Existencia de Solución T-Periódica para un Sistema tipo Nicholson.

Déboli Alberto
Amster Pablo

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

6 ° **BI**OMAT 2014, LA FALDA, CÓRDOBA, ARGENTINA.
Del 04 al 07 de agosto de 2014.

Sistema tipo Nicholson con términos de recolección no lineales.

- En este trabajo generalizamos un resultado de existencia de solución T periódica positiva, que hemos obtenido [AD] para el modelo generalizado de Nicholson [BBI], para el caso de un sistema con términos de recolección no lineales, que describe la dinámica poblacional de dos especies de tipo parasitario [ZLI].
- Más precisamente consideramos el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f(x_{1,\tau_1}(t)) - H_1(t, x_1 \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f(x_{2,\tau_2}(t)) - H_2(t, x_2 \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, $\delta_i, \beta_i, p_i, \tau_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $x_{i,\tau_i}(t) := x_i(t - \tau_i(t))$ y $H_i \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ son T-periódicas en la variable t para $i = 1, 2$.

Sistema tipo Nicholson con términos de recolección no lineales.

- En este trabajo generalizamos un resultado de existencia de solución T periódica positiva, que hemos obtenido [AD] para el modelo generalizado de Nicholson [BBI], para el caso de un sistema con términos de recolección no lineales, que describe la dinámica poblacional de dos especies de tipo parasitario [ZLI].
- Más precisamente consideramos el sistema

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = -\delta_1(t)x_1(t) + \beta_1(t)x_2(t) + p_1(t)f(x_{1,\tau_1}(t)) - H_1(t, x_1 \\ x_2'(t) = -\delta_2(t)x_2(t) + \beta_2(t)x_1(t) + p_2(t)f(x_{2,\tau_2}(t)) - H_2(t, x_2 \end{array} \right.}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, $\delta_i, \beta_i, p_i, \tau_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $x_{i,\tau_i}(t) := x_i(t - \tau_i(t))$ y $H_i \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ son T-periódicas en la variable t para $i = 1, 2$.

Teorema

Si los límites

$$H_{i,sup}(t) := \limsup_{x \to 0^+} \frac{H_i(t,x)}{x}$$

y

$$H_{i,inf}(t) := \liminf_{x \to +\infty} \frac{H_i(t,x)}{x}$$

son uniformes en t para $i = 1, 2$ y se satisfacen las condiciones

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{(H1)}\ \delta_i(t) + H_{i,sup}(t) < \beta_i(t) + p_i(t) \\ \text{(H2)}\ \delta_i(t) + H_{i,inf}(t) > \beta_i(t) + p_i(t) \end{array}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2$ entonces el sistema (1.1) tiene al menos una solución $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ tal que x_i es T-periódica y positiva para $i = 1, 2$.

Espacios de Banach.

- Sean

$$X := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : x_i(t+T) = x_i(t), i = 1, 2\}$$

con la norma

$$||\mathbf{x}||_\infty := \text{máx}\{|x_1|_\infty|, |x_2|_\infty\}$$

y $X^1 := C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \cap X$.

- Consideramos la **familia uniparamétrica de problemas**

$$\boxed{L(\mathbf{x}) = \lambda\Phi(\mathbf{x}), \quad \lambda \in [0,1], \ \mathbf{x} \in X^1 \quad (3.1)}$$

donde $L : X^1 \subset X \to X$, $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ y $\Phi := (\phi_1, \phi_2) : \ X \to X$ con $\phi_1 = \phi_1(x_1, x_2)$ y $\phi_2 = \phi_2(x_1, x_2)$ definidas mediante el segundo miembro de la primera y segunda ecuación del sistema (1.1), respectivamente.

Espacios de Banach.

- Sean

$$X := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : x_i(t+T) = x_i(t), i = 1, 2\}$$

con la norma

$$||\mathbf{x}||_\infty := \text{máx}\{|x_1|_\infty|, |x_2|_\infty\}$$

y $X^1 := C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \cap X$.

