Generación de variables aleatorias continuas
Método de rechazo

Patricia Kisbye

FaMAF

22 de abril, 2010

El método de rechazo

- Sea X una v. a. con densidad f: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
- Supongamos que se tiene un método para generar Y, con densidad g, y que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(y) \neq 0.$$

El método de rechazo para generar X a partir de Y tiene el siguiente algoritmo:

Método de rechazo

Algoritmo: Método de aceptación y rechazo

---

repeat
  Generar Y, con densidad g;
  Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
until $U < f(Y)/(cg(Y))$;
$X \leftarrow Y$

Teorema

1. La v. a. generada por el método de rechazo tiene densidad f.
2. El número de iteraciones del algoritmo es una variable aleatoria geométrica con media c.

Cálculo de la cota c

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Debe analizarse si $h(x)$ está acotada superiormente.

- Determinar máximos locales de h.
- Evaluar h en los extremos (finitos) del intervalo.
- Analizar si h posee máximos absolutos.
- Determinar el máximo de h en base a la información anterior.

Ejemplo

Ejemplo

Utilizar el método de rechazo para generar una v. a. con función de densidad

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \qquad 0 < x < 1.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x) \qquad \text{Variable } \beta}$$

- X es una v. a. Beta $(2, 4)$.
- Está acotada en $(0, 1)$.
- Se puede aplicar el método de rechazo con $g(x) = 1$, $0 < x < 1$.
- Hallar c tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{1} \leq c$$

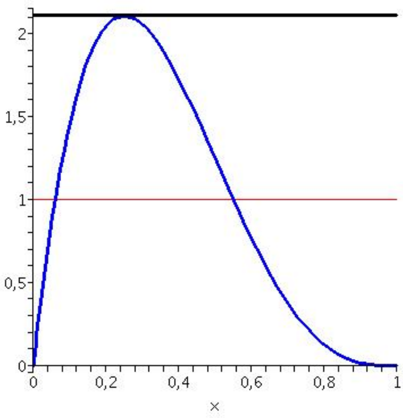
Ejemplo

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{f(x)}{1} = 20x(1-x)^3, \qquad 0 < x < 1 \\
h'(x) &= 20(1-x)^2 \cdot (1-4x)
\end{aligned}
$$

- Puntos críticos: $x = 1/4$.
- $h(0) = h(1) = 0$, luego 0 y 1 no son máximos.
- $h(1/4) > 0$, por lo tanto $x = 1/4$ es un máximo.
- $h(1/4) = 135/64$ es el valor máximo de h

$$\boxed{c = \frac{135}{64} = 2.109375}$$

Ejemplo



- Puntos críticos: $x = 1/4$.
- $h(1) = h(0) = 0$, luego no es un máximo.
- $x = 1/4$ es un máximo.
- $h(1/4) = 135/64$ es el valor máximo: c.

Ejemplo

$$\frac{f(x)}{c\,g(x)} = \frac{f(x)}{135/64} = \frac{1280}{135}x(1-x)^3 = \frac{256}{27}x(1-x)^3$$

Algoritmo: Método de aceptación y rechazo

repeat
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
  Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
until $U < \frac{256}{27}V(1-V)^3$;
$X \leftarrow V$

- El promedio del número de ciclos es $c = \dfrac{135}{64} \approx 2.11$.

Ejemplo

Ejemplo

Generar una v. a. con densidad gamma $(\frac{3}{2}, 1)$:

$$f(x) = Kx^{1/2}e^{-x}, \qquad x > 0,$$

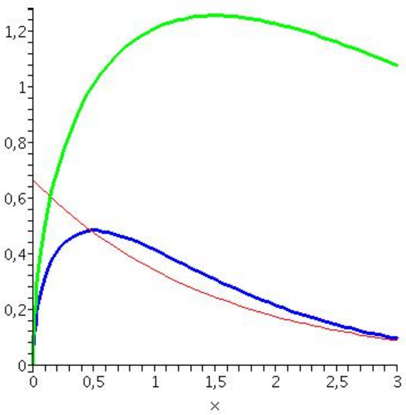
con $K = 1/\Gamma(\frac{3}{2}) = 2/\sqrt{\pi}$.

$$X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}.$$

$$E[X] = \alpha/\beta.$$

- X toma valores reales, no negativos.
- En el ejemplo, la media es $3/2$.
- Es razonable rechazar con una exponencial de igual media.

