ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS – Fa.M.A.F. – Año 2016

Práctico 5: Integración.

1. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{(i)} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt \qquad\qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2ti}\, dt$$

2. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$.

   (i) Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$

   (ii) Calcular $\int_C z^m z^{-n} dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$, recorrido en sentido antihorario.

3. Sea $f(z) = y - x - 3x^2 i$. Calcular $\displaystyle\int_C f(z)dz$, donde:

   (i) C es el segmento de recta que une $z_1 = 0$ con $z_2 = 1 + i$.

   (ii) $C = [0, i] \cup [i, 1 + i]$.

4. Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z}\, dz$, donde C es:

   (i) la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

   (ii) la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

   (iii) la circunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5. Sea $f(z) = e^z$. Calcular $\int_C f(z)dz$, donde C es el arco que va de $z_1 = \pi i$ a $z_2 = 1$ por:

   (i) el segmento de recta que une esos puntos.

   (ii) la porción de los ejes coordenados que unen esos puntos.

6. Sea C la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ recorrida en sentido antihorario. Probar que:

$$\text{(i)} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad\qquad \text{(ii)} \int_C (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0 \;\; (n \in \mathbb{Z} - \{0\}).$$

7. Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$. Probar que para todo camino C contenido en $\mathrm{Dom}(z^n)$ que vaya de un punto z_1 a un punto z_2 vale

$$\int_C z^n\, dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

8. Calcular las siguientes integrales, donde el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración.

   (i) $\displaystyle\int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z}\,dz,$

   (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos(\frac{z}{2})\,dz,$

   (iii) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,dz,$

   (iv) $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} \operatorname{senh} 3z\,dz.$

9. Sea C el cuadrado cuyos lados están determinados por las líneas $x=\pm 2$, $y=\pm 2$ recorrido en sentido antihorario. Calcular las integrales siguientes:

   (i) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}dz}{z-\frac{i\pi}{2}},$

   (ii) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz,$

   (iii) $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z+1}\,dz,$

   (iv) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz.$

10. Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del circulo $|z-i|=2$ recorrido en sentido positivo en los casos:

    (i) $g(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$

    (ii) $g(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$

11. Sea C la circunferencia $|z|=3$, recorrida en sentido antihorario. Probar que si

$$g(w)=\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w}\,dz, \qquad |w|\neq 3,$$

    entonces $g(2)=8\pi i$. ¿Cuánto vale $g(w)$ cuando $|w|>3$?

12. Sea la circunferencia unidad $z=e^{i\theta}$, $\theta\in[-\pi,\pi]$.

    (i) Probar que para cualquier $a\in\mathbb{R}$ vale:

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\,dz = 2\pi i.$$

    (ii) Escribir la integral anterior en términos de θ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\operatorname{sen}\theta)\,d\theta=\pi.$$

13. Sea f continua en una región cerrada y acotada R, siendo analítica y no constante en su interior. Suponiendo que $f(z) \neq 0$ en todo R, demostrar que $|f(z)|$ tiene un mínimo el que se alcanza en la frontera de R, y nunca en su interior.
    Encuentre un ejemplo en donde se demuestre que la hipótesis $f(z) \neq 0$ es necesaria.

14. Considere $f(z) = (z+1)^2$ y la región triangular cerrada R con vértices en $z = 0$, $z = 2$ y $z = i$. Hallar los puntos de R donde $|f(z)|$ alcanza su máximo y su mínimo.

15. Sea f entera y supongamos que $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy))$ está acotada superiormente. Probar que f es constante. *Ayuda*: Aplicar el Teorema de Liouville a $g(z) = \exp(f(z))$.

Ejercicios adicionales

16. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{i\,nt}$. Mostrar que $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i n$.

17. Calcular
    (i) $\int_\gamma z^n dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it}$.
    (ii) $\int_\sigma \frac{dz}{z}$, donde σ es el polígono $[1 - i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i]$.

18. Calcular $\int_\gamma (z^2 - 1)^{-1} dz$ cuando:
    (i) $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
    (ii) $\gamma(t) = 2e^{it}$, $-\pi \le t \le \pi$.

19. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos en un conjunto abierto G. Mostrar que para todo $a \notin G$ y para todo $n \ge 2$, $\int_\gamma (z - a)^{-n} dz = 0$.

20. Evaluar las siguientes integrales.
    (i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \qquad$ con $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
    (ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z - a}, \qquad$ con $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
    (iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z^3} dz, \qquad$ con $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

21. Seas $p(z)$ un polinomio de grado n y $R > 0$ suficientemente grande de forma tal que p no se anula en $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \ge R\}$. Mostrar que si $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces
$$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

22. Sea f analítica en $D = B(0, 1)$ y supongamos que $|f(z)| \le 1$, para $|z| < 1$. Mostrar que $|f'(0)| \le 1$.

23. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, para cada $n \in \mathbb{N}$.