- Consideramos la **familia uniparamétrica de problemas**

$$\boxed{L(\mathbf{x}) = \lambda \Phi(\mathbf{x}), \quad \lambda \in [0, 1], \ \mathbf{x} \in X^1 \quad (3.1)}$$

donde $L : X^1 \subset X \to X$, $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ y $\Phi := (\phi_1, \phi_2) : \ X \to X$ con $\phi_1 = \phi_1(x_1, x_2)$ y $\phi_2 = \phi_2(x_1, x_2)$ definidas mediante el segundo miembro de la primera y segunda ecuación del sistema (1.1), respectivamente.

Homotopía.

- Se verifica que
$$\ker(L) = \mathbb{R}^2 \subset X$$
es finito dimensional
-
$$Im(L) = \{\mathbf{x} \in X / \ \overline{\mathbf{x}} := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{x}(t)dt = 0\}$$
es un subespacio cerrado y
-
$$dim(\ker(L)) = codim(Im(L))$$

Homotopía.

- Se verifica que
$$\ker(L) = \mathbb{R}^2 \subset X$$
es finito dimensional
-
$$Im(L) = \{\mathbf{x} \in X / \ \bar{\mathbf{x}} := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{x}(t)dt = 0\}$$
es un subespacio cerrado y
-
$$dim(\ker(L)) = codim(Im(L))$$

Homotopía.

- Se verifica que
$$\ker(L) = \mathbb{R}^2 \subset X$$
es finito dimensional
-
$$Im(L) = \{\mathbf{x} \in X / \ \bar{\mathbf{x}} := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{x}(t)dt = 0\}$$
es un subespacio cerrado y
-
$$dim(\ker(L)) = codim(Im(L))$$

- Luego podemos definir la siguiente homotopía

$$\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) := \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} - \overline{\Phi(\mathbf{x})} - \lambda K_P(\Phi(\mathbf{x}) - \overline{\Phi(\mathbf{x})})$$

donde K_P es la inversa de $L_p := L|_{\ker(P)\cap X^1}$ siendo $P : X \to X$ el proyector continuo

$$P(x) =: \overline{\mathbf{x}}$$

- En este contexto se prueba la siguiente equivalencia

Lema

Para cada $\lambda \in (0, 1]$ x es solución del problema (3.1) si y sólo si

$$\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) = 0$$

.

- Luego podemos definir la siguiente homotopía

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) := \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} - \overline{\Phi(\mathbf{x})} - \lambda K_P(\Phi(\mathbf{x}) - \overline{\Phi(\mathbf{x})})}$$

  donde K_P es la inversa de $L_p := L|_{\ker(P)\cap X^1}$ siendo $P : X \to X$ el proyector continuo

$$P(x) =: \overline{\mathbf{x}}$$

- En este contexto se prueba la siguiente equivalencia

Lema

Para cada $\lambda \in (0, 1]$ x es solución del problema (3.1) si y sólo si

$$\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{x}) = 0$$

.

Invariancia del grado respecto de la homotopía.

- Si $\Omega \subset X$ es un abierto acotado tal que $0 \notin \mathcal{F}_\lambda(\partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ el grado de Leray-Schauder está bien definido y por su invariancia respecto de la homotopía

$$\boxed{\deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, 0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, 0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0)}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

- Más aún $\mathcal{F}_0 = I - P(I - \Phi)$ es una perturbación de rango finito de la identidad pues $P(I-\Phi) \subset Im(P) = \ker(L)$ entonces

$$\boxed{\deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0) = d_B(\mathcal{F}_0|_{\ker(L)},\ \Omega \cap \ker(L), 0)}$$

y si identificamos $\underline{\mathcal{F}_0|_{\ker(L)}}$ con la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida $g(\mathbf{x}) = -\overline{\Phi(\mathbf{x})}$ tenemos el siguiente

Invariancia del grado respecto de la homotopía.

