

## Modelos y Simulación

### Guía N°5: Generación de Variables Aleatorias Continuas

**Problema 1:** Desarrollar un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \end{cases} .$$

**Problema 2:** Desarrollar un método para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta) .$$

Una variable aleatoria con esta distribución se conoce como variable aleatoria de Weibull.

**Problema 3:** *Método de la composición:* Suponer que es relativamente fácil generar  $n$  variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Implementar un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x) .$$

donde  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son números no negativos cuya suma es 1.

**Problema 4:** Desarrollar un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^\infty x^y e^{-y} dy , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Pensar en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea  $F$  la función de distribución de  $X$  y suponga que la distribución condicional de  $X$  dado  $Y = y$  es

$$P(X \leq x | Y = y) = x^y , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

**Problema 5:** Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Explicar cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

a)  $F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x)$ ,                      b)  $F(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$  .

**Sugerencia:** Si  $X_i, i = 1, \dots, n$ , son variables aleatorias independientes, donde  $X_i$  tiene distribución  $F_i$ , ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a  $F$  en cada caso?

**Problema 6:** Utilizar el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Analizar la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de  $F$ .

**Problema 7:** Desarrollar dos métodos para generar una variable aleatoria con densidad de probabilidad  $f(x) = x e^{-x}, x \geq 0$ .

Comparar sus eficiencias.

**Problema 8:** Escribir dos programas para generar un variable aleatoria normal mediante

- a) la generación de variables exponenciales según el ejemplo 5f del libro *Simulación* de S. M. Ross,
- b) el método polar.

Probar los códigos calculando la media y varianza de 10000 valores generados con ambos métodos.

**Problema 9:** Sea en par  $(X, Y)$  uniformemente distribuido en un círculo de radio 1. Mostrar que si  $R$  es la distancia del punto  $(X, Y)$  al centro del círculo, entonces  $R^2$  está uniformemente distribuída en el intervalo  $(0, 1)$ .

**Problema 10:** Escribir un programa para generar las primeras  $T$  unidades de tiempo de un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$ .

**Problema 11:** Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto:  $\{20, 21, \dots, 40\}$  con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escribir un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante  $t = 1$  hora.

**Problema 12:**

- a) Escribir un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar las primeras diez unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}.$$

- b) Indicar una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para este ejemplo particular.