

# Matemática Financiera

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2009

# Presentación de la materia

- **Matemática financiera:** ambiente de certidumbre.
  - Operaciones financieras.
  - Capitalización simple y compuesta
  - Interés, capital, tasas de interés, tasas equivalentes, . . . .
  - Anualidades o rentas.
  - Sistemas de amortización.
- **Finanzas:** ambiente de incertidumbre.
  - El mercado financiero.
  - Bonos, acciones, derivados financieros.
  - Opciones.
  - Modelos probabilísticos: Árboles.
  - Caso continuo: el modelo de Black-Scholes.

# Un poco de historia

## Definición (Operación financiera)

Una operación financiera es un préstamo, en el que un *prestamista* entrega a un *prestatario* una cierta cantidad de dinero, a cambio de que este último lo devuelva al cabo de un cierto tiempo con un recargo o *interés*.

- ¿Por qué en una operación financiera se cobra un interés?
- ¿Siempre se beneficia el prestamista?
- ¿Por qué el prestatario acepta estas condiciones?

# Un poco de historia

Irving Fisher (1867-1947): *Teoría del Interés* (1930), expuso las razones que fundamentan la exigencia del cobro de intereses

- Utilidad de un bien de consumo.
- La utilidad marginal es una función decreciente y cóncava.
- El prestamista exige el interés a cambio de la utilidad perdida.
- El prestatario se beneficia del préstamo, aún pagando un cierto interés.

# Elementos de una operación financiera

En una operación financiera simple se distinguen los siguientes elementos:

- $C = C(0)$ : El *capital inicial* en préstamo.
- $t$ : El *tiempo* de la operación.
- $C(t)$ : El *capital final* devuelto.
- $I$ : El *interés* cobrado en la operación.
- $i$ : La *tasa o tipo de interés*.

# El interés y la tasa de interés

- El interés es la diferencia entre el capital devuelto y el capital prestado.
- Se expresa en unidades monetarias.

$$I = C(t) - C$$

- La tasa de interés es el interés cobrado por unidad de capital en una unidad de tiempo.
- Es independiente de la unidad monetaria elegida.

$$i = \frac{C(1) - C}{C}$$

- Las tasas se expresan en tanto por uno o tanto por ciento:

$$i \quad \leftrightarrow \quad 100 \cdot i\%$$

# La unidad de tiempo

En una operación financiera el tiempo está expresado en cierta **unidad de tiempo**.

Las unidades de tiempo usuales son:

- año natural: 365 días.
- año comercial o financiero: 360 días.
- mes: doceava parte del año.
- día.

Año comercial: cada mes es de  $\frac{360}{12} = 30$  días.

Año natural: cada mes es de  $\frac{365}{12} = 30,4167$  días.

# Métodos para determinar el interés

Dada la tasa de interés, el interés a cobrar puede determinarse según:

- Capitalización simple.
- El capital crece de un modo lineal.
- El crecimiento porcentual del capital es decreciente.
- Capitalización compuesta.
- El capital crece de un modo exponencial.
- El crecimiento porcentual del capital es constante.

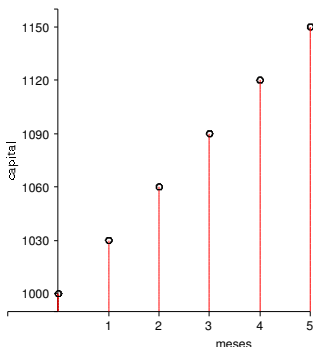


# Capitalización simple

## Definición

En un régimen de capitalización simple, el interés es directamente proporcional al capital en préstamo y al tiempo que dure la operación:

$$I = C \cdot i \cdot t.$$



# Capitalización simple

## Definición

Dos tasas  $i$  e  $\frac{i}{m}$  se dicen **proporcionales** si la unidad de tiempo correspondiente a  $i$  es  $m$  veces la unidad de tiempo correspondiente a  $\frac{i}{m}$ .

## Ejemplo

- Una tasa del 0.5% mensual es proporcional a una tasa del 6% anual.
- Una tasa del 1% diaria es proporcional a una tasa del 30% cada 30 días.

# Tasas equivalentes

## Definición

Dos tasas se dicen **equivalentes** si para un mismo capital producen el mismo interés en un mismo tiempo.

- Bajo la capitalización simple, dos tasas proporcionales también son equivalentes.
- Esta propiedad no es cierta para el caso de la capitalización compuesta.
- La noción de **equivalencia** depende de la ley de capitalización aplicada.

# Capitalización compuesta

## Definición

En un régimen de capitalización compuesta, el interés producido en cada unidad de tiempo se incorpora al capital. Se dice que los intereses se capitalizan.

$$C(n) = C \cdot (1 + i)^n$$

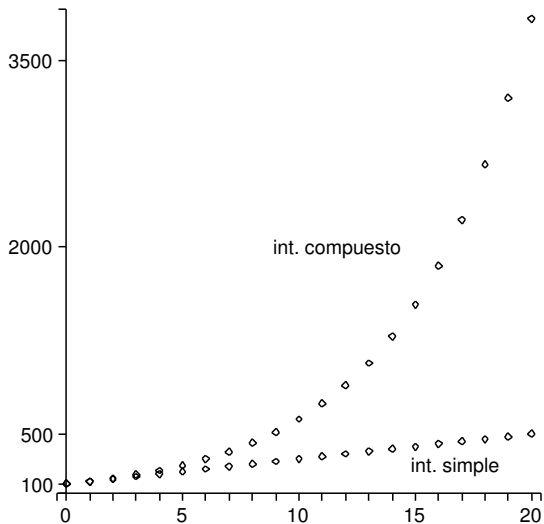
- Capitalización simple: el capital se incrementa siguiendo una progresión aritmética.

\$1000, \$1030, \$1060, \$1090, \$1120, **\$1150,**

- Capitalización compuesta: el capital se incrementa de acuerdo a una progresión geométrica.

\$1000, \$1030, \$1060.9, \$1092.727, \$1125.5088, **\$1159.2741.**

# Gráficos comparativos



# Equivalencias en la capitalización compuesta

- Las tasas de interés proporcionales no son equivalentes.

$$(1 + i)^m \geq 1 + mi, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

- Si  $i'$  corresponde a  $m$  unidades de tiempo, entonces  $i$  es **equivalente** a  $i'$  si

$$(1 + i)^m = 1 + i'.$$

## Ejemplo

Una tasa mensual  $i = 0.05$  aplicada durante 12 meses produce un interés por unidad de capital igual a

$$(1.05)^{12} - 1 = 0.79585.$$

Por lo tanto la tasa anual equivalente es  $i' = 0.79585$ .

# Capitalización en las fracciones de tiempo

En el régimen de capitalización compuesta, y si el tiempo de la operación financiera no es múltiplo entero de la unidad de tiempo:

$$t = n + r, \quad 0 < r < 1,$$

puede aplicarse:

- Capitalización mixta

$$C(t) = C \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + r \cdot i).$$

- Capitalización compuesta

$$C(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

- No capitalizar

$$C(t) = C \cdot (1 + i)^n.$$

# Gráficos comparativos

