La capitalización compuesta - Tasas de interés

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Principio básico de las finanzas

- Oportunidad de arbitraje: Es la posibilidad de invertir un dos capitales idénticos durante un mismo período de tiempo, con diferente rentabilidad.
- El arbitraje permite obtener interés positivo sin capital inicial

Un principio básico de la economía es la hipótesis de no arbitraje.

- Bajo esta hipótesis, dos operaciones alternativas realizadas con capitales idénticos y durante un mismo período de tiempo, producen el mismo interés.

Tasa de interés efectiva

Consideremos una operación financiera, y fijamos el inicio en $t = 0$.
Sea t un instante durante el período de la operación, $t + 1$: una unidad de tiempo posterior.

Definición

Diremos que $i(t)$ es la tasa de interés efectiva en $[t, t + 1]$ si el interés producido por una unidad de capital en dicho período es $i(t)$. Es decir, el capital final producido es $1 + i(t)$.

Capital acumulado

- La tasa de interés efectiva está expresada en la unidad de tiempo correspondiente: anual, mensual, diaria, ...
- Asumiremos un ambiente de certidumbre: $i(0)$, $i(1)$, $i(2)$, . . . son conocidas.
- Un capital C invertido durante n unidades de tiempo producirá un capital:

$$C \cdot (1 + i(0) \cdot (1 + i(1)) \cdots (1 + i(n - 1))$$

- Si las tasas de interés efectivas son constantes e iguales a i, el capital final será

$$C \cdot (1 + i)^n$$

Ejemplo

Ejemplo

La tasa de interés efectiva que se paga por un depósito es del 2.5% los dos primeros años, con una reducción al 2% a partir de los dos años.
Calcular el capital acumulado luego de 7 años por una inversión de $10 000.

Solución:

$$C(7) = C_0 \cdot (1 + 0.025)^2 \cdot (1 + 0.02)^5 = 11\,599,75$$

El capital acumulado es de $11 599.75.

- La tasa de interés efectiva anual equivalente es $i = 2.14\%$.

El valor temporal del dinero

- La existencia de las tasas de interés implica un valor temporal del dinero.
- Es preferible disponer de \$1000 hoy que \$1000 dentro de un año.
- Capital financiero: (C, t), donde C es un capital disponible en el tiempo t.
- Equivalencia de capitales financieros: Leyes de capitalización.

Subperíodos y tasa de interés

Definición

Dado un período de tiempo $[t, t+1]$, $i(t)$ la tasa de interés efectiva en dicho período, y m un número natural, llamamos tasa de interés efectiva periódica correspondiente al período

$$[t + \frac{s}{m}, t + \frac{s+1}{m}]$$

a la tasa de interés efectiva en dicho período.

$$\boxed{i^{(m)}\left(t + \frac{s}{m}\right)}$$

Tasas de interés en subperíodos

El principio de no arbitraje implica que

$$1 + i(t) = \left(1 + i^{(m)}(t)\right)\left(1 + i^{(m)}(t + \frac{1}{m})\right)\dots\left(1 + i^{(m)}(t + \frac{m-1}{m})\right)$$

Si las tasas de interés periódicas son iguales ($= i^{(m)}$)

$$1 + i(t) = \left(1 + i^{(m)}(t)\right)^m.$$

- $i(t)$ e $i^{(m)}$ son tasas equivalentes.

Ejemplo

Ejemplo

Dada una tasa de interés anual $i(t)$ del 3%, entonces

- $i^{(2)} = 1.4889\%$ es una tasa semestral equivalente.
- Las tasas semestrales $i_1^{(2)}(t) = 1.25\%$ e $i_2^{(2)}(t + \frac{1}{2}) = 1.7284\%$ producen en una unidad de tiempo el mismo interés. No son equivalentes a la tasa anual del 3%.

$$(1 + 0.014889)^2 = 1.03$$

$$(1 + 0.0125)(1 + 0.017284) = 1.03.$$

Tasas de interés nominales

Definición

Dada una tasa de interés efectiva $i(t)$, y una tasa periódica $i^{(m)}(t)$, llamamos tasa nominal del período $[t, t+1]$ a la cantidad

$$j^{(m)}(t) = m \cdot i^{(m)}(t).$$

- La tasa nominal $j^{(m)}(t)$ es proporcional a $i^{(m)}(t)$.
- La tasa nominal no es aplicable, es una tasa enunciada.
- La tasa nominal no es equivalente a la tasa periódica $i^{(m)}$, y es estrictamente menor que $i(t)$ si $m > 1$.

Ejemplo

Tasa nominal anual $j^{(m)}$ del 8%		
frecuencia	$i^{(m)}(t)$	$i(t)$
$m = 1$	0.08	0.08
$m = 2$	0.04	0.0816
$m = 4$	0.02	0.082432
$m = 12$	0.00667	0.083
$m = 365$	0.000219	0.083278

- La sucesión de tasas equivalentes anuales convergen a un único valor.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j^{(m)}}{m}\right)^m = j$$

Capitalización instantánea

Definición

Dada una tasa de interés $i(t)$, correspondiente a una unidad de tiempo (año), se define la tasa de interés nominal instantánea al límite

$$r(t) = \lim_{m \to \infty} j^{(m)}(t)$$

donde $i^{(m)}(t)$ es la tasa periódica equivalente a $i(t)$ y $m \cdot i^{(m)}(t) = j^{(m)}(t)$.

- La tasa $r(t)$ es la tasa nominal pactada diariamente en el mercado financiero.