y demostrar el teorema de convergencia dominada enunciando también los teoremas o lemas que use en la demostración.

2. Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

   Ayuda: por ejemplo, calcule los coeficientes de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$.

3. Probar que no existe f medible en $\mathbf{R}^n$, integrable sobre compactos tal que $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ para toda φ continua de soporte compacto.

4. i) Probar que si f es absolutamente continua en $[a,b]$ entonces es de variación acotada en $[a,b]$.

   ii) Dar un ejemplo que muestre que la recíproca no vale.

5. Sea $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y $q \geq p$. Probar que

   i) $\|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q}$.

   ii) Si $0 < c < \|f\|_\infty$ entonces $\|f\|_q \geq c(\mu\{x : |f(x)| > c\})^{1/q}$.

   iii) $\lim\limits_{r \to \infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty$.

Marzo, 1992

1. <u>Hacer uno</u> de los siguientes dos ejercicios:

1-a) Probar que si $f_k \to f$ en $L^p(\mathbf{R}^n), 1 \leq p < \infty$, $g_k \to g$ puntualmente y $\|g_k\|_\infty \leq M < \infty$ $\forall k$, entonces $f_k g_k \to fg$ en $L^p(\mathbf{R}^n)$.

1-b) Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ tales que $\varphi_n(0)$ $\forall n$ y $\varphi_n' \to \psi$ uniformemente en $[0,1]$. Probar que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una función absolutamente continua.

2. Enunciar el teorema de Radon-Nikodym y demostrar la unicidad.

3. Enunciar el teorema de descomposición de Lebesgue y demostrar la unicidad.

4. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ y sea $Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$.

   a) Demostrar que si $k(x,y)$ es una función medible Lebesgue tal que $\int_0^1 |k(x,y)|dx \leq c$ para casi todo y $\in [0,1]$, y $f \in L^2[0,1]$ entonces Tf es medible en $[0,1]$ y $\int_0^1 |Tf(x)|dx < \infty$.

   b) Suponiendo que $k(x,y)$ es continua probar que:

   (i) Si $f \in L^2[0,1]$, entonces Tf es continua en $[0,1]$.

   (ii) La familia $\{Tf / \|f\|_{L^2} \leq 1\}$ es equicontinua.

   (iii) Para toda sucesión $\{f_n\}$ tal que $|f_n|_{L^2} \leq 1$ existe una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{Tf_{n_i}\}$ es uniformemente convergente en $[0,1]$.

Diciembre, 1993

1. Supóngase $1 < r < p < s < \infty$. Probar que $f \in L^r(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \Rightarrow f \in L^p(\mathbf{R})$ y acotar $\|f\|_p$ en términos de $\|f\|_r$, $\|f\|_s$.

2. Sea $E \subseteq \mathbf{R}^n$, E medible Lebesgue tal que $|E| > 0$.

   (a): Construir para cada t tal que $0 < t < |E|$ un subconjunto E_t de E de modo que:

$$|E_t| = t \text{ para } 0 < t < |E| \text{ y que } t < s \Rightarrow E_t \subset E_s$$

(b): Suponga $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, mostrar que la construcción puede hacerse de modo que para todo $t > 0$ $\overset{\circ}{E}_i \neq \emptyset$.

3. Sea para $f \in L^p(0,\infty)$, F la función definida por

$$F(x) = x^{-1} \int_0^x f(s)ds$$

Mostrar que la fórmula anterior efectivamente define una función F y que

$$\|F\|_p \leq p(p-1)^{-1}\|f\|_p$$

Ayuda: Suponer primero que $f \geq 0$ y que $f \in C_c(0,\infty)$, integrando por partes obtener

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = -p \int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)dx$$

Notar que $xF' = f - F$ y aplicar la desigualdad de Hölder a $\int_0^\infty F^{p-1}f$. Deducir luego el caso general.

4. (a): Sea $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de variación acotada en $\mathbf{R}$. Probar que existen los límites $\lim_{x \to \pm\infty} g(x)$

(b): Sea $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ continua en $[a,b], a, b \in \mathbf{R}$; $a < b$. Supóngase $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ de variación acotada en $[a,b]$. Sea $\pi = \{t_0, t_1, ...t_n\}$; $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ una partición de $[a,b]$. Sea

$$S_\pi(\phi) = \sum_{1 \leq i \leq n} \phi(t_{i-1})[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

Probar que existe el límite según la norma de las sumas de Riemann Stieltjes $S(\phi)$, esto es que existe un (único) número $S(\phi) \subset \mathbf{R}$ satisfaciendo que

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\pi\| < \delta \to |S_\pi(\phi) - S(\phi)| < \infty$.

Este límite $S(\phi)$ denotado por $\int_a^b \phi \, dg$ es llamado integral de Riemann Stieltjes.

(b): Nótese que si g es monótona no decreciente en $\mathbf{R}$ (esto es $x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$) la fórmula $\Delta(\phi) = \int_a^L \phi\ dg$ define una funcional lineal positiva sobre $C_0(\mathbf{R})$ y entonces por el teorema de representación de Riesz existe una única medida de Borel positiva μ_g tal que

$$\Delta(\phi) = \int_a^b \phi d\mu$$

Describir la medida μ_g para los casos $g(x) = [x]$ y $g(x) = x - [x]$

5. Probar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue: Sea $\{f_n\}_{n \in N}$ una sucesión de funciones medibles de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}$. Sea $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ medible y tal que $\int_{\mathbf{R}^n} |g| < \infty$, supongase que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ $p.p.$ $x \in \mathbf{R}^\infty$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $p.p.$ $x \in \mathbf{R}^n$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_n(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Marzo, 1994

1. Sea (X, μ) un espacio de medida, μ medida positiva. Sea $f : X \to (0, +\infty)$ una función medible tal que $\int_X f = c < +\infty$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_x n log(1 + (\tfrac{f}{n})^\alpha) d\mu = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < +\infty. \end{cases}$$

Ayuda: Calcular $\lim_{n\to\infty} n\ log(1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha)$

2. (a) Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ absolutamente continua y estricta monótona creciente. Probar que si E es medible, $f(E)$ es medible

   (b) Probar que si f es absolutamente continua en $[a, b]$ $V(x) = V(f, [a, x])$ es absolutamente continua en $[a, b]$.

