Sistemas de amortización

1. Introducción

Un sistema de amortización es un método por el cual un capital cedido en préstamo es devuelto por una sucesión de pagos o cuotas. Estas cuotas periódicas constituyen una renta cuyo valor actual debe ser igual al préstamo otorgado.

Se puede suponer que cualquier sistema de amortización es una anualidad o renta con pagos vencidos, ya que si la primera cuota se pagara al momento del préstamo sería equivalente a considerar un préstamo de menor valor con cuotas vencidas. Entonces, si el préstamo es por un monto V y las cuotas de devolución son c_1, c_2, $\cdots$, c_n, entonces el valor actual de dicha renta al momento del préstamo deberá ser V.

Existen diferentes sistemas de amortización. Dos de los más sistemas más conocidos son el *sistema alemán*, que utiliza cuotas variables, decrecientes en forma aritmética, y el *sistema francés* en el cual la deuda se amortiza con cuotas constantes.

1.1. Características de un sistema de amortización

Consideraremos sistemas de amortización en el cual el préstamo V es devuelto en n cuotas equiespaciadas en el tiempo: $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Tomaremos como unidad de tiempo el lapso entre dos cuotas consecutivas, y como origen del tiempo al momento del préstamo. Así el préstamo está ubicado en $t = 0$ y la k-ésima cuota c_k en $t = k$.

Denotaremos con i a la tasa de interés efectiva en el período unitario de tiempo.

Cada cuota del sistema de amortización se compone de dos partes:

$$c_k = v_k + s_k,$$

donde v_k se denomina *cuota de amortización real* y s_k es la *cuota de interés*. La suma de las n cuotas de amortización real es igual al valor del préstamo:

$$V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

mientras que las cuotas de interés se calculan como el interés sobre las cuotas de amortización aún no pagadas: $s_k = i \cdot (v_k + \cdots + v_n)$.

Esto significa que en cada cuota el deudor paga una parte del capital prestado, v_k, y los intereses sobre el capital aún adeudado, s_k.

En particular, al momento de haber pagado la k-ésima cuota, el monto adeudado del préstamo es

$$V - (v_1 + v_2 + \cdots + v_k) = v_{k+1} + \cdots + v_n, \qquad 1 \leq k < n,$$

y esto coincide con el valor actual de las cuotas que restan pagar:

$$\mathrm{VA}_k = c_{k+1}\frac{1}{1+i} + c_{k+2}\Big(\frac{1}{1+i}\Big)^2 + \cdots + c_n\Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{n-k}.$$

Cabe destacar que la renta finaliza al momento del pago de la última cuota de amortización real, ya que de esta manera se completa el pago del préstamo V y por ende no hay más intereses por cobrar.

Ejemplo 1.1. Supóngase un préstamo de \$1.000 que se amortiza en tres cuotas cada 30 días, y cuyas cuotas de amortización real son de \$300, \$300 y \$400 respectivamente, y la tasa de interés efectiva mensual es del 2 %.

Las cuotas a pagar estará conformadas de la siguiente manera:

Cuota k	Amortización real v_k	Cuota de interés s_k	Cuota c_k	Saldo adeudado VA_k
1	\$300	\$20($1.000 \cdot 0{,}02$)	\$320	\$700,00.
2	\$300	\$14($700 \cdot 0{,}02$)	\$314	\$400,00.
3	\$400	\$8($400 \cdot 0{,}02$)	\$408	\$0,00.

Como ejemplo, la fila correspondiente a la cuota 2 debe leerse así: *en la cuota 2, paga \$300 de amortización real más \$14 de interés, por lo que la cuota es de \$314. El saldo adeudado luego de pagar la cuota resulta de \$400.*

El valor actual de la renta al momento del préstamo es

$$\mathrm{VA}_0 = 320 \cdot \frac{1}{1{,}02} + 314 \cdot \frac{1}{1{,}02^2} + 408 \cdot \frac{1}{1{,}02^3} = 1000,$$

es decir el monto total del préstamo. El valor actual de la renta calculado inmediatamente después de pagar la primera cuota es:

$$\mathrm{VA}_1 = \frac{314}{1{,}02} + \frac{408}{1{,}02^2} = 700,$$

es decir, el saldo adeudado a ese momento.

