Rentas o Anualidades

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Rentas o Anualidades

Definición

Un capital financiero es un par (C, t) donde C es un capital disponible en el tiempo t.

Una renta o anualidad es una sucesión de capitales financieros (C_1, t_1), (C_2, t_2), $\dots$, (C_n, t_n), $\dots$, con $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \dots$.

Elementos de la renta

Se denomina:

- cuota o término: a cada uno de los pagos C_i, $i \geq 1$.
- Períodos de la renta: $[t_k, t_{k+1}]$, $k \geq 1$.
- Amplitud del período: $t_{k+1} - t_k$

Las rentas se caracterizan por:

- momentos de los pagos: cuotas vencidas o cuotas adelantadas.
- monto de las cuotas: cuotas constantes o cuotas variables.
- duración de la renta: rentas ciertas o rentas perpetuas
- períodos: constantes o variables.
- tasa de interés en cada período: constante o variable.

Rentas ciertas

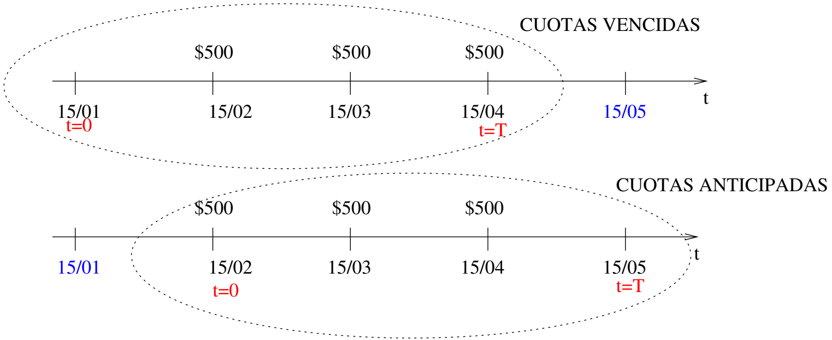

Figura: Rentas pospagable y prepagable

Rentas ciertas

Asumiremos que

- los períodos de tiempo son constantes: $t_{k+1} - t_k = 1$, para cierta unidad de tiempo.
- la tasa de interés es constante, e igual a i.
- Renta prepagable, o de cuotas anticipadas: el origen de la recta es t_1.
- Renta pospagable, o de cuotas vencidas: el origen de la recta es $t_0 = t_1 - 1$.
- Final de la renta: n períodos posteriores al origen.

Valor actual y final de una renta

Definición

Dada una renta cierta $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)$ llamaremos

- Valor actual de la renta: a la suma de los valores actuales de cada uno de los capitales financieros calculada en el origen de la renta.
- Valor final de la renta: a la suma de los valores finales de cada uno de los capitales financieros calculada en el final de la renta.

Rentas constantes

Consideremos una renta de n cuotas constantes iguales a C.

Cuotas vencidas: origen en $t_0 = t_1 - 1$.

$$\text{Valor actual} = C \cdot \left((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}\right).$$

$$\text{Valor final} = C \cdot \left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right).$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \boxed{s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Rentas constantes

Cuotas anticipadas: origen en t_1.

$$\text{Valor actual} = C \cdot \left(1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right).$$

$$\text{Valor final} = C \cdot \left((1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n\right).$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Ejemplo

Ejemplo

Una renta está conformada por 4 cuotas mensuales de \$100, sujetas a una tasa del 3 % mensual, y se desea conocer el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota.

Solución:

Cuota	Períodos	Valor final
1	3	$100 \cdot (1{,}03)^3 = 109{,}2727$
2	2	$100 \cdot (1{,}03)^2 = 106{,}09$
3	1	$100 \cdot (1{,}03) = 103$
4	ninguno	100
Valor final		$100 \cdot \left(1 + (1{,}03) + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^3\right) = 418{,}3627$

Esto es, el valor final de la renta es de \$418,3627. $\square$

Ejemplo

Ejemplo

Una renta está conformada por 4 cuotas mensuales de \$100, sujetas a una tasa del 3 % mensual, y se desea conocer el valor actual de la misma al momento de pagar la primera cuota.

Solución:

Cuota	Períodos	Valor final
1	ninguno	100
2	1	$100 \cdot (1{,}03)^{-1} = 97{,}0874$
3	2	$100 \cdot (1{,}03)^{-2} = 94{,}2596$
4	3	$100 \cdot (1{,}03)^{-3} = 91{,}5141$
Valor final		$100 \cdot \left(1 + (1{,}03)^{-1} + (1{,}03)^{-2} + (1{,}03)^{-3}\right) = 382{,}8613$

Esto es, el valor actual de la renta es de \$382.8613. $\square$

Ejemplo

Ejemplo

Una persona deposita al comienzo de cada año la suma de \$2000 en una cuenta que paga una tasa de interés anual del 9 %. ¿Cuál es el capital que habrá acumulado al comienzo del sexto año, antes de depositar la sexta cuota?

Solución:

Esta renta puede interpretarse como una anualidad de cinco cuotas anticipadas, cada una de \$2.000. La tasa de interés es 0.09, y el número de cuotas es $n = 5$.

$$V_F = 1{,}09 \cdot 2.\,000 \cdot s_{\overline{5}|0{,}09} = 13.\,046{,}66913,$$

es decir, \$13.046,67 aproximadamente. □

Cálculo del número de cuotas

Ejemplo

¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$100.000 considerando una tasa del 0.02 mensual?

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot a_{\overline{n}|i}$.

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot i)}{\log(1+i)}}.$$

Demostración.

Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3000) - \log(3000 - 2000)}{\log(1{,}02)} = \frac{\log(3)}{\log(1{,}02)} \sim 55,48.$$

$\square$