3. Sea f medible en $[0,1]$ y sea $g(x,y) = f(x) - f(y)$. Probar que $g : [0,1] \times [0,1] \rightarrow$ $\mathbf{R}$ es medible y que $g \in L'([0,1] \times [0,1])$ sii $f \in L'[0,1]$.

4. Probar que dados $f \in L^{\infty}[0,1], g \in L'[0,1]$ y $\epsilon > 0$ existe una $\varphi \in C[0,1]$ tal que

$$|\int_0^1 (f - \varphi) g dx| < \epsilon$$

Observar que entonces $C[0,1]$ es **denso** en $L^{\infty}[0,1]$ respecto de topología cuya base de entornos está dada por

$$V_{f,g_1,\ldots,g_n,\epsilon} = \{h \in L^{\infty}[0,1] : |\int (f - h) g_i dx| < \epsilon \quad \forall i = 1, n\}$$

donde $g_1, \ldots, g_n \in L'[0,1]$.

5. Sean A y B conjuntos medibles contenidos en $[0,1]$ y tales que $m(A) > 0$ y $m(B) > 0$. Probar que $\chi_A * \chi_B$ dada por

$$\chi_A * \chi_B(x) = \int_0^1 \chi_A(t) \chi_B(x - t) dt$$

es una función continua. Integrando $\chi_A * \chi_B$ deducir que $\chi_A * \not\equiv 0$. Concluir que $A + B$ contiene un intervalo.

Julio, 1994

En ejercicio 1 $L^p(\mathbf{R})$ significa L^p de los números reales con la medida de Lebesgue.

1. Sean f_n una sucesión en $L^2(\mathbf{R}), f \in L^2(\mathbf{R})$ tal que: $\|f_n\|_2$ converge a $\|f\|_2$, para toda g continua a soporte compacto, (f_n, g) converge a (f, g).

   Probar que $\|f_n - f\|_2$ converge a cero cuando n tiende a infinito.

2. En este ejercicio L^1 representa $L^1((0,1], d\mu)$. Sea $f : (0,1] \rightarrow \mathbf{C}$ continua y sea a_n una sucesión en $(0,1]$, que converge a cero.

   Probar que:

a) Si $f \in L^1$, entonces $\int_{(0,1]} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^1 f(x)dx$

b) Sí $\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^1 f(x)dx$ existe, puede que f no pertenezca a L^1

c) Sí $\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^1 |f(x)|dx$ existe, entonces $f \in L^1$.

3. Sea μ una medida de Radón en $\mathbf{R}$ tal que $\mu\{p\} = 0$ para todo punto p en $\mathbf{R}$. Probar que para cualquier a tal que $0 < a < \mu(\mathbf{R})$, existe X contenido en $\mathbf{R}$, μ medible, de modo que $\mu(X) = a$.

4. Sea $1 < p < \infty$ y sea $\mu \in (l^p)^*$. Probar que existe f en l^p tal que $\|\mu\| = |\mu(f)|$.

5. Enunciar y demostrar el teorema de Hahn Banach para espacios normados reales.

Noviembre, 1994

1. Sea f medible (Lebesgue) en $\mathbf{R}$, con $0 < |f(x)| < 1$ p.p. x, y sea $I_n = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^n dx$ ($\leq \infty$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Mostrar que I_n tiende a cero ó a infinito (cuando $n \to \infty$) y dar ejemplo de cada caso.

2. Mostrar que $log\, x$ está en $L^p(0,1)$ $\forall p < \infty$, y deducir (considerando traslaciones racionales) que la intersección de todos los $L^p(\mathbf{R})$ con $p < \infty$ contiene una f que no es esencialmente acotada en ningún intervalo $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$ (con $a < b$).

3. ¿ Puede una σ-álgebra (de subconjuntos de un conjunto dado) ser infinita numerable?. ¿ Y puede tener cualquier otra cardinalidad prefijada?. Describa los casos posibles (si le es posible).

4. ¿ Puede una función continua en toda la recta tener derivada sólo en un punto?. ¿ Y sólo en los puntos irracionales?.

5. Decir si la siguiente afirmación es correcta: una función f es absolutamene continua en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal

que $\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$ para toda sucesión de inervalos $[a_k, b_k] \subseteq [a, b]$ que cumpla $\sum_{k=l}^{\infty}(b_k - a_k) \leq \delta$.

Marzo, 1995

1. Sea (μ, M) una medida regular, boreliana, completa tal que la medida de cualquier compacto es finita, en el conjunto X de los números reales. Probar que si además, μ es invariante por traslaciones, esto es $\mu(A + x) = \mu A$ para cada $A \in M, x \in X$, entonces μ es un múltiplo positivo de la medida de Lebesgue.

2. Enuncie y demuestre el teorema para $1 \leq p < \infty$, el dual de L^p es L^q.

3. Por definición, una sucesión de funciones f_n en $L^p(1 \leq p < \infty)$ converge débilmente a una función $f \in L^p$ si para toda $g \in L^q$ la sucesión numérica $\int f_n\, g$ converge a $\int f\, g$ (Como es usual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

   Probar que si f_n converge débilmente, entonces $\|f_n\|_p$ es una sucesión numérica acotada.

   Probar que si f_n es una sucesión en $L^p, p > 1$ que converge puntualmente a una función f, y la sucesión numérica $\|f_n\|_p$ es acotada entonces f pertenece a L^p y la sucesión f_n converge $p > 1$ débilmente a f en L^P.

   Dar un ejemplo de una sucesión en $L^2[0, 2\pi]$ que converge débilmente a cero y que no converge puntualmente.

   Probar que en un espacio de medida finita convergencia uniforme implica convergencia débil.

   El siguiente ejemplo, muestra que en la última afirmación la hipótesis de medida finita es necesaria. Sea X los números reales con la medida de Lebesgue usual.

