ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS – Fa.M.A.F. – Año 2016

Práctico 1: Números complejos.

1. Demostrar las siguientes propiedades de los números complejos.
   (i) $z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw)$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
   (ii) Si $z = x + y\,i$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $z\overline{z} = x^2 + y^2$.
   (iii) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
   (iv) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
   (v) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
   (vi) $|z\,w| = |z||w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.
   (vii) $|\overline{z}| = |z|$.

2. Encontrar las partes real e imaginaria de:

   (i) $\dfrac{1}{z}$
   (ii) $\dfrac{z-a}{z+a}, \ a \in \mathbb{R}$
   (iii) z^3
   (iv) $\dfrac{3+5\,i}{7\,i+1}$
   (v) $\dfrac{1}{(i-1)(2+3i)}$
   (vi) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$
   (vii) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$
   (viii) $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$, $2 \leq n \leq 8$

3. Encontrar conjugado, valor absoluto y argumento de los siguientes números complejos:

   (i) $-2+i$
   (ii) -3
   (iii) $(2+i)(4+3i)$
   (iv) $\dfrac{3-i}{\sqrt{2}+3i}$
   (v) $i^{17} - i^3 + 2$
   (vi) $(1+i)^6$

4. Sea $z \in \mathbb{C}$. Probar las siguientes afirmaciones
   (i) z es un número real si y sólo si $z = \overline{z}$.
   (ii) z es un número imaginario puro si y sólo si $z = -\overline{z}$.

5. Sean $z, w \in \mathbb{C}$.
   (i) Probar que $||z| - |w|| \leq |z - w|$. Dar condiciones necesarias y suficientes para que valga la igualdad.
   (ii) Probar que $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

6. Sean z_1, z_2, z_3 y $z_4 \in \mathbb{C}$. Probar que si $|z_3| \neq |z_4|$, entonces
$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

7. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.
   (i) $z^2 - i = 0$.
   (ii) $z^3 = i$.
   (iii) $z^2 - 2i = 0$.
   (iv) $z^2 = \sqrt{3} + 3i$.
   (v) $z^3 + 1 = 0$.
   (vi) $z^6 = 1$.
   (vii) $z^5 - 32 = 0$.
   (viii) $z^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de la unidad, $z \neq 1$, entonces $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$ (en particular, esto ocurre si $z = \operatorname{cis}(\frac{2\pi}{n})$).

9. Graficar en el plano complejo los conjuntos donde z satisface:
   (i) $|z| = 1$.
   (ii) $|z - 1 + i| < 2$.
   (iii) $|z + i| \geq 1$
   (iv) $|2z - i| = 4$.
   (v) $\operatorname{Im} z = 0$.
   (vi) $|3z + 2| < 1$.
   (vii) $|\overline{z} - i| = 2$.
   (viii) $\dfrac{1}{|z|} > 3$.
   (ix) $\operatorname{Im}(z) \geq 2$ y $\operatorname{Re}(z^2) > 0$.
   (x) $\operatorname{Im}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 0$.

10. Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.
    (i) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$
    (ii) $\dfrac{3}{(\sqrt{3} - i)^2}$
    (iii) $(1 + i)^3$
    (iv) $i^5 \cdot i^3$

11. Probar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ vale: (a) $|e^{i\theta}| = 1$, (b) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

12. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos.
   (i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : 0 < \arg z \leq \pi\}$.
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |z| \geq 2$ y $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : \frac{\pi}{4} < \arg(-iz) < \frac{\pi}{2}\}$.
   (iv) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |z| < 3$ y $0 \leq \arg(z^4) \leq \frac{\pi}{6}\}$.

13. Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.

14. Sea $r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Mostrar que la ecuación $|z - z_0| = r$ del círculo de centro z_0 y radio r puede escribirse como $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = r^2$.

15. Probar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede ser escrita en la forma $z^2 + \overline{z}^{\,2} = 2$.

16. Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, decir qué curvas describen los siguientes conjuntos:
   (i) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| + |z + 4i| = 10\}$,
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + i|\}$.

17. Sean a, $c \in \mathbb{R}$ fijos, con $a > 0$. Dar el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$|z - c| - |z + c| = 2a.$$

Ejercicios adicionales

18. Sean z, $w \in \mathbb{C}$. Probar que
   (i) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.
   (ii) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.
   (iii) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (Regla del Paralelogramo).

19. Probar usando inducción que:
   (i) $|w_1 \cdots w_n| = |w_1| \cdots |w_n|$.
   (ii) $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$.
   (iii) $\overline{w_1 \cdots w_n} = \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}$.

20. Sea $R(z)$ una función racional de z con coeficientes en $\mathbb{R}$. Probar que $\overline{R(z)} = R(\overline{z})$.

21. Una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad en $\mathbb{C}$ es un número complejo z tal que $z^n = 1$ y $z^j \neq 1$ para todo j con $0 < j < n$. Mostrar que si z y w son raíces n-ésima y m-ésima primitivas de la unidad, respectivamente, entonces zw es una raíz k-ésima de la unidad para algún entero k. ¿Cuál es el valor más pequeño de k? ¿Qué podemos decir si z y w son raíces no primitivas de la unidad?

22. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z^n) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que z es un número real no negativo.