

El modelo binomial

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

El precio de una opción

- Una **opción** es un contrato que da **derecho** al tenedor, y **obligación** al vendedor.
- **Ausencia de arbitraje**: Implica que la opción tiene un precio.
- ¿Cómo determinar este precio?
- Modelo probabilístico para el subyacente: **binomial**, browniano, geométrico browniano...

MODELO BINOMIAL

Formas de valorar una opción

Enfoques

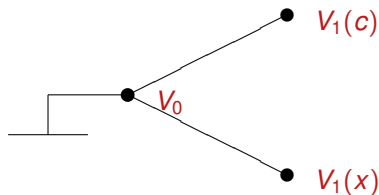
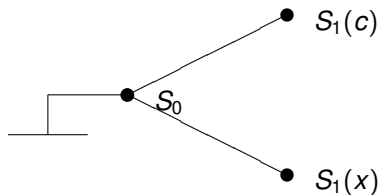
- Replicación de portafolios.
- Probabilidades de riesgo neutral.

En cualquiera de los casos, el precio obtenido para la opción es el mismo. La metodología se aplica a cualquier derivado.

Modelo binomial para un período

Tiramos una moneda. El resultado es **cara** (c) o **cruz** (x).

- S_i : precio del subyacente (acción) al tiempo i .
- V_i : precio del contrato (opción) al tiempo i , strike K .



$$V_i = \max\{S_i - K, 0\}$$

Ejemplo

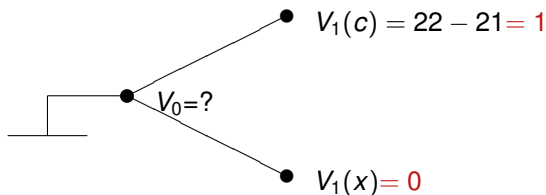
Ejemplo

Una acción cuesta actualmente 20 dólares. En un tres meses, el precio de la acción será de 18 o 22 dólares.

La tasa de interés nominal anual con capitalización continua es del 12 %.

¿Cuál es el precio justo de una opción de compra a un año sobre una acción, si el strike es de 21 dólares?

Situación del ejemplo



Este payoff tiene riesgo.

Un inversor en posición short debe cubrirse para eliminar este riesgo.

Cobertura

- posición short en la opción.
- posición long en Δ acciones.
- Se busca que la combinación de ambos sea una portfolio sin riesgo.

$$\begin{cases} \Delta 22 - 1 \\ \Delta 18 \end{cases}$$

$$\Delta 18 = \Delta 22 - 1 \quad \Delta = \frac{1}{4}$$

- Por cada cuatro opciones, invierte en una acción.
- Payoff del portfolio: 4,5
- Valor inicial del portfolio:

$$4,5 \cdot e^{-0,12 \cdot 3/12} = 4,367$$

$$f = 4 - 4,367 = 0,633$$

Caso general

El inversor invierte en un portfolio libre de riesgo:

- posición short en la opción (call)
- posición long en Δ acciones.
- f_u : payoff de la opción si $S(T) = S_0 \cdot u$.
- f_d : payoff de la opción si $S(T) = S_0 \cdot d$.

$$\text{Payoff} = \begin{cases} S_0 \cdot u \cdot \Delta - f_u \\ S_0 \cdot d \cdot \Delta - f_d \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Probabilidades de riesgo neutral

El valor inicial del portfolio es

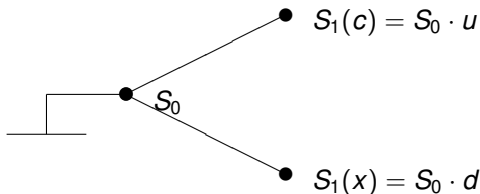
$$S_0\Delta - f$$

$$f = e^{-rT}(pf_u + (1-p)f_d)$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

- p y $(1-p)$ son las probabilidades de riesgo neutral

Enfoque probabilístico



$$E[S_1] = p S_1(c) + (1 - p) S_1(x).$$

¿Para qué probabilidad p se tiene que $E[S_1] = S_0 e^r$?