Sea $f_n = \frac{1}{n}\chi[1, exp(n)]$ Es obvio que f_n tiende uniformemente a cero y que f_n pertenece a L^p para todo $p \geq 1$. Sea $g := \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$, y $g := 0$ para $x \leq 1$, verificar que g pertenece a $L^q(\mathbf{R})$ para $q > 1$ y continúe.

4. Sea V un subespacio cerrado de $L^1(S^1)$ tal que la serie de Fourier de cada elemento de V converge absolutamente. Probar que existe una constante finita C tal que
$$\int_{S^1} |f(x)|dx \leq C \sum_{n \in Z} |\widehat{f}(n)| \; \forall \, f \in V$$
Ayuda: Aplicar el teorema del gráfico cerrado a la inclusión de V en el espacio de Series de Fourier absolutamente convergentes.

5. Probar que l_p es homeomorfo a $l_p \bigoplus l_p$.

TOPOLOGIA

Diciembre, 1980

1. Calcular homología y grupo fundamental, de la superficie de figura 1. (Nota: se supone que los planos son infinitos).

2. Sea M una variedad diferenciable, compacta y orientable de dimensión tres. Probar que si es simplemente conexa tiene la homología de la esfera de dimensión tres.

3. Describa el cubrimiento universal y calcule el grupo fundamental del espacio de figura 2.

4. Dados m y n enteros $m > 0$ y $n > 1$ probar que existe un espacio compacto X tal que

$$H_q^{\#}(X) = \begin{cases} 0 & q \neq m \\ \mathbf{Z}_n & q = m \end{cases}$$

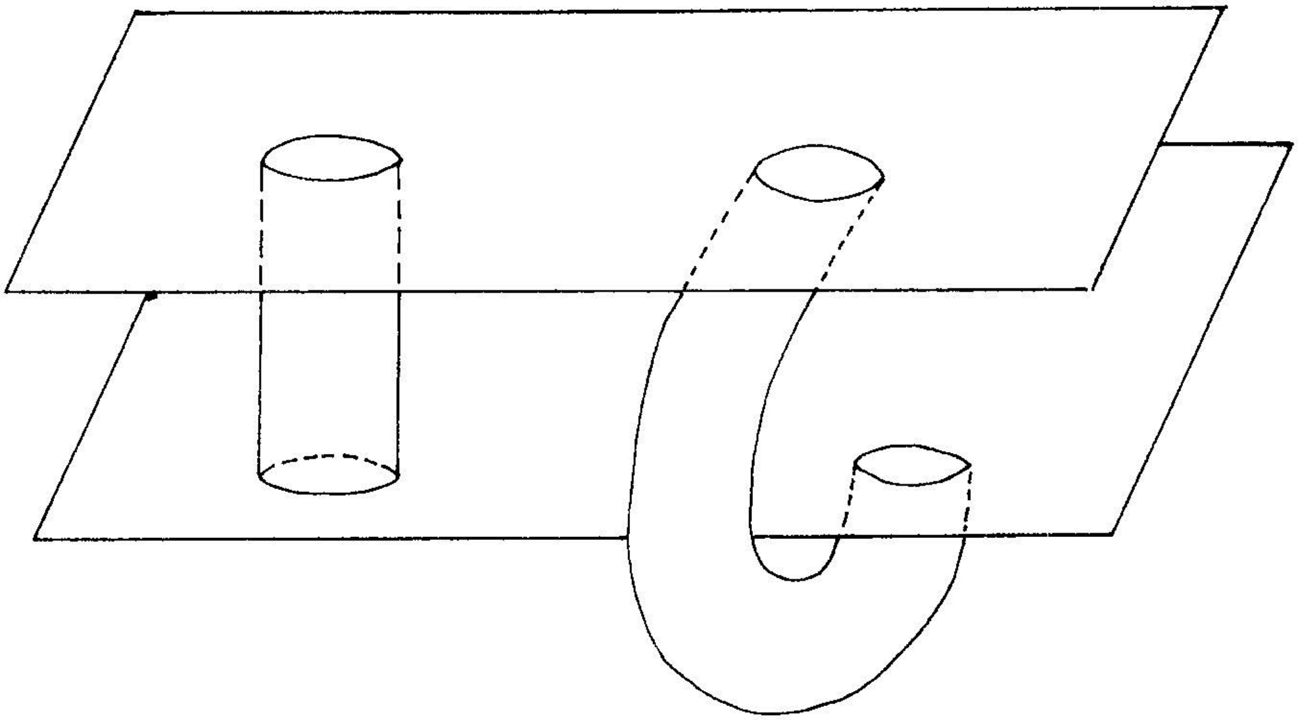


Figura 1

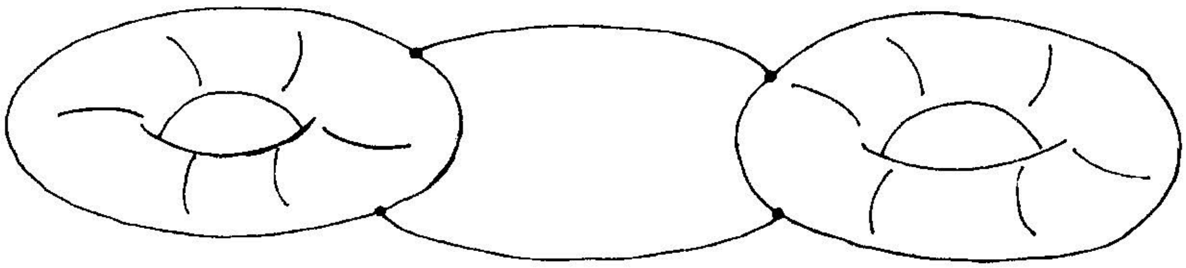


Figura 2

Diciembre, 1981

1. Determinar los cubrimientos universales y calcular los grupos fundamentales de $L(p,q) \times S^1$ y $L(p,q) \times S^1$.

2. Calcular los grupos de homología y cohomología con coeficientes enteros y el grupo fundamental de $L(p,q)\#L(r,s)$.

3. a) Sea X una variedad compacta conexa y orientable tal que $\dim X = 2k+1$. Entonces $\chi(X) = 0$.

   b) Lo expresado en (a) es cierto sin orientabilidad.

