

Rentas perpetuas

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Rentas perpetuas

Definición

Una **renta perpetua** es una sucesión infinita de capitales financieros:

$$(C_1, t_1), (C_2, t_2), \dots, (C_n, t_n), \dots$$

con $t_k < t_{k+1}$ para $k \geq 1$.

Al igual que en el caso de las rentas ciertas, se tienen rentas perpetuas

- de cuotas constantes (unitarias)
- de cuotas variables (en progresión aritmética, geométrica, y otras).
- de cuotas anticipadas.
- de cuotas vencidas.

Esta clasificación no es exhaustiva.

Rentas perpetuas unitarias

- Asumiremos que los períodos de la renta equivalen a la unidad de tiempo.
- La valoración de la renta se hará de acuerdo a una tasa de interés i , correspondiente a esta unidad de tiempo.

Denotaremos:

- $a_{\infty|i}$: valor inicial de una renta perpetua unitaria con cuotas vencidas.
- $\ddot{a}_{\infty|i}$: valor inicial de una renta perpetua unitaria con cuotas anticipadas.

Cálculo de $a_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

Recordemos que para una renta cierta, el valor inicial de la renta unitaria es

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{cuotas vencidas}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{cuotas anticipadas}$$

Para un número infinito de cuotas, se obtiene entonces que

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1 + i}{i}.$$

Ejemplo

La mayoría de las empresas al constituirse asumen que su vida será ilimitada. Los poseedores de acciones de la empresa reciben periódicamente dividendos a cuenta de los beneficios.

Si una empresa otorga \$100 anuales por acción, ¿cuál es el valor actual de la acción si se la valora al 4 %?

Solución:

$$100 a_{\infty|0,04} = \frac{100}{0,04} = 2500 .$$



Rentas perpetuas en progresión geométrica

Estas rentas son de la forma

$$c, c \cdot q, c \cdot q^2, \dots, c \cdot q^n, \dots$$

- $q \geq (1 + i)$: el valor actual tiende a infinito.
- $q < (1 + i)$: el valor actual es

cuotas vencidas	$c \frac{1}{1 + i - q}$
cuotas anticipadas	$c \frac{1 + i}{1 + i - q}$

Rentas perpetuas en progresión aritmética

Estas rentas son de la forma

$$c, c + h, c + 2h, \dots, c + (n - 1)h, \dots$$

Para una renta cierta, el valor actual para rentas **unitarias** con cuotas vencidas está dado por

$$a_{\overline{n}|i} + \frac{h}{i} \left(a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right).$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, se obtiene que el valor actual para rentas perpetuas en progresión aritmética está dado por

cuotas vencidas	$(c + \frac{h}{i}) \cdot \frac{1}{i}$
cuotas anticipadas	$(c + \frac{h}{i}) \frac{1+i}{i}$

Ejemplo

Como consecuencia de una herencia, una persona percibirá anualmente una renta perpetua, cuya primer cuota será de \$50.000 y se irá incrementando en un 4 % cada año. Calcular el valor actual asumiendo que las cuotas son vencidas y con una valoración del 9 % anual.

Solución:

$$C = 50000, \quad q = 1,04, \quad i = 0,09$$

$$\frac{c}{1 + i - q} = \frac{50000}{0,05} = 1\,000\,000.$$