1.2. Sistema alemán.

El sistema alemán es un sistema de amortización donde las cuotas de amortización reales son todas iguales. Es decir, si se prevén n cuotas, entonces cada cuota de amortización real es igual a

$$v_k = \frac{V}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por lo tanto, el interés que se paga en cada cuota está dado por

$$s_k = i \cdot (v_k + \cdots + v_n) = i \cdot (n + 1 - k) \cdot \frac{V}{n}.$$

Como se puede observar, los valores s_1, s_2, $\ldots$, decrecen en forma aritmética:

$$s_{k+1} = s_k - i\frac{V}{n}.$$

Como las cuotas de amortización son constantes, esto implica que las cuotas del sistema de amortización, c_k, también decrecen en forma aritmética: $c_{k+1} = c_k - i\,V/n$. Dado que la primera cuota es igual a la cuota de amortización más el interés sobre todo el préstamo:

$$c_1 = \frac{V}{n} + i \cdot V,$$

y las cuotas disminuyen en $i\,\frac{V}{n}$, se sigue que las siguientes cuotas están dadas por

$$\begin{aligned} c_k &= c_1 - (k-1) \cdot i\,\frac{V}{n} \\ &= \frac{V}{n}\big(1 + i\,(n - k + 1)\big), \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Se puede ver además para este caso particular, que la renta determinada por las cuotas c_1, $c_2, \dots, c_n$ es un sistema de amortización, es decir que el valor actual de las mismas al momento del préstamo es igual al préstamo V. En efecto, teniendo en cuenta la fórmula para el cálculo del valor actual de una renta en progresión aritmética con cuotas vencidas con cuota inicial $c = \frac{V}{n} + i\,V$ y razón de progresión $h = -i\,\frac{V}{n}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_0 &= \big(\frac{V}{n} + i\,V\big)\,a_{\overline{n}|i} - i\,\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n}|i} - n\cdot(1+i)^{-n}}{i}\right)\\
&= \frac{V}{n}\,a_{\overline{n}|i} + i\,V\,a_{\overline{n}|i} - \frac{V}{n}\,a_{\overline{n}|i} + V\,(1+i)^{-n}\\
&= V\,\big((1+i)^{-n} + i\,a_{\overline{n}|i}\big) = V.
\end{aligned}$$

Es decir, el valor actual de la renta es igual al préstamo otorgado.

Con el mismo razonamiento se puede ver que el valor actual en $t = k$ de la anualidad compuesta por las cuotas $c_{k+1}, c_{k+2}, , \dots, c_n$ es igual a la parte del préstamo aún no amortizado. Esto es

$$\mathrm{VA}_k = v_{k+1} + v_{k+2} + \cdots + v_n.$$

En efecto, en $t = k$ resta el pago de $n - k$ cuotas que conforman una renta en progresión aritmética, con razón $h = -i\,V/n$ y primer término c_{k+1}. Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_k &= c_{k+1}\cdot a_{\overline{n-k}|i} - i\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n-k}|i} - (n-k)(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right)\\
&= \big(\frac{V}{n} + i\,(n-k)\,\frac{V}{n}\big)\,a_{\overline{n-k}|i} - \frac{V}{n}\,a_{\overline{n-k}|i} + \frac{V}{n}\,(n-k)\,(1+i)^{-(n-k)}\\
&= (n-k)\,\frac{V}{n}\big(a_{\overline{n-k}|i}i + (1+i)^{-(n-k)}\big)\\
&= (n-k)\,\frac{V}{n}
\end{aligned}$$

.

Tenemos entonces que el sistema alemán cumple con las propiedades de un sistema de amortización. Una característica de este sistema es que las cuotas son decrecientes. Esto tiene la desventaja de que las primeras cuotas son de mayor valor monetario, y por lo tanto más difíciles de afrontar para el deudor. Una alternativa que suele usarse es modificar el sistema alemán variando la tasa de interés. Así, se calculan primero los valores de las cuotas para una tasa baja de interés, y luego de pagar algunas cuotas se refinancia la deuda con una tasa de interés más alta.

Ejemplo 1.2. Supóngase un préstamo por \$10.000 a pagar en cuatro cuotas, aplicando el sistema alemán con una tasa de interés del 2 % para las dos primeras cuotas y del 4 % para las dos últimas.