4. Calcular $H_n(L(p,q); \mathbf{Z}_m) \quad \forall\, n$.

Julio, 1982

1. Probar que si X es homeomorfo a un producto de esferas de dimensiones $n_1, n_2, ..., n_k$ respectivamente, entonces $(n_1, ..., n_k)$ está unívocamente determinada a menos de una permutación.

2. Sea para $r \leq n$, S_r un subespacio de S^n homeomorfo a la esfera S^r. Pruebe que si $r = n$, $S_r = S^n$ y que si $r < n$ $H_q^{\#}(S^n - S_r, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = n-r-1 \\ 0 & q \neq n-r-1 \end{cases}$

3. Pruebe que si X es una variedad compacta orientable de dimensión n y $\beta_j(X) =$ j-ésimo número de Betti de X entonces $\beta_j(X) = \beta_{n-j}(X)$.

En los ejercicios siguientes determine si las afirmaciones son verdaderas, dando una demostración en caso afirmativo y un contraejemplo en caso negativo.

4. Si n es par y $p : P^n \to X$ es un recubrimiento entonces p es un homeomorfismo. Y si n es impar?.

5. $\pi_1(P^3 \# P^3)$ es finito. ($\#$ indica suma conexa).

6. Si X e Y son espacios CW conexos y $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ para todo n, entonces X e Y son homotópicamente equivalentes.

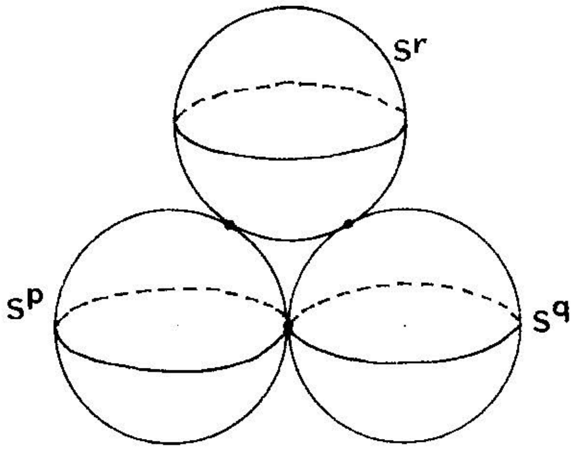
P^n es el proyectivo n-dimensional (real).

Marzo, 1984

1. Sea K la unión de dos círculos disjuntos (círculo S^1) en $\mathbf{R}^3$; probar que $\pi_1(R^3 - K) = \pi_1(S^3 - K)$ y computarlo.

2. Calcular la homología de $S^n - Y$ donde $Y = (S^p \vee S^q) \bigcup_f S^r \qquad p, q, r \geq 1$ (como en el dibujo) donde $f : \{a, b\} \subset S^p \cup S^q \to S^r$

$f(a) = A, \ f(b) = B \ (A \neq B)$



3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta.

   i) La única variedad topológica compacta contráctil es un punto.

   ii) Toda variedad orientable es el cubrimiento doble de alguna variedad no orientable.

   iii) Si $f : \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$ es una función continua, entonces tiene un punto fijo.

iv) Si U, V son subespacios homeomorfos de S^n, entonces U abierto en $S^n \Rightarrow V$ abierto en S^n

4. Probar que si M es una variedad topológica compacta y orientable de dimensión n, con n par y no divisible por 4, entonces $\chi(M)$ es par.

Marzo, 1985

1. Demostrar que no existe una función continua $f : S^2 \to S^1$ que preserve antípodas; es decir tal que $f(-x) = -f(x) \, \forall x \in S^2$

2. Sea $\mathbf{C}P^3$ el espacio proyectivo complejo de dimensión 3. Calcular su homología y característica de Euler, $H_*(\mathbf{C}P^3)$ y $\chi(\mathbf{C}P^3)$ (coeficientes en $\mathbf{Z}$).

3. Sean M y N variedades topológicas con frontera y sea $g : M \to N$ un homeomorfismo. Demuestre que $g(\partial M) = \partial N (\partial$ indica frontera).

4. Demostrar que la cinta de Möbius cerrada y el anillo $\{x \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}$ son homotópicamente equivalentes pero no son homeomorfos.

5. Sea B la botella de Klein. Calcular $\pi_3(B)$.

6. Sea X un complejo CW y X^k su k–ésimo esqueleto. Entonces $H_q(X^k) = 0 \quad \forall q > k$.

7. Enuncie y demuestre el "Teorema de relevamiento de caminos".

8. Sea $\mathbf{R}P^2$ el plano proyectivo y sea U un abierto en $\mathbf{R}P^2$ tal que existe un homeomorfismo $h : U \to D^2 = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$.

Sea $V = h^{-1}(\{x \in D^2 : |x| \leq \frac{1}{2}\})$ y sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos de ∂V. Sea M el espacio que se obtiene de $\mathbf{R}P^2$ identificando esos tres puntos. Calcular $\pi_1(M)$.

Diciembre, 1985

1. Calcule la homología singular y la cohomología de la botella de Klein, a coeficientes en $\mathbf{Z}$ (explique el método usado).

2. Sea M una variedad topológica conexa. Pruebe que la dimensión de M está bien definida.

3. Sea $p(z)$ un polinomio, $p(z) = \sum_0^n a_i z^i, a_i \in \mathbf{C}, n > 1, a_n = 1$. Sea $C_r = \{z \in \mathbf{C} / \|z\| = r\}$. Sea $\phi_m(z) = z^m, m \in \mathbf{Z}$.

   Pruebe que si r es suficientemente grande, $p|_{C_r}$ es homotópica a $\phi_n|C^r$, como función: $C_r \to \mathbf{C} - \{0\}$. Deduzca que $p(z)$ tiene una raíz compleja.

4. ¿Verdadero o falso? Dé una demostración o un contraejemplo según el caso.

   a) Si M es una variedad topológica de dimensión n y $x \in M$, $H_n(M, M - \{x\}) \simeq \mathbf{Z}$.

   b) Si $p : \tilde{X} \to X$ es un cubrimiento con $\tilde{X}$ conexo y existe $s : X \to \tilde{X}$ continua, $p \circ s = Id$, entonces p es un homeomorfismo.

   c) El grupo fundamental de la botella de Klein es no abeliano.

   d) Si G es un grupo abeliano finitamente generado existe un espacio topológico conexo por curvas X con $H_5(X, \mathbf{Z}) = G$.