Probabilidades de riesgo neutral.

$$p = \frac{e^r - d}{u - d}$$

$$1 - p = \frac{u - e^r}{u - d}$$

El modelo binomial multiperiodico

Asumimos un modelo de n periodos: $0 \leq t \leq n$.

- En $t = 0$, el activo vale $S(0) = S_0$.
- En $t = 1$, el activo vale

$$S_1(c) = S_0 \cdot u, \quad S_1(x) = S_0 \cdot d.$$

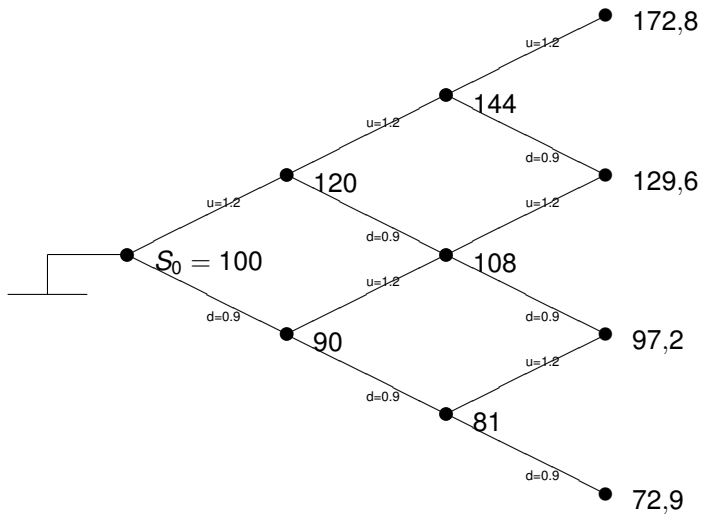
- La tasa nominal correspondiente al periodo es r :

$$d < e^r < u$$

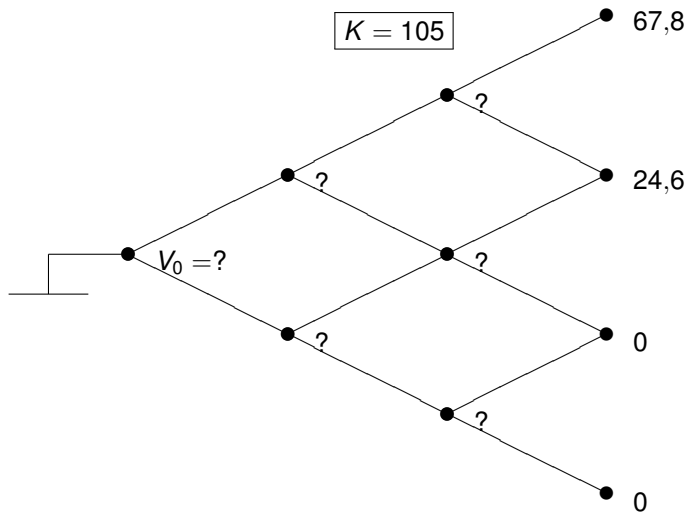
- En $t = k$, $1 \leq k \leq n$, y para cualquier valor de S_{k-1} .

$$S_k(c) = u \cdot S_{k-1}, \quad S_k(x) = d \cdot S_{k-1}.$$

Ejemplo



Valuación de una opción



Interpretación del modelo

- Eliminación del riesgo.

Combina de manera dinámica la opción y el subyacente, cubriendo el riesgo.

- Replicación de portfolio

Construye un portfolio **dinámico** en acciones y dinero, con igual payoff que la opción.

La posición en la acción, Δ , varía en cada t .

- Probabilidades de riesgo neutral.

El precio de la opción es tal, que el valor esperado del payoff es igual al valor futuro del precio de la opción.

Cualquiera de las tres interpretaciones conduce al mismo precio de la opción. Esto puede aplicarse a cualquier derivado financiero.

Iteración inversa

Valuación al riesgo neutral Para valorar la opción en cada tiempo t , se calcula:

$$V_k = e^{-r} (pV_{k+1}(c) + (1 - p)V_{k+1}(x))$$

El valor de la opción en $t = 0$ está dado por

$$V_0 = e^{-rn} E[V_n]$$

Valuación de una opción

