

Un método de generación de n exponenciales

Oscar Bustos – Patricia Kisbye

1. Introducción

En el capítulo 5 del libro *Simulation*, de Sheldon Ross ([1]), se presenta el siguiente algoritmo para la generación de valores de n variables aleatorias exponenciales independientes, de parámetro λ :

Algoritmo

Generar $U_1, \dots, U_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$;

$t \leftarrow -\frac{1}{\lambda} \log(U_1 \cdots U_n)$;

Generar $V_1, \dots, V_{n-1} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y ordenarlos de menor a mayor;

$X_1 \leftarrow t V_1$;

$X_2 \leftarrow t (V_2 - V_1)$;

\vdots

$X_{n-1} \leftarrow t (V_{n-1} - V_{n-2})$;

$X_n \leftarrow t - t V_{n-1}$

Las v.a. U_1, U_2, \dots, U_n son independientes, y la línea
 $t \leftarrow -\frac{1}{\lambda} \log(U_1 \cdots U_n)$
genera un valor t de una v.a. gamma de parámetros (n, λ) .

Afirmamos que X_1, X_2, \dots, X_n son v.a. exponenciales independientes de parámetro λ . Para ello, demostraremos que la función de densidad conjunta de las v.a. X_i es el producto de las densidades de n v.a. exponenciales de parámetro λ :

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot (-\lambda e^{-\lambda x_2}) \cdots (\lambda e^{-\lambda x_n})$$

Para esta demostración utilizaremos fuertemente el siguiente resultado:

Cambio de variables: Sea \mathbf{x} un vector aleatorio n -dimensional con densidad conjunta f . Si $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$, donde H es una transformación biyectiva y diferenciable, entonces \mathbf{y} tiene densidad g :

$$g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \left| \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} \right) \right|$$

donde el diferencial es el Jacobiano de la inversa de H evaluada en \mathbf{y} .

2. Caso $n = 2$

En este caso, el algoritmo se reduce a los siguientes pasos:

Algoritmo

Generar $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$;

$t \leftarrow -\frac{1}{\lambda} \log(U_1 \cdot U_2)$;

Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;

$X \leftarrow tV$;

$Y \leftarrow t - tV$

Consideremos las variables aleatorias independientes $Z \sim \gamma(2, \lambda)$ y $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$, y sean $X = ZV$ y $Y = Z - ZV$. Entonces Z y V se expresan en términos de X e Y como

$$Z = X + Y, \quad V = \frac{X}{X + Y}$$

De este modo, la transformación

$$H(v, z) = (vz, z - vz), \quad 0 < v < 1, z > 0$$

resulta biyectiva sobre su imagen, diferenciable y con inversa

$$H^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x + y}, x + y \right), \quad x, y > 0.$$

La densidad conjunta de X e Y está dada entonces por

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{V,Z}(v, z) \cdot J$$

donde $H(v, z) = (x, y)$ y J es el jacobiano de H^{-1} evaluado en (x, y) :

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x + y) & \frac{\partial}{\partial y}(x + y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x + y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x + y} \right) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{(x + y)^2} & \frac{x}{(x + y)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x + y}$$

Dado que V y Z son independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales:

$$f_{V,Z}(v, z) = 1_{(0,1)}(v) \cdot \lambda(\lambda z) e^{-\lambda z} 1_{(0,\infty)}(z)$$

Escribiendo v y z en términos de x e y concluimos que

$$f_{X,Y}(x, y) = (\lambda^2 (x + y) e^{-\lambda(x+y)}) \cdot \frac{1}{x + y} = (\lambda e^{-x}) \cdot (\lambda e^{-y}), \quad x, y > 0.$$

3. Caso $n > 2$

Supongamos ahora que se tienen n variables aleatorias $Z \sim \gamma(k, \lambda)$ y $V_1, V_2, \dots, V_{n-1} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ (ordenadas), y sean $V_0 = 0$ y $V_n = 1$ y $n > 2$. Afirmamos que las variables aleatorias dadas por

$$X_i = Z(V_i - V_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

son exponenciales de parámetro λ e independientes.

En efecto, las expresiones dadas en (1) determinan la transformación $H : A \times (0, \infty) \mapsto (0, \infty)^n$, con $A = \{(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \mid 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1} < 1\}$, dada por

$$H(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, z) = (v_1 z, (v_2 - v_1)z, \dots, (v_{n-1} - v_{n-2})z, z - v_{n-1}z)$$

con inversa

$$H^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, x_1 + x_2 + \dots + x_n \right)$$

De esta manera, la distribución conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n viene dada por

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{V_1, \dots, V_{n-1}, Z}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, z) \cdot J,$$

donde $H(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, z) = (x_1, \dots, x_n)$ y J es el jacobiano de H^{-1} . En este caso resulta más simple determinar el jacobiano de H y luego calcular su inversa, por lo cual calcularemos a continuación las derivadas parciales respecto de v_j , $1 \leq j \leq n-1$, y respecto de z , de cada una de las variables x_i tomadas como funciones de v_1, \dots, v_{n-1}, z .

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial v_j}(x_i)(v_1, \dots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} z & i = j \\ -z & i = j - 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\frac{\partial}{\partial v_j}(x_n)(v_1, \dots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} -z & j = n-1 \\ 1 - v_{n-1} & j = n \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z}(x_i)(v_1, \dots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} v_1 & i = 1 \\ (v_i - v_{i-1}) & 2 \leq i \leq n-1 \\ 1 - v_{n-1} & i = n \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz del jacobiano de H tiene la forma

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 \\ -z & z & 0 & 0 & \dots & 0 & v_2 - v_1 \\ 0 & -z & z & 0 & \dots & 0 & v_3 - v_2 \\ 0 & 0 & -z & z & \dots & 0 & v_4 - v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 1 - v_{n-1} \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz puede calcularse desarrollando por la última columna, y resulta igual a

$$(-1)^{n+1}v_1(-z)^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{n+j}(v_j - v_{j-1})z(-z)^{n-2} + (1 - v_{n-1})(z)^{n-1}.$$

Esta expresión es igual a

$$v_1 z^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j(v_j - v_{j-1})(z)^{n-1} + (1 - v_{n-1})(z)^{n-1} = z^{n-1}.$$

Finalmente, calculamos la densidad conjunta de las variables X_i , recordando que la densidad de Z viene dada por

$$f_Z(z) = \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!}, \quad z > 0$$

y que la densidad conjunta de $n - 1$ uniformes ordenadas tiene la expresión

$$f_{V_1, \dots, V_{n-1}}(v_1, \dots, v_{n-1}) = (n-1)!, \quad 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_n < 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{z^{n-1}} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)} = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda x_2}) \cdot \dots \cdot (\lambda e^{-\lambda x_n}) \end{aligned}$$

Referencias

- [1] Ross, Sheldon. *Simulation*. Academic Press. (2002)