Marzo, 1986

1. Si X e Y son complejos CW finitos probar que $\chi(X \times Y) = \chi(X).\chi(Y)$

2. Demostrar que no existe una aplicación continua $f : S^2 \to S^1$ tal que $f(-x) = -f(x)$.

3. Sea $M = \mathbf{R}P^2 \vee S^2$ (unión por un punto). Calcular $H_q(M, \mathbf{Z}), q \geq 0$, $\pi_1(M)$ y $\pi_2(M)$.

4. Sea X un espacio topológico y $S(X)$ su suspensión. Calcular $H_q(S(X)), q \geq 0$ suponiendo conocidos $H_q(X)$, $q \geq 0$.

5. ¿Existe $f : \mathbf{R}P^3 \to S^2$ continua e inyectiva?.

6. Demostrar que para cualquier par (X, A), $H^1(X, A; \mathbf{Z})$ es sin torsión.

Marzo, 1990

1. Calcular $H_q(X, \mathbf{Z})$, $H^q(X, \mathbf{Z})$ $(\forall q > 0)$ y $\pi_1(X)$ para $X = T^2 \# K$ (K = botella de Klein).

2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

   i) Si $f : S^n \to D^n$ es continua entonces existe $(x_1, ... x_{n+1}) = x \in S^n$ tal que $f(x) = (x_1, ..., x_n)$

   ii) $n, m > 1$ y $f : S^{n+m} \to S^n \times S^m$ continua y uno a uno.

   iii) Si M es una variedad topológica conexa de dimensión ≥ 3 y $p \in M$ entonces $\pi_1(M) \simeq \pi_1(M - \{p\})$.

3. Probar que si $n \geq 2$ entonces no existe $f : S^n \to S^1$ continua tal que $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^n$.

4. Sea $f : \mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}P^n$ un homeomorfismo local y $n \geq 2$. Probar:

   a) f es aplicación de cubrimiento.

   b) f es homeomorfismo.

Marzo, 1992

1. Sea $X = \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$. Calcular $H_q(X, \mathbf{Z})$ y $H^q(X, \mathbf{Z})$ $\forall q \geq 0$.

2. Enunciar y demostrar los Teoremas de Invariancia del Dominio y de la Dimensión. (Enunciar los resultados usados en las pruebas).

3. En $O(n)$ definimos la siguiente relación de equivalencia $T \sim T_1 \iff T_{|S^{n-1}}$ y $T_{1|S^{n-1}}$ son homotópicas. Probar que $O(n)/\sim$ tiene dos elementos.

4. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

   Resolver sólo 3 de los 4 siguientes

   a) Si $f : \mathbf{R}P^n \to S^1$, $n \geq 2$ entonces f es cte.

   b) $S^2 \times S^3$ y $D^1 \times S^4$ no son homeomorfos.

   c) $\mathbf{R}P^4$ admite estructura de grupo topológico.

   d) $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0 \qquad \forall\ n \geq 2$.

Marzo, 1994

1. Si $X = \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ hallar $H_i(X, \mathbf{Z}_2)$ y $H^i(X, \mathbf{Z}_2)$.

2. Sea X' conexo por curvas y localmente conexo por curvas. Un cubrimiento $p : X' \to X$ se dice regular si $p_*(\pi_1(X', x'))$ es normal en $\pi_1(X, p(x'))$. Sea D el grupo de transformaciones del cubrimiento. Pruebe que

$$D \simeq \pi_1(X, p(x'))/p_*\pi_1(X', x').$$

3. Verdadero o falso? Justifique dando una demostración o un contraejemplo.

   (i) Si $p : X' \to X$ es un homeomorfismo local suryectivo, entonces p es un cubrimiento.

   (ii) Si X es un espacio topológico conexo por curvas con cubrimiento universal $\mathbf{R}^n$ entonces $\pi_i(X) = 0 \ \forall i \geq 2$.

   (iii) S^5 y $S^2 \times S^3$ no son homotópicamente equivalentes.

4. Sea $n \geq 1$ y $f : D^n \to S^n$ inyectiva y continua. Muestre que $f(D^n - S^{n-1})$ es abierto y es una componente de $S^n - f(S^{n-1})$.

VARIEDADES DIFERENCIABLES

Abril, 1987

1. Decir si es verdadero o falso justificando su respuesta. (Elija 2 de los 3 siguientes)

   a) Si M^n es compacta y orientada toda n-forma sobre M es exacta.

   b) Si M es una subvariedad embebida de N con dim M <dim N entonces M no es densa en N.

   c) Si B es próxima a I, la identidad en $Mn(\mathbf{R})$, existe A próximo a I con $A^2 = B$ ("próxima" significa que pertenece a un entorno de I).

2. Sea M una variedad compacta y $f : M \to \mathbf{R}$ una función C^∞ tal que 0 es un valor regular (esto es, $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, y $\forall p \in f^{-1}(0)$ df_p es sobre). Probar que existe un entorno abierto V de $f^{-1}(0)$ y $X \in \chi(V)$ tal que $\forall q \in V, df_q(X_q) = \frac{d}{dt}|_{f(q)}$

3. Sea TM el fibrado tangente de una variedad diferenciable M. Probar que TM es orientable.

4. Sea $f : N \to M$ una aplicación C^∞. Sea (P, i) una variedad integral N_2 de una distribución involutiva D sobre M tal que $f(N) \subset i(p)$. Probar que la función $f_0 : N \to P$ tal que $i \circ f_0 = f$ es C^∞.

5. Sea G un grupo de Lie, $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie.

   a) Si X es invariante a izquierda e Y un campo invariante a derecha $(Y_{xg} = (dRg)_x(Y_x) \forall x,\ g \in \mathrm{G})$ entonces $[X, Y] = 0$.

   b) Supongamos G conexo. Si Y es un campo de vectores en G tal que $[X, Y] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{G}$, entonces Y es invariante a derecha.

