La capitalización continua - Operación de descuento

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Capitalización continua

Dado un período de tiempo, se han definido las siguientes tasas:

- Tasa de interés efectiva en el período: $i(t)$.
- Tasa de interés efectiva en un subperíodo: $i^{(m)}$
- Tasa de interés nominal con capitalización en el superíodo: $j^{(m)}(t)$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$(1 + i^{(m)})^m = 1 + i \qquad j^{(m)}(t) = m \cdot i^{(m)}$$

Ejemplo

Tasa efectiva anual del 5%		
frecuencia	$i^{(m)}$	$j^{(m)}(t)$
$m = 1$	0.05	0.05
$m = 2$	0.024695	0.049390
$m = 4$	0.012272	0.049089
$m = 12$	0.004074	0.048889
$m = 365$	0.000134	0.048793

- La sucesión de tasas nominales anuales convergen a un único valor.

$$\lim_{m \to \infty} j^{(m)}(t) = r(t)$$

Tasa nominal instantánea

Dado un período de tiempo, asumamos que se conocen

$$j^{(1)}(t),\ j^{(2)}(t),\ j^{(3)}(t),\ \ldots, j^{(m)}(t), \ldots$$

Definición

Se llama tasa de interés nominal con capitalización continua, o tipo de interés instantáneo al límite

$$r(t) = \lim_{t\to\infty} j^{(m)}(t)$$

siempre que este límite exista.

Tasa nominal instantánea

Ejemplo

Sea $i = 0.08$ la tasa efectiva anual. Entonces $i^{(m)} = 1.08^{1/m} - 1$, por lo cual

$$j^{(m)}(t) = m \cdot (1.08^{1/m} - 1).$$

En este caso, la tasa instantánea, o tasa nominal con capitalización continua, viene dada por

$$r(t) = r = \log(1.08).$$

La tasa $r(t)$

Dado un capital $C(t)$ se tiene que

$$C(t+1/m) - C(t) = C(t)\cdot i^{(m)}(t) = \frac{1}{m}\cdot C(t)\cdot j^{(m)}(t).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C(t+1/m) - C(t)}{1/m} = \lim_{t\to\infty} C(t)\cdot j^{(m)}(t).$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dt}C(t) = C(t)\cdot r(t).}$$

Ecuación diferencial para $r(t)$

Considerando un intervalo de tiempo $[t_0, t]$, se tiene que

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = r(t),$$

por lo cual

$$\log C(t) - \log C(t_0) = \int_{t_0}^{t} r(s)\, ds.$$

Usando propiedades del logaritmo se obtiene que:

$$\boxed{C(t) = C(t_0) \cdot exp(\int_{t_0}^{t} r(s))\, ds = C(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds}.}$$

La tasa de interés instantánea

Sea el tipo de interés instantáneo constante: $r(t) = r$. Se tiene entonces que

$$C(t) = C(t_0)\, e^{r(t-t_0)}.$$

En particular, tomando $t_0 = 0$ y $t = 1$, debe cumplirse que

$$C(1) \cdot (1 + i) = C(0) \cdot e^r.$$

- Para una tipo de interés instantáneo constante r, la tasa de interés efectiva está dada por $i = e^r - 1$.

Factor de acumulación

Llamaremos factor de acumulación correspondiente al plazo $[t_0, t_1]$, a la cantidad

$$A(t_0, t_1) = e^{\int_{t_0}^{t_1} r(s)\, ds}.$$

- $C(t_1) = C(t_0)\, A(t_0, t_1)$
- $i(t_0) = A(t_0, t_0 + 1) - 1$
- $i^{(m)}(t_0) = A(t_0, t_0 + \frac{1}{m}) - 1$

La función de acumulación $t \mapsto A(t_0, t)$ está dada por

$$A(t_0, t) = e^{\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds}.$$

Propiedades de la función de acumulación

- $A(t_0, t) \geq 1$, para todo $t \geq 0$.
- $A(t_0, t_0) = 1$
- Si $t_0 < t_1 < t_2$, entonces
$$A(t_0, t_1) < A(t_0, t_2).$$
- Principio de consistencia Si $t_0 < t_1 < t_2$, entonces
$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2).$$

Observación: ¿Qué ocurre si se utiliza la capitalización simple?

Factor de descuento

Definición

El valor descontado en t de un capital de valor nominal C disponible o con vencimiento en t_2 es

$$v(t_1, t_2) = \frac{C}{A(t_1, t_2)} = Ce^{-\int_{t_1}^{t_2} r(s)\, ds}.$$

Propiedades

- $i(t_0) = \dfrac{1}{v(t_0, t_0 + 1)} - 1 = \dfrac{1 - v(t_0, t_0 + 1)}{v(t_0, t_0 + 1)}$

$$\boxed{i = \frac{1 - v}{v}.}$$

- $i^{(m)}(t_0) = \dfrac{1 - v(t_0, t_0 + \frac{1}{m})}{v(t_0, t_0 + \frac{1}{m})}$

Función de descuento

Definición

La función de descuento que determina el valor actual de una cantidad monetaria disponible en el tiempo t se define por

$$v(0,t) = v(t) = e^{-\int_0^t r(s)\,ds} \qquad t \geq 0.$$

Propiedades

1. $v(t) = \dfrac{1}{A(0,t)}$
2. $v(0) = 1$
3. $0 < v(t) < 1$, para $t > 0$.
4. Si $t_1 < t_2$, entonces $v(t_1) < v(t_2)$.
5. Si $t_1 < t_2$, $v(t_1) \cdot v(t_1, t_2) = v(t_2)$