Para las dos primeras cuotas se tiene:

$$c_1 = 2.500 + 200 = 2.700, \qquad c_2 = 2.700 - 0{,}02 \cdot 2.500 = 2.650.$$

El saldo adeudado al finalizar la segunda cuota es de \$5.000, y la refinanciación implica que las próximas cuotas serán $c_3 = 2.500 + 0{,}04 \cdot 5.000 = 2.700$ y $c_4 = 2.700 - 0{,}04 \cdot 2500 = 2.600$.

La anualidad de cuotas \$2.700, \$2.650, \$2.700, \$2.600 tiene un valor actual próximo a \$10.000 si se utiliza una tasa de interés constante del 2,6 %. Sin embargo, si se aplica el sistema alemán con una tasa fija del 2,6 %, las dos primeras cuotas serían iguales a

$$c_1 = 2.500 + 260 = 2.760, \qquad c_2 = 2.760 - 0{,}026 \cdot 2.500 = 2.695,$$

algo superiores al sistema que utiliza dos tasas.

Otra alternativa es la aplicación del sistema francés, como veremos en la siguiente sección.

1.3. Sistema francés

El sistema francés es un sistema de amortización en el cual las n cuotas a pagar son todas iguales: es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$.

Para determinar el valor de c, tendremos en cuenta que el valor actual de la renta debe ser igual al préstamo V. Por otro lado, utilizando la fórmula de actualización de una renta con cuotas constantes y vencidas, este valor actual debe ser $c \cdot a_{\overline{n}|i}$. Por lo tanto:

$$c = \frac{V}{a_{\overline{n}|i}} = V \, \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

Como hemos visto, cada cuota de la renta se compone de una cuota de amortización real v_k y una cuota de interés s_k. La cuota v_k es la parte del capital adeudado que se salda en el instante

$t = k$. Así, si denotamos con VA_k el valor actual de la renta en $t = k$, entonces

$$\begin{aligned} v_k &= \mathrm{VA}_{k-1} - \mathrm{VA}_k = c \cdot \left(a_{\overline{n-k+1}|i} - a_{\overline{n-k}|i}\right) \\ &= \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} \, \frac{\left(1 - (1+i)^{-(n+1-i)}\right) - \left(1 + (1+i)^{-(n-i)}\right)}{i} \\ &= \frac{V}{1 - (1+i)^{-n}} \, (1+i)^{-(n-i)} \left(1 - (1+i)^{-1}\right) \end{aligned}$$

y usando que $1 - (1+i)^{-1} = \frac{i}{1+i}$ concluimos que

$$v_k = \frac{V \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} \, (1+i)^{-(n+1-k)} = c \cdot (1+i)^{-(n+1-k)}.$$

Además, puesto que $c = v_k + s_k$ se sigue que

$$s_k = c \cdot (1 - (1+i)^{-(n+1-k)}).$$

Notemos que la sucesión de cuotas de amortización reales v_k es creciente ($1 \leq k \leq n$) mientras que s_k es decreciente.

Naturalmente, el valor actual de esta renta es V (pues de esa manera ha sido elegido c), y el valor final VF al momento del pago de la última cuota es

$$VF = c \cdot s_{\overline{n}|r} = \frac{V \cdot r}{1 - (1+i)^{-n}} \, \frac{(1+i)^n - 1}{i} = V \cdot (1+i)^n.$$

Concluimos esta sección con un par de ejemplos que muestran la amortización de un préstamo según el sistema alemán y el francés respectivamente.

Ejemplo 1.3. Un préstamo de \$1000000 es amortizable en 5 años, con el 15 % de interés anual sobre saldos. Los siguientes cuadros resumen los pagos a efectuar según los sistemas alemán y francés respectivamente.

Cuadros de amortización. Los siguientes cuadros de amortización muestran el valor de las cuotas a pagar según cada sistema, la composición de las mismas, y el saldo adeudado al comienzo del período.

Puede observarse que las primeras cuotas son mayores para el caso del sistema alemán, y esta relación se invierte en las últimas cuotas.