Diciembre, 1991

1. Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función C^∞ tal que $f(x) > 0 \quad (x \neq 0)$ y satisface $f(tx) = t^k f(x) (k > 1)$ para todo $t \in \mathbf{R}$ y $x \in \mathbf{R}^n$.

   Probar,

   a) $kf(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$.

   b) Para cada $a > 0, f^{-1}(a)$ es una subvariedad compacta embebida de $\mathbf{R}^n$ de dimensión $n-1$.

2. Sean M, N variedades diferenciables con M conexa y N_2 (por lo tanto metrizable) y sea $f : M \to N$ una función C^∞. Sea $K \subset M$ un subconjunto compacto tal que $f|_K$ es inyectiva y para todo $x \in K$ $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ es un isomorfismo.

   a) Probar que existe V entorno abierto de K en M tal que $f|_V$ es inyectivo.

   Ayuda: Construya una familia $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con U_n entorno abierto de K en M tal que $U_{n+1} \subset U_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y $\cap_{n\in N} U_n = K$.

   b) Probar que existe U entorno abierto de K en M tal que

   $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo sobre un entorno abierto de $f(K)$ en N.

3. Sea ω una k-forma diferencial en $\mathbf{R}^n$ tal que $d\omega = 0$. Probar que existe θ, una $(k-1)$-forma diferencial en $\mathbf{R}^n$, tal que $\omega = d\theta$.

Ayuda: Sea $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ una función C^∞ definida por $\varphi(t, x_1, ..., x_n) = (f(t)x_1, ..., f(t)x_n)$ donde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función C^∞ tal que $f \equiv 0$ para $t \leq 1$ y $f \equiv 1$ para $t \geq 1$.

Si $\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 ... i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, y la expresión en coordenadas $(t, x_1, ..., x_n)$ en $\mathbf{R}^{n+1}$ de $\delta\varphi(\omega)$ es

$$\delta\varphi(\omega) = \sum_{i_1<...<i_k} \beta_{i_1...i_k}(t,x)dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_k} + \sum_{j_1<...<j_k} \gamma_{j_1...j_k}(t,x)dt\wedge dx_{j_1}\wedge...\wedge dx_{j_{k-1}}$$

Probar que, $\beta_{i_1...i_k}(t,x) = f(t)^k\ \alpha_{i_1...i_k}(\varphi(t,x))$ y

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta_{i_1...i_k}(t,x) = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_{i_s}}\ \gamma_{i_1...i_s...i_k}(t,x).$$

4. Justifique las siguientes afirmaciones:

   -Si $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ son estructuras diferenciables en una variedad diferenciable M, entonces $U = F \Longleftrightarrow C^\infty(M,\mathcal{U}) = C^\infty(M,\mathcal{F})$.

   -Si γ es un subgrupo monoparamétrico de un grupo de Lie G que se autointerseca entonces γ es periódico (Existe $L > 0$ tal que $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ para todo $t \in \mathbf{R}$).

5. a) Definir la noción de variedad diferenciable orientable. Dar una condición equivalente y probar la equivalencia entre las mismas.

   b) Para el caso de una inmersión $i : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, enunciar otra definición equivalente de orientabilidad de M.

Diciembre, 1993

1. Sea f una función real C^∞ definida en un entorno convexo W de 0 en R^n y tal que f(0) = 0. Entonces $\forall u \in W$ podemos escribir

$$f(u) = \sum_{L=1}^{u} u_i f_i(u) \quad (u = (u_1, ..., u_n))$$

donde las funcionfes f_i son C^∞ en W y satisfacen

$$f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u_i}_{|0} \qquad i = 1, ..., n.$$

2. Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Demostrar que existe una homotopía diferenciable

$$F : \mathbf{R}^n \times [0,1] \to \mathbf{R}^n$$

tal que

a) $F(x,0) = x \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$

b) $F(x,1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$

c) $F(x,t) = \text{difeomorfismo} \quad \forall t \in [0,1]$

Ayuda:

1) $f \sim h$ tal que $h(0) = 0$

2) $h \sim dh|_0$

3) $dh|_0 \sim I$

3. Sea w una 1-forma definida en un abierto D de $\mathbf{R}^2$. Supongamos que para todo $a \in D$ y todo $r > 0$ tal que $B[a,r] \subset D$ (bola cerrada) se cumple

$$\int_{S[a,r]} w = 0 \qquad (S[a,r] = \text{esfera})$$

Entonces $dw = 0$ en D.

4. Sea (M, ψ) una subvariedad de N tal que $\forall g \in C^\infty(M)$ existe $f \in C^\infty(N)$ tal que $f \circ \psi = g$. Demostrar que ψ es un imbedding y $\psi(M)$ es cerrado en N.

5. Sea $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definida por

$$F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$$

Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justifique:

a) F_* es monomorfismo para todos los puntos de

$S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$.

b) Sea $f = F|_{S^2} : S^2 \to \mathbf{R}^4$, entonces f es una inmersión.

Marzo, 1994

1. Sea $f : M \to N$ una función C^∞ entre variedades diferenciables, sean $\tilde{X}, \tilde{Y}$ campos tangentes C^∞ en M y sean X, Y campos tangentes C^∞ en N. Supongamos que $\tilde{X}$ está f-relacionado con X y que $\tilde{Y}$ está f-relacionado con Y. Probar que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ está f-relacionado con $[X, Y]$. Concluir que los campos invariantes a izquierda (resp. derecha) en un grupo de Lie forman un álgebra de Lie.

2. Sea M una variedad diferenciable, sea $c : (d, e) \to M$ una curva C^∞ inyectiva con derivada nunca nula, y sean $a, b \in \mathbf{R}$ con $d < a < b < e$. Probar

   i) $c|_{(a,b)}$ es un embedding.

   ii) Existe un campo X, C^∞ tangente a M tal que $c|_{(a,b)}$ es curva integral del mismo.

   iii) Si S es una hipersuperficie embebida de M que corta a $c|_{(a,b)}$ transversalmente en $c(t_0)$, entonces existe un abierto U de S que contiene a $c(t_0)$ y tal que la función C^∞, $f : U \times (a, b) \to M$, definida por $f(u, t) = \phi_t^X(u)$, es un difeomorfismo con su imagen; la cual contiene a $c((a, b))$.