- Si $\Omega \subset X$ es un abierto acotado tal que $0 \notin \mathcal{F}_\lambda(\partial\Omega)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ el grado de Leray-Schauder está bien definido y por su invariancia respecto de la homotopía

$$\boxed{\deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, 0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_\lambda, \Omega, 0) = deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0)}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

- Más aún $\mathcal{F}_0 = I - P(I - \Phi)$ es una perturbación de rango finito de la identidad pues $P(I - \Phi) \subset Im(P) = \ker(L)$ entonces

$$\boxed{\deg_{LS}(\mathcal{F}_0, \Omega, 0) = d_B(\mathcal{F}_0|_{\ker(L)},\ \Omega \cap \ker(L), 0)}$$

y si identificamos $\mathcal{F}_0|_{\ker(L)}$ con la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida $g(\mathbf{x}) = -\overline{\Phi(\mathbf{x})}$ tenemos el siguiente

Teorema

Si $\Omega \subset X$ es un conjunto abierto y acotado tal que:

(C1) *La familia de problemas T-periódicos (3.1) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap X^1$ para ningún $\lambda \in (0,1)$ y*

(C2) *Existe el grado de Brouwer de la función g y*

$$d_B(g, \Omega \cap \mathbb{R}^2, 0) \neq 0.$$

entonces (1.1) tiene al menos una solución $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \subset X$ con $x_i > 0$ para $i = 1, 2$.

- Para probar el resultado principal basta con elegir cierto $\Omega \subset X$ abierto y acotado para el cual se cumplan las hipótesis del teorema de continuación.
- Usando las hipótesis (H1) y (H2) del teorema principal se obtienen cotas a priori, más precisamente

Lema

Si $\mathbf{x}$ es una solución T periódica de (3.1) con $x_i > 0$ para $i = 1, 2$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces existen constantes $\epsilon_0, R_0 > 0$ tales que

- $\boxed{\epsilon_0 < x_i(t) < R_0 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2.}$

- Para probar el resultado principal basta con elegir cierto $\Omega \subset X$ abierto y acotado para el cual se cumplan las hipótesis del teorema de continuación.
- Usando las hipótesis (H1) y (H2) del teorema principal se obtienen cotas a priori, más precisamente

Lema

Si $\mathbf{x}$ es una solución T periódica de (3.1) con $x_i > 0$ para $i = 1, 2$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces existen constantes $\epsilon_0, R_0 > 0$ tales que

- $$\boxed{\epsilon_0 < x_i(t) < R_0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2.}$$

- Para probar el resultado principal basta con elegir cierto $\Omega \subset X$ abierto y acotado para el cual se cumplan las hipótesis del teorema de continuación.
- Usando las hipótesis (H1) y (H2) del teorema principal se obtienen cotas a priori, más precisamente

Lema

Si $\mathbf{x}$ es una solución T periódica de (3.1) con $x_i > 0$ para $i = 1, 2$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces existen constantes $\epsilon_0, R_0 > 0$ tales que

- $\boxed{\epsilon_0 < x_i(t) < R_0 \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.}$

- De las hipótesis del teorema principal también podemos deducir que existen constantes positivas ϵ_i, R_i ($\epsilon_i < \epsilon_0$ y $R_i > R_0$) tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_i$ y $R > R_i$, $i = 1, 2$ entonces
  - $g_1(\epsilon, x_2) < 0, \; g_1(R, x_2) > 0$ para todo $\epsilon \leq x_2 \leq R$.

  y
  - $g_2(x_1, \epsilon) < 0, \; g_2(x_1, R) > 0$ para todo $\epsilon \leq x_1 \leq R$.