□

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1000000	150000	200000	350000
2	800000	120000	200000	320000
3	600000	90000	200000	290000
4	400000	60000	200000	260000
5	200000	30000	200000	230000
suma		450000	1000000	1450000

Figura 1: Sistema Alemán

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1000000	150000	148315,55	298315,55
2	851684,45	127752,67	170562,89	298315,55
3	681121,56	102168,23	196147,32	298315,55
4	484974,24	72746,14	225569,42	298315,55
5	259404,83	38910,72	259404,83	298315,55
suma		491577,76	1000000	1491577,76

Figura 2: Sistema Francés

2. Sistema Americano y Fondo de amortización

El *sistema americano* es un sistema de amortización de n cuotas en las que las $n-1$ primeras están constituidas únicamente por intereses, y en la última se devuelve el total del préstamo adeudado más los intereses correspondientes al último período. De esta forma, si el valor del préstamo es V y la tasa efectiva en cada período es i, entonces las $n-1$ primeras cuotas son:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = V\, i,$$

y la última cuota es $c_n = V + V\, i = V\,(1+i)$.

Notemos que en este sistema la última cuota es considerablemente elevada, ya que su valor es aún mayor que el monto total del préstamo. Por lo tanto, este sistema se suele combinar con una serie de depósitos en un *fondo de amortización*. Esto es, al mismo tiempo que el deudor devuelve las cuotas de interés, aporta al fondo una sucesión de pagos iguales de modo que se forme finalmente un capital equivalente al préstamo. Estas cuotas están sujetas a una tasa de interés i', usualmente distinta e inferior a i. Si llamamos f a las cuotas del fondo de amortización, entonces se debe cumplir que

$$f\, s_{\overline{n}|i'} = V, \qquad \text{es decir} \qquad f = \frac{V}{s_{\overline{n}|i'}}.$$

En un sistema americano combinado con el fondo de amortización, el deudor pagará una renta de n cuotas constantes iguales a $f + V\, i$, donde las cuotas f reconstruyen el préstamo. Cabe entonces preguntarse cuál es la diferencia entre el sistema americano y el sistema francés, el cual también asume cuotas constantes.

2.1. El sistema francés vs. el sistema americano

Sea i la tasa de interés por período sobre una deuda de valor V, tanto para el sistema francés como para el sistema americano, y sea i' la tasa de interés para la formación del fondo de amortización. Sea n el número de cuotas.

Según el sistema francés, cada cuota es igual a

$$C_1 = \frac{V}{a_{\overline{n}|i}} = V\, i + \frac{V}{s_{\overline{n}|i'}},$$

y en el sistema americano las cuotas son iguales a

$$C_2 = V\,i + \frac{V}{s_{\overline{n}|i'}}.$$

Podemos concluir entonces que si $i > i'$, entonces $s_{\overline{n}|i} > s_{\overline{n}|i'}$ y $C_1 < C_2$. Luego es preferible el sistema francés. Si ambas tasas son iguales: $i = i'$, entonces ambos sistemas son equivalentes; y si $i' > i$, entonces es conveniente el sistema americano.

En la práctica, las tasa de interés para préstamos son superiores a las tasas de interés para depósitos. Por lo tanto es conveniente para el deudor un sistema de amortización francés.

Ejemplo 2.1. Una empresa puede pedir un préstamo de \$200.000 a 15 años. Para devolver la misma, tiene dos posibilidades:

1. Amortizar la deuda con cuotas anuales constantes a una tasa del 11 %.

2. Pagar los intereses por el préstamo a una tasa anual del 10,5 % y establecer un fondo de amortización con tasa anual del 7,5 %.

¿Cuál opción es más conveniente?

Solución. En este caso el interés sobre la deuda es diferente según se aplique el sistema francés o el sistema americano. Por lo tanto debemos calcular las cuotas en cada caso.

Para el sistema francés, cada una de las 15 cuotas anuales deberá ser igual a

$$C_1 = \frac{\$200\,000}{a_{\overline{15}|0,11}} = \$27{,}813,05.$$

Para el sistema americano, las cuotas de interés serán de \$200.000 (1,105)=\$21 000 y el depósito anual para el fondo de amortización será de

$$\frac{\$200\,000}{s_{\overline{15}|0,075}} = \$7\,657{,}45.$$

Por lo tanto la empresa deberá aportar anualmente una cuota de \$28.657,45.

□