ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS – Fa.M.A.F. – Año 2016

Práctico 4: Funciones elementales.

1. Demostrar las siguientes igualdades:
   (i) $\exp(2 - 3\pi i) = -e^2$.
   (ii) $\exp(\frac{2+i\pi}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i)$.
   (iii) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$.

2. Hallar los valores de z que satisfacen:

   (i) $e^z = -2$.
   (ii) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.
   (iii) $e^{2z-1} = 1$.
   (iv) $|e^{(-2z)}| < 1$.
   (v) $\mathrm{Re}(e^z) = 0$.
   (vi) $\mathrm{Im}(e^z) = 0$.

3. Probar que $f(z) = \exp(\overline{z})$ no es analítica en ningún punto.

4. Graficar la imagen por $\exp$ de los siguientes conjuntos:
   (i) $\mathrm{Re}(z) = a$, con $a \in \mathbb{R}$ constante.
   (ii) $a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.
   (iii) $\mathrm{Im}(z) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.
   (iv) $c \leq \mathrm{Im}(z) \leq d$, con $c, d \in \mathbb{R}$ constantes.
   (v) $R = \{z \mid A \leq \mathrm{Re}(z) \leq B,\ C \leq \mathrm{Im}(z) \leq D\}$.
   (vi) la recta $y = ax$, ($a \neq 0$).

5. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   (i) $\cos z = 2$.
   (ii) $\cos z = 0$.
   (iii) $\operatorname{sen} z = 2$.
   (iv) $\operatorname{sen} z = \cos z$.

6. Demostrar las siguientes identidades:
   (i) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (ii) $\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \cos z$.
   (iii) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$.
   (iv) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$.

7. Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

   (i) $\cosh z = 1/2$. (ii) $\operatorname{senh} z = i$. (iii) $\cosh z = -2$.

8. (*) Considere la función $f(z) = \operatorname{sen} z$, y la región del plano complejo dada por

$$B = \{z = x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ y \geq 0\}.$$

   (i) Verificar que f manda la frontera de B inyectivamente sobre el eje real $\operatorname{Im}(z) = 0$.
   (ii) Calcular y graficar las imágenes por f de una semirrecta vertical $x = c$, $y \geq 0$, interior a la banda $\{x + iy : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$.
   (iii) Probar que f manda B inyectivamente en la clausura del semiplano superior.
   (iv) ¿Cuál es la imagen por f de una región rectangular $-\pi \leq x \leq \pi$, $a \leq y \leq b$ ubicada en el semiplano superior?

9. Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann polares para probar que $\log$ es analítica en $\mathbb{C} - \ell$, siendo ℓ una semirrecta con origen en $z = 0$.

10. Sea Log el logaritmo principal. Probar que:
   (i) $\operatorname{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$.
   (ii) $\operatorname{Log}(1 - i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$.
   (iii) $\operatorname{Log}[(1 + i)^2] = 2\operatorname{Log}(1 + i)$.
   (iv) $\operatorname{Log}[(-1 + i)^2] \neq 2\operatorname{Log}(-1 + i)$.

11. Sea $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo par de números complejos z_1, $z_2 \in G$ tales que $z_1 \cdot z_2 \in G$, se cumple la identidad

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2N\pi i,$$

   con $N \in \{-1, 0, 1\}$. Probar que si z_1 y z_2 pertenecen al primer cuadrante entonces $N = 0$.

12. La función $\operatorname{Log}(z-i)$ es analítica en todas partes excepto en la semirecta $\{z = x+i\ :\ x \leq 0\}$.

13. Hallar *todos* los valores de

   (i) $(1 + i)^i$. (ii) $(-1)^{1/\pi}$.

14. Hallar el valor principal de

   (i) i^{-i}. (ii) $[(e/2)(-1 - \sqrt{3}i)]^{3\pi i}$. (iii) $(1 - i)^{4i}$.

Ejercicios adicionales

15. Calcular los siguientes conjuntos:

(i) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, e^z = i\}$.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, e^z = -1\}$.

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, e^z = -i\}$.

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \cos(z) = 0\}$.

(v) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{sen}(z) = 0\}$.

(vi) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \tanh(z) = 0\}$.

16. Para cada $r > 0$ fijo determinar el conjunto $\{\exp(\frac{1}{z}) \,|\, 0 < |z| < r\}$.

17. Sean $z := re^{i\theta}$ y $z_n := r_n e^{i\theta_n}$, con $-\pi \leq \theta, \theta_n \leq \pi$, $r, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ y $n \in \mathbb{N}$, elementos en $G := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}$ tales que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$ y que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$.

18. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definamos $\arg(z)$ como el único $\theta \in \mathbb{R}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que $z = re^{i\theta}$ para algún $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Mostrar que $\arg(z)$ no es continua.

19. Probar que no existe una rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

20. Mostrar que la parte real de la rama principal de la función $z^{\frac{1}{2}}$ es siempre positiva.

21. Dar la rama principal de $\sqrt{1-z}$.