   Concluir que dado un número finito de puntos en una variedad diferenciable conexa, existe una carta conexa de ésta que contiene a dichos puntos en su dominio.

3. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo local sobreyectivo, donde M, N son variedades diferenciables con M compacta y conexa. Probar:

   i) El cardinal de $f^{-1}(\{x\})$ es finito y no depende de $x \in N$.

   ii) f es un cubrimiento.

4. Sea M una variedad diferenciable paracompacta. Probar que M admite una métrica riemanniana (o sea existe un tensor C^∞ g de tipo (0,2) en M tal que para todo $p \in M$ g_p es una forma bilineal en T_pM definida positiva).

5. Verdadero o falso. Justificar.

i) Sea M una variedad compacta orientable de dimensión n. Entonces toda n-forma nunca nula es cerrada pero no exacta.

ii) Sea S una hipersuperficie no orientable de $\mathbf{R}^n$. Entonces no existe ninguna función diferenciable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que $S \subset f^{-1}(\{a\})$, con $a \in \mathbf{R}$ y $df(s) \neq 0$ para todo $s \in S$.

iii) Un difeomorfismo local sobreyectivo de una variedad diferenciable conexa en otra compacta es un cubrimiento.

Julio, 1994

1. Sea M variedad diferenciable, X e Y campos en M y ω 1-forma en M.

(i) Muestre que $[X,Y]_p$ definido como sigue

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)), f \in C^\infty(M)$$

define un vector tangente a p en M.

(ii) Pruebe que la aplicación

$$p \to [X,Y]_p \text{ de } M \text{ en } TM \text{ es } C^\infty$$

(iii) Muestre que

$$d\omega(X,Y) = c(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X,Y]) \quad c \text{ constante.}$$

2. Sean M^m, N^n variedades diferenciables, $\theta : M^m \to N^n$ una aplicación diferenciable (C^∞) tal que si $p \in M^m, (d\theta)_p = (\theta_*)_p$ es inyectiva. Pruebe que existen cartas $(U,\varphi),(V,\psi)$ alrededor de p y $\theta(p)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\theta} & V \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \psi^{-1} \\ \mathbf{R}^m & \xrightarrow{\theta'} & \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m} \end{array} \qquad \theta'(x) = (x,0)$$

es conmutativo.

Nota: Puede utilizar (sin demostración) el teorema de la función inversa en $\mathbf{R}^k$.

3. Verdadero o falso? Justifique

(i) Existe $g : \mathbf{R}P^2 \to S^2$ diferenciable tal que $p \circ g = id$, $p : S^2 \to \mathbf{R}P^2$ la proyección canónica

(ii) $E = \{(x, y, z)$ en $\mathbf{R}^3 : \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{Z^2}{c} = 1$, a, b, c positivos $\}$ es una subvariedad orientable de $\mathbf{R}^3$.

(iii) Todo campo vectorial en la recta es completo.

4. Sea D una distribución diferenciable en M, variedad diferenciable, tal que por cada punto de M pasa una variedad integral de D. Muestre que la distribución es involutiva.

Diciembre, 1994

1. Sea $f : M^m \to N^n$ una aplicación diferenciable y sea $S^s \subset N$ una subvariedad embebida. Supongamos que $m+n \geq s$ y que para todo $p \in f^{-1}(S)$ $df_p(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$. Probar:

a) $f^{-1}(S)$ es una subvariedad embebida de M cuya codimensión en M es igual a la codimensión de S en N.

b) $T_p(f^{-1}(S)) = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}S)$ para todo $p \in f^{-1}(S)$.

c) Sean M^m, $S^s \subset N^n$ subvariedades embebidas de N. Si $M \cap S \neq \phi$ y en cada punto $p \in M \cap S$, $T_pM + T_pS = T_pN$, entonces $M \cap S$ es una subvariedad de N cuya dimensión es $m + s - n$. Además, $T_p(M \cap S) = T_pM \cap T_pS$.

2. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo.

a) Si $X \in \chi(M)$ tiene grupo local monoparamétrico asociado $\{\varphi_t\}$ entonces $df(X)$ tiene grupo local monoparamétrico asociado $\{f \circ \varphi_t \circ f^{-1}\}$.

b) $df(X) = X$ sii $f \circ \varphi_t = \varphi_t \circ f$ para todo t donde este definido φ_t.

c) Si $X, Y \in \chi(M)$ tienen grupos locales monoparamétricos φ_t y ψ_s respectivamente, entonces $[X, Y] = 0$ sii $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para todo s, t donde estén definidos. (Considere la curva en T_pM $c(t) = (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)}$ y calcule su derivada).

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una función diferenciable en 0 y satisface $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$ y $x \in \mathbf{R}^n$ entonces f es una transformación lineal.

b) La curva integral (por la identidad) de un campo invariante a izquierda X en un grupo de Lie es también curva integral del campo invariante a derecha asociado a X.

c) Sea $M \subset N$ una subvariedad y sea X un campo de vectores diferenciables en N tal que $X|_M$ es tangente a M. Si $\alpha : I \to N$, la curva integral de X, satisface $\alpha(t_0) \in M$ para algún $t_0 \in I$ entonces $\alpha(t) \in M$ para todo t en un entorno de t_0.

4. Sea $f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ una inmersión. Probar que M es orientable sii existe un campo de vectores diferenciable, normal y nunca nulo a lo largo de (M, f).

Marzo, 1995

1. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables $A \subset M_1$. Una función $f : A \to M_2$ se dice diferenciable si extiende a una función diferenciable en algún abierto conteniendo a A.

Un subconjunto $A \subset M$ se dice "localmente difeomorfo a $\mathbf{R}^k$" si $\forall a \in A \; \exists \, U$ abierto en A tal que $a \in U$ y $\exists h : U \to \mathbf{R}^k$ homeomorfismo diferenciable sobre un abierto $h(U) \subset \mathbf{R}^k$ con $h^{-1} : h(U) \to M$ diferenciable.

