Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

`Licenciatura en Ciencias de la Computación`

Modelos y Simulación

Guía N°1: Elementos de Probabilidad

Problema 1: Considere un experimento que consta de seis caballos, numerados del 1 al 6, que realizan una carrera, y suponga que el espacio muestral está dado por

$$S = \{\text{todas las permutaciones de } (1, 2, 3, 4, 5, 6)\}.$$

Sea A el evento en el que el caballo número 1 esté entre los tres primeros finalistas, sea B el evento que el caballo número 2 llegue en segundo lugar, y sea C el evento que el caballo número 3 llegue en tercer lugar.

a) Describa el evento $A \cup B$. ¿Cuántos resultados están contenidos en este evento?

b) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento AB?

c) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento ABC?

d) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A \cup BC$?

Problema 2: Cualesquiera sean los eventos A y B, muestre que

a) $A \cup B = A \cup A^c B$, y que $A = AB \cup AB^c$ (Trazar diagramas de Venn).

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Problema 3: Se extraen dos bolas de una caja que contiene 9 bolas azules y 7 bolas amarillas, y el experimento es sin reposición. Si las bolas tienen todas la misma probabilidad de ser extraídas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la primera azul y la segunda amarilla?

Problema 4: La variable aleatoria X toma valores en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ con la siguiente probabilidad:

$$P_i = P(X = i) = c\,i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4$$

a) Determinar el valor de c.

b) Calcular $P(2 \leq X \leq 3)$.

c) Calcular $E[X]$.

Problema 5: Mostrar que para toda variable aleatoria X se cumple: $\mathrm{Var}[a\,X+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$.

Problema 6: Calcular la relación de recurrencia $P_{n+1} = f(P_n)$ para la distribución de probabilidad de Poisson. Discutir su uso para un cálculo numérico eficiente de la distribución de Poisson.

Problema 7: Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demostrar que la variable $Z = X+Y$ es de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Problema 8: Sea una urna con $N+M$ bolas, de las cuales N tienen color blanco y M color negro (las bolas son distinguibles entre sí). Supongamos que cualquier subconjunto de n elementos distintos tiene la misma chance de ser elegido y sea X la variable aleatoria que cuenta el número de bolas de color blanco en una muestra de n elementos.
a) La distribución de probabilidad (o función de masa de probabilidad) resulta

$$P(X=i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}.$$

La variable aleatoria X se dice que tiene distribución hipergeométrica de parámetros n, M, N.
b) La variable aleatoria X se puede escribir como suma de variables aleatorias X_i que valen 1 si la i-ésima extracción de la urna da una bola blanca, 0 en caso contrario, $i = 1, \ldots, n$. Observando entonces que $X = \sum_{i=1}^n X_i$ mostrar que

$$E(X) = \frac{nN}{N+M} \qquad V(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$$

Problema 9: Sean X e Y variables aleatorias *independientes* distribuídas *exponencialmente*

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\ , \quad (x>0) \qquad f_Y(y) = \mu \exp(-\mu y)\ , \quad (y>0).$$

a) Calcular $f_{X|Y}(x|y)$.
b) calcular $P(X<Y|Y=y)$, donde y es un valor dado de la variable Y.
c) Calcular $P(X<Y)\ \ (\equiv E[P(X<y)])$

Problema 10: Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma exponencial. Calcular la densidad de probabilidad condicional de X dado que $X+Y=t$.