ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS – Fa.M.A.F. – Año 2016

Práctico 2: Topología de los números complejos.

1. Representar gráficamente los siguientes conjuntos y determinar cuáles son abiertos, cerrados o acotados.
   (i) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (2+i)| \leq 1\}$
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 3\}$
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} : |2z+5| > 2\}$
   (iv) $\{z \in \mathbb{C} : |z-4| \geq |z|\}$
   (v) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : 0 < \arg z < \pi/4\}$
   (vi) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : \pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2\}$

2. Hallar la clausura de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$ y dibujarlas.
   (i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : -\pi < \arg z < \pi\}$
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < |z|\}$
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \leq \frac{1}{2}\}$
   (iv) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$
   (v) $\{z = x + yi \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}\}$
   (vi) $\{z = x + yi \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}\}$

3. Sea A el conjunto de todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| < 1$ o $|z-2| < 1$. Mostrar que A no es conexo.

4. Determinar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:
   (i) $\{1, -1, i, -i\}$.
   (ii) $\{\frac{i^n}{n} : n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$.
   (iii) $\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1+i) : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Demostrar las afirmaciones siguientes:
   (i) Un conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y sólo si S contiene todos sus puntos de acumulación.
   (ii) Un conjunto $B \subseteq \mathbb{C}$ es no acotado si y sólo si todo entorno del punto ∞ contiene al menos un punto de B.