

Matemática Financiera

Guía N°8: Árboles Binomiales

Problema 1: Utilizando el concepto de cobertura (cartera libre de riesgo), mostrar que cada unidad del derivado empleada (en short o en long), debe cubrirse con Δ unidades del activo subyacente, siendo

$$\Delta = \frac{U - D}{S_u - S_d}, \quad (1)$$

donde U y S_u (D y S_d) son respectivamente los precios correspondientes al *escenario de suba* (*baja*), al final del período considerado, del derivado y del activo, respectivamente.

A su vez, utilizando el principio de arbitraje (tasa de interés libre de riesgo), mostrar que el valor inicial del derivado (V_0) viene dado por

$$V_0 = \frac{pU + (1-p)D}{1+i}, \quad (2)$$

donde i es la tasa de interés efectiva del período considerado y p es la probabilidad asignada al *escenario de suba*. Escribir la expresión correspondiente a p .

Problema 2: Suponer que un derivado tiene los valores futuros $U = S_u - X$ o $D = S_d - X$, siendo i la tasa de interés efectiva del período. Utilizar la Ec. (2) para demostrar que $V_0 = S_0 - X/(1+i)$. ¿Qué interpretación tiene el valor X ?

Problema 3: Una unidad de acción está valuada en \$110. En un año el precio de la acción será de \$130 o \$100. Asuma que el valor del derivado correspondiente al cabo del año será de $U = 10$ o $D = 0$ pesos. La tasa de interés efectiva anual sin riesgo es 4%.

- ¿Qué tipo de opción se corresponde con este derivado?
- Determine el precio del derivado en $t = 0$.
- Si la opción tiene un precio de ejercicio (strike) igual a \$100, calcule el precio en $t = 0$.

Problema 4: Una unidad de acción está valuada en \$100. En un año el precio de la acción será de \$130 o \$90. Suponga que el valor del derivado correspondiente será de $U = 0$ o $D = 5$ pesos. La tasa de interés efectiva anual sin riesgo es 5%. Si el precio de ejercicio de la opción (strike) es \$95, calcule el precio del derivado en $t = 0$. ¿Qué tipo de opción se corresponde con este derivado?

Problema 5: Una unidad de acción está valuada en \$60. En un año el precio de la acción será de \$75 o \$50. Suponga que el derivado es una opción de venta (put) cuyo precio de ejercicio (strike) es \$60. La tasa de interés efectiva anual sin riesgo es 5%. Calcule el valor de la opción de venta en $t = 0$.

Problema 6: Una unidad de acción tiene un valor corriente de \$50. Después de un año el precio de la acción será de \$55 o \$40. La tasa de interés efectiva anual es 4%. Se desea conocer los precios de dos opciones de compra (call): una, con un precio de ejercicio de \$48 y; la otra, de \$53. También se quiere cotizar una opción de venta (put) cuyo precio de ejercicio es \$45. Utilizar la expresión del valor esperado actualizado, dado en la Ec. (2), con el apropiado valor de p , para calcular los precios de las tres variedades de opciones mencionadas.

Problema 7: Una acción está valuada en \$100. En un año su valor será de \$115 o \$90. En la actualidad la tasa de interés efectiva sin riesgo es de 4%.

a) Utilizar la Ec. (2) para valuar una opción de venta sobre la acción con un precio de ejercicio de \$95.

b) Suponga que otro derivado tiene los valores futuros $U = 0$ o $D = 15$ pesos. Explicar por qué en este caso V_0 resulta tres veces mayor al calculado en el ítem anterior.

Problema 8: Suponer para una opción de compra que

S_0	S_u	S_d	X	r	τ	nro de acciones
50	60	40	55	0,05	1/2	1000

donde r es la tasa instantánea de interés continuo y τ es el lapso de tiempo expresado en años.

a) Calcular el precio de mercado de la opción de compra.

b) Suponer que se venden 1000 acciones al precio de mercado +\$0,10. ¿Cuántas opciones deben comprarse para cubrir la venta?

c)Cuál es la ganancia resultante, independientemente del precio de la acción?

Considerar ahora que se venden 5000 opciones de venta con un precio de ejercicio \$50 y una fecha de vencimiento de tres meses ($\tau = 1/4$).

d) ¿Cuál es el precio de mercado para la opción de venta?

e) ¿Cuántas acciones deben emplearse para cubrir esa venta? En este caso,

$$\Delta = \frac{U - D}{S_u - S_d}$$

resulta negativa, lo que significa que se posicionará en *short* con un cierto número de acciones.

f) ¿Cuál es la ganancia si se vende la opción de venta al precio de mercado +\$0,12?

Problema 9: Considerar los siguientes casos:

	Tipo de opción	S_0	S_u	S_d	X	r	τ	nro de acciones
a)	call	80	90	75	80	0,048	1	2000
b)	put	80	90	70	75	0,050	1/2	1000
c)	call	70	80	50	55	0,046	1/4	2000
d)	put	40	45	30	40	0,050	1/2	6000
e)	call	64	72	60	66	0,047	1/3	4000
f)	call	24	30	20	22	0,050	1	3000

- i) ¿Cuál es el precio de la opción en cada caso?
- ii) Determinar el número de opciones que deben comprarse o venderse en cada caso para cubrir la posición.
- iii) Suponer que se vende la opción en cada uno de los casos al precio de mercado +\$0,10. Determinar la ganancia, independientemente del desempeño de la acción.

P. Pury – Fa.M.A.F ©2010