Demostrar: Si $A \subset M^n$ es localmente difeomorfo a $\mathbf{R}^k$ entonces A es una subvariedad de M.

2. Si $M(p,n)$ es el espacio vectorial de las matrices reales $p \times n$ con la estructura diferencial de $\mathbf{R}^{pn}$. Sea $M_k(P,n) = \{H \in M(p,N) : rango(H) = k\}$ $k \leq Min\{p,n\}$. Demostrar que $M_k(p,n)$ es una subvariedad diferenciable de $M(p,n)$ de dimensión $k(p+n-k)$.

3. Sea M una variedad diferenciable, ω una p-forma en M y X un campo vectorial en M. Se define usualmente el "producto interior" de X con ω como

$$i(X)\omega = \omega(X, \ldots).$$

Demostrar que

$$i(X)d\omega + d[i(x)\omega] = L_X\omega \quad p \geq 1$$

$$i(X)d\omega = L_X\omega \ \ (p = 0).$$

donde L_X denota la derivada de Lie de ω con respecto a X y d es la diferencial exterior.

4. Sea M^n una variedad diferenciable y $A \subset M^n$. Se dice que A tiene "medida nula" en M^n si para todo sistema de coordenadas (U,φ) de M^n, $\varphi(U \cap A)$ tiene medida nula en $\mathbf{R}^n$.

Demostrar: a) Esta definición coincide con lo usual si $M^n = \mathbf{R}^n$.

b) Si $M^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$ es una subvariedad y $k \geq 1$ entonces M^n tiene medida nula en $\mathbf{R}^{n+k}$.

5. Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables, M_1 conexa y $f: M_1 \to M_2$ diferenciable tal que $f*|_p = 0 \quad \forall p \in M$. Entonces f es constante.

6. Sea $U \in \mathbf{R}^n$ abierto y $f: U \to \mathbf{R}^q$ diferenciable con $q \geq 2n$. Dado $\epsilon > 0$ existe una matriz $q \times n$ $A = [a_{ij}]$ con $|a_{ij}| < \epsilon \quad \forall (i,j)$ tal que

$$g(x) = f(x) + AX \qquad x \in U$$

es una inmersión.

ANALISIS LINEAL

Diciembre, 1985

1. a) Sea $1 \leq p < \infty, f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Si $y \in \mathbf{R}^n$, sea $l_y f(x) = f(x-y)$.

   Pruebe que $\phi : \mathbf{R}^n \to L^p(\mathbf{R}^n), \phi(y) = l_y f$ $y \in \mathbf{R}^n$ es uniformemente continua.

   b) Pruebe que si $f \in L'(\mathbf{R}^n)$ y $f(t) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{it.x} dx$

   $t = (t_1 ... t_n) \in \mathbf{R}^n$, entonces f es continua y $lim_{|t| \to +\infty} f(t) = 0$.

2. Pruebe que si E es un espacio de Banach, $T_n \in L(E, E)$ son operadores lineales continuos T_n compactos y $T_n \to T$, entonces T es compacto.

3. Sea $T : E \to E$ un operador compacto, E Banach.

   Sea λ un autovalor no nulo de T y T_λ el autoespacio. Pruebe que dim $E_\lambda < \infty$ (incluya la prueba de los hechos no básicos utilizados).

4. ¿Verdadero o falso?. Justifique dando una demostración o un contraejemplo según el caso.

   a) Si $T \in D'(\mathbf{R})$ (distribuciones) satisface $\frac{d}{dt} T = 0$ entonces $T = T_f$ (distribución función asociada a una f función <u>constante</u>

   b) Existe una inyección continua $\phi : L^P(\mathbf{R}^n) \to D'(\mathbf{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$

   c) La transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$ es $f(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$

   d) Sea H Hilbert, $T : H \to H$ un operador autoadjunto acotado tal que si $\{E_\lambda\}$ es la familia de proyecciones ortogonales asociada (teor. espectral), entonces $E_\lambda = 0$ ó $E_\lambda = Id$ $\forall \lambda$.

   En estas condiciones, existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $T = cId$.

INFERENCIA TEORICA

Agosto, 1994

1. Sea $\mathcal{P}$ una familia de medidas de probabilidad equivalentes, y sean f_P y g_p dos versiones de $\frac{dP}{dP_0}$, donde $P_0 \in \mathcal{P}$ es arbitraria.

   Muestre que $\sigma(f_P : P \in \mathcal{P}) = \sigma(g_P : P \in \mathcal{P})[\mathcal{P}]$.

2. Sean $\mathcal{P}$ como en el ejercicio 1., $\mathcal{C} = \sigma\left(\frac{dP}{dP_0} : P \in \mathcal{P}\right)$, donde $P_0 \in \mathcal{P}$ es arbitraria, y $X : (\chi, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ una variable aleatoria con media sobre cualquier $P \in \mathcal{P}$.

   Muestre que: $\int E_P(X/\mathcal{C})dP = \int E_{P_0}(X/\mathcal{C})dP \quad \forall P \in \mathcal{P}$.

3. Sean X, ξ variables aleatorias independientes con medias θ^{-1} y θ respectivamente, con $\theta > 0$. Hallar un estadístico suficiente minimal.

   (Hint: Use el Theorema de Bahadur).

4. Sea $X = \{-1, 0, 1, 2, ...\}$, $\mathcal{A}$ la clase p antes de χ y $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in (0,1)\}$ la familia de probabilidades por:

   $$P_\theta(\{-1\}) = \theta$$
   $$P_\theta(\{x\}) = (1-\theta)^2\, \theta^x, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

   Sea $T(x) = x$, $x \in \chi$. Muestre que el estadístico T es limitadamente completo, pero no es completo.

5. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con distribución común $N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbf{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbf{R}_+$. Muestre que

   $$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_+)^2} \quad y \quad T_2 = \frac{X_{(n)} - \bar{X}_+}{X_{(n)} - X_{(1)}} \text{ son ambos independientes}$$

   de $(\bar{X}_+, s^2)$; donde $\bar{X}_+ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}_+)^2$.