- De las hipótesis del teorema principal también podemos deducir que existen constantes positivas ϵ_i, R_i ($\epsilon_i < \epsilon_0$ y $R_i > R_0$) tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_i$ y $R > R_i$, $i = 1, 2$ entonces
  - $\boxed{g_1(\epsilon, x_2) < 0, \; g_1(R, x_2) > 0 \text{ para todo } \epsilon \leq x_2 \leq R.}$

y

  - $\boxed{g_2(x_1, \epsilon) < 0, \; g_2(x_1, R) > 0 \text{ para todo } \epsilon \leq x_1 \leq R.}$

- De las hipótesis del teorema principal también podemos deducir que existen constantes positivas ϵ_i, R_i ($\epsilon_i < \epsilon_0$ y $R_i > R_0$) tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_i$ y $R > R_i$, $i = 1, 2$ entonces
  - $g_1(\epsilon, x_2) < 0, \ g_1(R, x_2) > 0$ para todo $\epsilon \leq x_2 \leq R$.

  y
  - $g_2(x_1, \epsilon) < 0, \ g_2(x_1, R) > 0$ para todo $\epsilon \leq x_1 \leq R$.

- Finalmente si elegimos

$$\boxed{\Omega := \{\mathbf{x} \in X : \epsilon < x_i < R,\ \ i = 1, 2\}}$$

con $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_i,\ \ i = 1, 2\}$ y $R > \max\{R_i,\ \ i = 1, 2\}$ entonces:

1. La familia de problemas T-periódicos (3.1) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap X^1$ para ningún $\lambda \in (0, 1)$ y
2. El grado de $g : \overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está bien definido y $d(g, \Omega, 0) = 1$.

- Luego se verifican las hipótesis (C1) y (C2) del teorema de continuación y de ahí el resultado. ■

- Finalmente si elegimos

$$\boxed{\Omega := \{\mathbf{x} \in X : \epsilon < x_i < R,\ \ i = 1, 2\}}$$

con $0 < \epsilon < \text{mín}\{\epsilon_i,\ \ i = 1, 2\}$ y $R > \text{máx}\{R_i,\ \ i = 1, 2\}$ entonces:

1. La familia de problemas T-periódicos (3.1) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap X^1$ para ningún $\lambda \in (0, 1)$ y
2. El grado de $g : \overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está bien definido y $d(g, \Omega, 0) = 1$.

- Luego se verifican las hipótesis (C1) y (C2) del teorema de continuación y de ahí el resultado. ■

- Finalmente si elegimos

$$\boxed{\Omega := \{\mathbf{x} \in X : \epsilon < x_i < R, \ \ i = 1, 2\}}$$

con $0 < \epsilon < \text{mín}\{\epsilon_i, \ \ i = 1, 2\}$ y $R > \text{máx}\{R_i, \ \ i = 1, 2\}$ entonces:

1. La familia de problemas T-periódicos (3.1) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap X^1$ para ningún $\lambda \in (0, 1)$ y
2. El grado de $g : \overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está bien definido y $d(g, \Omega, 0) = 1$.

- Luego se verifican las hipótesis (C1) y (C2) del teorema de continuación y de ahí el resultado. ■

- Finalmente si elegimos

$$\boxed{\Omega := \{\mathbf{x} \in X : \epsilon < x_i < R,\ \ i = 1, 2\}}$$

con $0 < \epsilon < \text{mín}\{\epsilon_i,\ \ i = 1, 2\}$ y $R > \text{máx}\{R_i,\ \ i = 1, 2\}$ entonces:

1. La familia de problemas T-periódicos (3.1) no tiene soluciones sobre $\partial\Omega \cap X^1$ para ningún $\lambda \in (0, 1)$ y
2. El grado de $g : \overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está bien definido y $d(g, \Omega, 0) = 1$.

- Luego se verifican las hipótesis (C1) y (C2) del teorema de continuación y de ahí el resultado. ■

Referencias

AD Amster P. , Déboli A. Existence of positive T-periodic solutions of a generalized Nicholson's blowflies model with a nonlinear harvesting term. Applied Mathematics Letter. Vol 25 Issue 9 Septiembre 2012 pg. 1203/ 1207.

BBI L. Berezansky, E. Braverman, L. Idels, Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. Applied Mathematical Modelling 34 (6) 1405-17.

ZLI Kaihong Zhao and Yongkun Li. Four positive periodic solutions to two species parasitical system with harvesting terms. ELSEVIER Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 2703-2710

Muchas gracias por la atención !