Rentas en progresión aritmética y geométrica

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Anualidades ciertas con cuotas variables

Consideraremos rentas ciertas con cuotas variables, y períodos constantes. En particular, interesan los siguientes casos:

Definición

Dada una renta $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)$, diremos que es

- una renta en progresión aritmética si

$$C_k - C_{k-1} = h,$$

  para cierta constante h.

- una renta en progresión geométrica si

$$\frac{C_k}{C_{k-1}} = q,$$

  para cierta constante $q > 0$.

Rentas en progresión aritmética

La sucesión de capitales es de la forma

$$c,\ c+h,\ c+2\cdot h, \ldots,\ c+(n-1)h,$$

donde c es el valor de la primera cuota, y h es el término de la progresión aritmética.

Observación: $h < -\dfrac{c}{n-1}$.

Ejemplo

En una renta de cuatro cuotas mensuales en progresión aritmética, con $c = 100$ y $h = 15$, las sucesivas cuotas serán 100, 115, 130 y 145.

Ejemplo

Una renta en progresión aritmética puede pensarse como una superposición de n rentas con cuotas constantes.
Para el ejemplo anterior:

	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
	100	100	100	100
		15	15	15
			15	15
				15
Total	100	115	130	145

Caso general

Momentos	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n
	c	c	c	$\dots$	c	c
		h	h	$\dots$	h	h
			h	$\dots$	h	h
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
						h
RENTA	c	$c+h$	$c+2h$	$\dots$	$c+(n-2)h$	$c+(n-1)h$

- El valor actual y final de la renta puede calcularse como la suma de los valores actuales y finales de cada una de estas rentas.

Cuotas vencidas.

Valor de la cuota	Número de cuotas	Valor final
c	n	$c \cdot s_{\overline{n}\rvert r}$
h	$n-1$	$h \cdot s_{\overline{n-1}\rvert r}$
	$\vdots$	
h	3	$h \cdot s_{\overline{3}\rvert r}$
h	2	$h \cdot s_{\overline{2}\rvert r}$
h	1	$h \cdot s_{\overline{1}\rvert r} = h$
Valor final		$h + h\, s_{\overline{1}\rvert r} + h\, s_{\overline{2}\rvert r} + \cdots + h\, s_{\overline{n-1}\rvert r} + c\, s_{\overline{n}\rvert r}$

Cuadro: Valor final: Renta en progresión aritmética con cuotas vencidas

$$\boxed{V_{\text{Final}} = c \cdot s_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(s_{\overline{n}\rvert i} - n\right)}.$$

Cálculo de valores actuales y finales

Cuotas vencidas

Valor actual	Valor final
$c \cdot a_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(a_{\overline{n}\rvert i} - n(1+i)^{-n} \right)$	$c \cdot s_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(s_{\overline{n}\rvert i} - n \right)$

Cuotas anticipadas

Valor actual	Valor final
$c \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{n}\rvert i} - n(1+i)^{-(n-1)} \right)$	$c \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\rvert i} + \frac{h}{i} \cdot \left(\ddot{s}_{\overline{n}\rvert i} - n(1+i) \right)$

Ejemplo

Ejemplo

Un individuo percibirá una renta consistente en pagos anuales cada 1 de enero durante 20 años, siendo el primer pago el 1 de enero de 2010. El primer pago será de \$5000, y su renta disminuirá en \$150 cada año. Obtener el valor de esta renta al día de hoy, valorando la misma con una tasa de interés efectiva anual del 5 %.

Solución.

En clase □

Rentas en progresión geométrica

La sucesión de capitales es de la forma

$$c,\ c \cdot q,\ c \cdot q^2, \ldots,\ c \cdot q^{n-1}$$

donde c es el valor de la primera cuota, y q es el término de la progresión geométrica.

Ejemplo

En una renta de cuatro cuotas en progresión geométrica, con $c = 1000$ y $q = 1{,}1$, las sucesivas cuotas serán 1000, 1010, 1121 y 1242,1.

Valor final y valor actual

	Valor actual	Valor final
Cuotas vencidas		
$q \neq (1+i)$	$c \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$	$c \cdot \dfrac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$
$q = (1+i)$	$c \cdot n \cdot (1+i)^{-1}$	$c \cdot n \cdot (1+i)^{n-1}$
Cuotas anticipadas	Valor actual	Valor final
$q \neq (1+i)$	$c \cdot (1+i) \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$	$c \cdot \dfrac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \cdot (1+i)^{n+1}$
$q = (1+i)$	$c \cdot n$	$c \cdot n \cdot (1+i)^n$

Ejemplo

Ejemplo

Un individuo decide hoy, depositar cada 15 de diciembre un capital equivalente al 10 % de su salario bruto anual en una cuenta que reditúa un 3,5 % anual.
Si este individuo estima que su salario bruto en el año 2009 será de $36.000 y que se incrementará un 2 % cada año, ¿cuál será el capital acumulado en dicha cuenta el 1ro. de enero de 2015?

Solución.

En clase. $\square$

Ejemplo

Ejemplo

Un individuo decide hoy, depositar cada 15 de diciembre un capital equivalente al 10 % de su salario bruto anual en una cuenta que reditúa un 3,5 % anual.
Si este individuo estima que su salario bruto en el año 2009 será de $36.000 y que se incrementará un 3,5 % cada año, ¿cuál será el capital acumulado en dicha cuenta el 1ro. de enero de 2015?

Solución.

En clase. □

Cálculo de la tasa de interés

Ejemplo

Si una persona deposita mensualmente \$300 en una cuenta, y al cabo de 4 años tiene un capital de \$15.000, ¿qué rendimiento tuvo su inversión? Es decir, ¿cuál fue la tasa de interés sobre dichos depósitos?

- para $i = 0{,}05$, arroja un valor final de \$56.407,6
- para $i = 0{,}005$ el valor final resulta ser \$16229.35, lo que se aproxima bastante más al resultado;
- para $i = 0{,}0017$ se obtiene \$14.990.67, y
- para $i = 0{,}0018$ el valor final es de \$15.026,28.

Así que puede estimarse una tasa de interés entre el 0,17 % y el 0,18 % mensual.

Cálculo del número de cuotas

Ejemplo

¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$100.000 considerando una tasa del 0.02 mensual?

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot a_{\overline{n}|i}$.

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot i)}{\log(1+i)}}.$$

Demostración.

Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3000) - \log(3000 - 2000)}{\log(1{,}02)} = \frac{\log(3)}{\log(1{,}02)} \sim 55,48.$$

$\square$