La fórmula de Black-Scholes

Patricia Kisbye

Profesorado en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

2010

Movimiento browniano

Un proceso estocástico continuo $B(t)$ se dice movimiento browniano si verifica:

- $B(t+s) - B(s)$ no depende de valores previos a $B(s)$ (incrementos independientes),
- $B(t+s) - B(s)$ tiene distribución normal

$$B(t+s) - B(s) \sim N(\mu\, t, \sigma\sqrt{t}),$$

  μ y σ independientes de t y s.

Este modelo fue descripto por el botánico Robert Brown (1827), y utilizado para modelar precios de acciones y commodities por Bachelier (1900)

- Desventaja: precios negativos.

Movimiento geométrico browniano

Un proceso estocástico continuo $W(t)$ se dice un movimiento geométrico browniano si verifica:

- $W(t+s) - W(s)$ es independiente de valores previos a $W(s)$
- $\dfrac{W(t+s)}{W(s)}$ tiene distribución lognormal

$$\log\left(\frac{W(t+s)}{W(s)}\right) \sim N(\mu\, t, \sigma\sqrt{t}).$$

En particular

$$\boxed{E\left[\frac{W(t+s)}{W(s)}\right] = e^{\mu\, t + \sigma^2 \frac{t}{2}}}$$

M.G.B.

Si consideramos un intervalo $(s, t+s)$ muy pequeño, podemos aproximar

$$\log\left(\frac{W(t+s)}{W(s)}\right) \sim \frac{W(t+s)-W(s)}{W(s)} = \frac{\Delta W}{W}.$$

Un movimiento geométrico browniano puede describirse entonces como:

$$\boxed{\frac{\Delta W}{W} = \mu\,\Delta t + \sigma\, Z\,\sqrt{\Delta t}}$$

- $\mu\,\Delta t$: componente determinística.
- $Z \sim N(0,1)$: interviene en la componente estocástica.

M.G.B. como modelo de precios de activos

Consideremos una serie histórica de precios de un determinado activo, tomados en intervalos de tiempo Δt.

$$S_0, S_1,\ S_2,\ \ldots, S_n, \ldots$$

donde S_k es el precio del activo en el tiempo $t = k\,\Delta t$. Para cada $k \geq 0$,

$$S_{k+1} = S_k\, e^{r_k\,\Delta t},$$

donde r_k es la tasa de interés instantánea en $t = k\,\Delta t$.

Hipótesis

Para n suficientemente grande, (Δt pequeño), se asumen las siguientes hipótesis:

- Los valores $r_1, r_2, \ldots, r_n$ están normalmente distribuidos:

$$r_j \sim N(\mu, \sigma), \qquad \forall j$$

- μ: Tendencia (anual) del activo.
- σ: Volatilidad (anual) del activo.
- El movimiento de precios no depende de precios anteriores del activo.

$$\boxed{\log\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) \sim N\left(\mu\,\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}\right).}$$

Los precios del activo siguen un movimiento geométrico browniano

El M.G.B. como límite del modelo binomial

Consideremos un activo con valor inicial S_0, tendencia μ y volatilidad σ. Definimos el modelo binomial de n períodos para el precio del activo en el intervalo $[0, T]$ de acuerdo a los parámetros:

$$\Delta = \frac{T}{n}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \qquad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

$$p = \frac{e^{\mu\,\Delta} - d}{u - d} \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\sqrt{\Delta}}{\sigma}\right)$$

Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

El M.G.B. como límite del modelo binomial

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) \cdot u^{\sum_1^n X_i} \cdot d^{n-\sum_1^n X_i} && (1) \\ &= S(0) \cdot d^{T/\Delta} \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_1^{T/\Delta} X_i} && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) &= \frac{T}{\Delta} \log(d) + \log\left(\frac{u}{d}\right) \sum_{i=1}^{T/\Delta} X_i && (3) \\ &= \frac{-T\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{T/\Delta} X_i && (4) \end{aligned}$$

Teorema Central del Límite: $\sum_{i=1}^{T/\Delta} X_i$ tiende a una distribución normal.

Resultados

Para Δ pequeño:

$$\boxed{\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) \text{ está normalmente distribuido.}}$$

$$E\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right] = \mu\, T$$

$$Var\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right] \simeq \sigma^2 T.$$

El modelo binomial converge a un movimiento geométrico browniano

Valoración de un derivado

Modelo binomial

- Si el payoff del derivado es $F\big(S(T)\big)$, entonces

$$V_0 = e^{-rT}\, E\big[F\big(S(T)\big)\big]$$

Modelo continuo: geométrico browniano

- Si el payoff del derivado es lineal: OK
- Si se trata de una opción call:

$$F\big(S(T)\big) = \big(S(T) - K\big)^+$$

Fórmula de Black-Scholes

Fórmula de Black-Scholes

Sea C la prima de una opción call sobre un activo con precio $S(t)$, $0 \leq t \leq T$, modelado por un movimiento geométrico browniano con tendencia μ y volatilidad σ. Sea K el strike de la opción, y sea r la tasa de mercado libre de riesgo.

Fórmula de valuación de riesgo neutral para la opción:

$$\boxed{C = S(0)\Phi(\omega) + Ke^{-rT}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{T})}$$

$$\omega = \frac{rT + \sigma^2 T/2 - \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Φ: f.d.a. normal.