ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS – Fa.M.A.F. – Año 2016

Práctico 3: Funciones analíticas.

1. Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y expresarlas en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

   (i) $f(z) = z^2 + z - 1$

   (ii) $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

   (iii) $h(z) = z + \dfrac{1}{z}$

   (iv) $j(z) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   (v) $k(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$

2. (i) Demostrar usando la definición de límite que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}^{\,2}}{z} = 0$.

   (ii) Determinar si existe $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$.

3. Hallar los siguientes límites:

   (i) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z + i}$ (ii) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{4z^2}{(z-1)^2}$ (iii) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2 + 1}{z + 1}$

4. Probar que no existe
$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2.$$
   Sugerencia: Aproximarse a 0 de dos maneras distintas, una por puntos de la forma $z = t \in \mathbb{R}$, y la otra por puntos de la forma $z = t + it,\ t \in \mathbb{R}$.

5. Determinar, usando la definición de derivada, dónde existe $f'(z)$ y calcularla:

   (i) $f(z) = \operatorname{Im} z$ (ii) $f(z) = |z|^2$ (iii) $f(z) = \bar{z}$

6. Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para calcular $f'(z)$, en caso de que exista.

   (i) $f(z) = iz + 2$

   (ii) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$

   (iii) $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

   (iv) $f(z) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

7. Sea $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \notin D$. Introduciendo coordenadas polares (r, θ) en D, se tiene las nuevas funciones
$$U(r, \theta) := u(r\cos(\theta), r\ \operatorname{sen}(\theta)), \quad V(r, \theta) := v(r\cos(\theta), r\ \operatorname{sen}(\theta)),$$

de manera que $f(re^{i\theta}) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$.

(i) Usar la regla de la cadena para mostrar que las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en $z \in D$ si y sólo si lo mismo sucede para U y V.

(ii) Probar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D si y sólo si U y V satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann polares* en D:

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} U_\theta = -V_r.$$

(iii) Mostrar que si se cumplen las condiciones anteriores, entonces para $z = re^{i\theta} \in D$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\big(U_r(r,\theta) + iV_r(r,\theta)\big) \\ &= \frac{1}{r} e^{-i\theta}\big(V_\theta(r,\theta) - iU_\theta(r,\theta)\big). \end{aligned}$$

8. Verificar que las siguientes son funciones armónicas en sus dominios y hallar una armónica conjugada cuando sea posible:

(i) $u(x,y) = 2x(1-y)$,

(ii) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$,

(iii) $u(x,y) = \text{senh}(x)\text{sen}(y)$,

(iv) $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

9. Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Probar que cualquiera de las condiciones siguientes implica que f es constante en D.

(i) $f(z) \in \mathbb{R}$, para todo $z \in D$.

(ii) $\text{Re}(f(z)) = c$, para todo $z \in D$, donde $c \in \mathbb{R}$ fijo.

(iii) $|f(z)| = cte$, para todo $z \in D$.

10. Sea la función $f(z) = \frac{1}{z}$.

(i) Determinar la imagen por f de los siguientes conjuntos:

1) el círculo de radio r centrado en 0.

2) el círculo de radio $|a|$ centrado en a, con $a \in \mathbb{R}$.

3) el sector anular $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 5\}$.

4) el sector $\{z : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(ii) Dibujar las curvas $|f(z)| =$ constante y $\text{Arg}(f(z)) =$ constante y verificar que son ortogonales donde se intersecan.

11. Sea la función $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

    (i) Determinar y dibujar $f(C_r)$, donde C_r es un círculo de radio $r > 0$ centrado en $z = 0$.

    (ii) Idem para $f(A)$, donde A es el semianillo circular $A = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi,\ 1 \leq r \leq b\}$, con $b \geq 1$.

    (iii) Determinar y dibujar $f^{-1}(\{w : \text{Im}\, w \geq 0\})$.