Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

`Licenciatura en Ciencias de la Computación`

Modelos y Simulación

Guía N°4: Generación de Variables Aleatorias Discretas

Problema 1: Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un "éxito" si la i-ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1, \ldots, n$).

a) Escribir un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos.

b) Determine las respuestas exactas para $n >> 1$ y compárelas con los resultados estimados.

Problema 2: Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000 \, .$$

a) Escribir un algoritmo para estimar la cantidad deseada.

b) Obtener la aproximación sorteando 100 números aleatorios.

c) ¿Es buena la aproximación obtenida?

Problema 3: Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles: $2, 3, \ldots, 12$ hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

a) Describir la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.

b) Mediante una implementación en computadora, calcular el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.

Problema 4: Sea Z una variable aleatoria normal estándar. Verificar que

$$E[|Z|] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sim 0{,}798 \, .$$

Problema 5: Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=i)=\frac{\dfrac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}\,e^{-\lambda}} \quad (i=0,\ldots,k)$$

Problema 6: Desarrollar un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=j)=\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)2^{j-1}}{3^j}\ ,\quad j=1,2,\ldots$$

Problema 7: Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X=j)=p_j$ con $j=1,2,\ldots$. Sea:

$$\lambda_n=P(X=n|X>n-1)=\frac{p_n}{1-\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}p_j}\ ,\quad n=1,2,\ldots$$

Las cantidades λ_n, son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n-1$, muera en el tiempo n.

a) Mostrar que $p_1=\lambda_1$ y que

$$p_n=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n-ésimo número generado es menor que λ_n. El algoritmo puede escribirse como sigue:

Paso 1: X = 1

Paso 2: Generar U

Paso 3: Si U $<\lambda_X$, terminar.

Paso 4: X = X + 1

Paso 5: Ir al Paso 2

b) Mostrar que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.

c) Suponer que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p:

$$P(X=n)=p(1-p)^{n-1}\ ,\quad n\geq 1.$$

Determinar los valores de $\lambda_n, n \geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

Problema 8: Suponiendo que $0 \leq \lambda_n \leq \lambda$, para todo $n \geq 1$; considerar el siguiente algoritmo para generar una variable aleatoria con tasas dicretas de riesgo $\{\lambda_n\}$:

`Paso 1: S = 0`

`Paso 2: Generar U,` $Y = \texttt{Ent}\left[\dfrac{\log(U)}{\log(1-\lambda)}\right] + 1$

`Paso 3: S = S + Y`

`Paso 4: Generar U`

`Paso 5: Si U` $\leq \lambda_s/\lambda$`, tomar X = S y terminar. Caso Contrario, ir a Paso 2.`

a) ¿Cuál es la distribución de Y en el paso 2?

b) Explique cómo funciona el algoritmo.

c) Argumentar que X resulta una variable aleatoria con tasas discretas de riesgo $\{\lambda_n\}$.

Problema 9: Implementar el método alias para generar números distribuídos de acuerdo con la variable aleatoria discreta:

$$P_1 = \frac{7}{16}, \qquad P_2 = \frac{1}{4}, \qquad P_3 = \frac{1}{8}, \qquad P_4 = \frac{3}{16}.$$

Problema 10: Implementar el método alias para generar números distribuídos de acuerdo con la variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}4$.