Ejemplo: generación de gamma $(\frac{3}{2}, 1)$



- $Y \sim \mathcal{E}(\frac{2}{3})$
- $g(x) = \frac{2}{3} e^{-2/3\,x}, \qquad x > 0.$
- $f(x)/g(x) = \frac{3K}{2} x^{1/2} e^{-x/3}$
- $c = 3 \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{1/2}$

Ejemplo: generación de gamma $(\frac{3}{2}, 1)$

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \left(\frac{2e}{3}\right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x/3}$$

Algoritmo: Método de rechazo

repeat
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
  $Y \leftarrow -\frac{3}{2}\log(V)$;
  Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
until $U < \left(\frac{2e}{3}\right)^{1/2} Y^{1/2} e^{-Y/3}$;
$X \leftarrow Y$

$$\boxed{c = 3\left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{1/2} \approx 1.257}$$

Ejemplo

- ¿Es cierto que es ”razonable” rechazar con una exponencial de igual media que la gamma?

Tomamos $g(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, exponencial con razón λ, media $1/\lambda$. Obtenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Kx^{1/2}e^{-(1-\lambda)x}}{\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1$$

Máximo en $\rightarrow$ $x = \dfrac{1}{2(1-\lambda)}, \qquad 0 < \lambda < 1.$

Valor máximo $\rightarrow$ $c = \dfrac{K}{\lambda}(2(1-\lambda))^{-1/2}e^{-1/2}.$

$$\boxed{\lambda = \frac{2}{3} \text{ minimiza el valor de } c.}$$

Generación de una v. a. normal

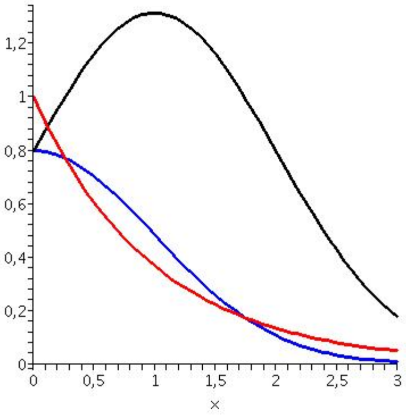
Ejemplo

Generar una v. a. normal estándar, es decir, Z con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

- $|Z|$ tiene densidad $f_{|Z|}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, en $0 < x < \infty$.
- Si sabemos generar $|Z|$, generamos Z por composición.

Generación de una v. a. normal



Para generar $|Z|$:

- Elegimos $g(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$.
- Resulta $c = \sqrt{2e/\pi}$
- $c \approx 1.32$.

Generación de una v. a. normal

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}.$$

Generación de $|Z|$

---

repeat
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
  $Y \leftarrow -\log(V)$;
  Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
until $U < exp\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\}$;
$|Z| \leftarrow Y$

- $U < exp\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\}$
- $-\log(U) > \frac{(Y-1)^2}{2}$
- $Y_2 = -\log(U) \sim \mathcal{E}(1)$.

Generación de una v. a. normal

Generación de $|Z|$

repeat
  Generar $Y_1 \sim \mathcal{E}(1)$;
  Generar $Y_2 \sim \mathcal{E}(1)$
until $Y_2 > (Y_1 - 1)^2/2\}$;
$|Z| \leftarrow Y_1$

- Si $Y_2 > (Y_1 - 1)^2/2\}$, entonces $X = Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$ es exponencial con media 1, por la propiedad de *falta de memoria*.
- Luego podemos generar la normal y también una exponencial.

Generación de una v. a. normal

Generación de Z normal y X exponencial

repeat
    Generar $Y_1 \sim \mathcal{E}(1)$;
    Generar $Y_2 \sim \mathcal{E}(1)$
until $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2 > 0$;
$X \leftarrow Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$;
Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
if $U < 0.5$ **then**
    $Z = Y_1$
else
    $Z = -Y_1$
end

Generación de una v. a. normal

Observaciones.

- $c \approx 1.32$.
- Para generar una secuencia de normales, se puede utilizar X como siguiente exponencial:
- en promedio, se necesitan generar 1.64 exponenciales y calcular 1.32 cuadrados.