Ejemplos de variables aleatorias

FaMAF

16 de marzo, 2010

Uniforme

$$U\{1, n\}$$

n valores igualmente probables

- Rango: $\{1, \ldots, n\}$
- Función de masa:
$$P(X = i) = \frac{1}{n}.$$
- Valor esperado:
$$E[X] = \frac{n+1}{2}.$$
- Varianza:
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Bernoulli

Éxito o fracaso

- Rango: $\{0, 1\}$
- Función de masa:

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = 1 - p.$$

- Valor esperado:

$$E[X] = p.$$

- Varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = p \cdot (1 - p).$$

Binomial

$$Bi(n, p)$$

Número de éxitos en n ensayos independientes, con probabilidad p de éxito.

- Rango: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$
- Función de masa:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}.$$

- Valor esperado:

$$E[X] = n\,p.$$

- Varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = n\,p\,(1 - p).$$

- Fórmula recursiva:

$$p_{i+1} = \frac{n - i}{i + 1} \frac{p}{(1 - p)} p_i.$$

Poisson

$$P(\lambda).$$

Número de éxitos en una cantidad grande de ensayos independientes

- Rango: $\{0, 1, 2, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$
- Función de masa:
$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$
- Valor esperado:
$$E[X] = \lambda.$$
- Varianza:
$$\text{Var}(X) = \lambda.$$
- Fórmula recursiva:
$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i.$$

Geométrica

$$\text{Geom}(p).$$

Número de ensayos independientes hasta el primer éxito

- Rango: $\mathbb{N}$.
- Función de masa:

$$P(X = n) = p\,(1 - p)^{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

- Valor esperado:

$$E[X] = \frac{1}{p}.$$

- Varianza:

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Binomial Negativa o Pascal

$$\text{Bn}(r, p)$$

Número de ensayos independientes hasta obtener r éxitos

- Rango: $\{r, r+1, r+2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq r\}$.
- Función de masa:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \qquad n \geq r.$$

- Valor esperado:

$$E[X] = \frac{r}{p}.$$

- Varianza:

$$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Hipergeométrica

Número de éxitos en una muestra de tamaño n extraída de un conjunto de $N+M$ elementos

- Rango: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$
- Función de masa:

$$P(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}.$$

- Valor esperado:

$$E[X] = \frac{nN}{N+M}.$$

- Varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right).$$

Variables aleatorias continuas

Definición

Una variable aleatoria X se dice continua si existe $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$P(X \in C) = \int_C f(x)\,dx.$$

Ejemplos:

- Uniforme: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- Normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- Exponencial: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- Otras: Gamma, Weibull, χ^2, t-Student, ...

Distribución uniforme

Definición

X se dice uniformemente distribuida en (a, b) si su función de densidad está dada por

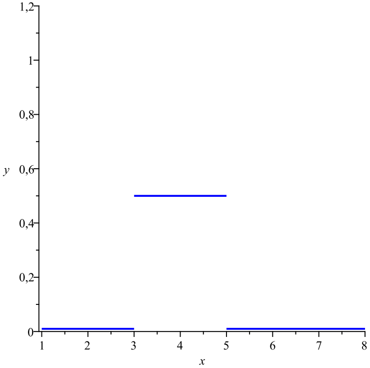
$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

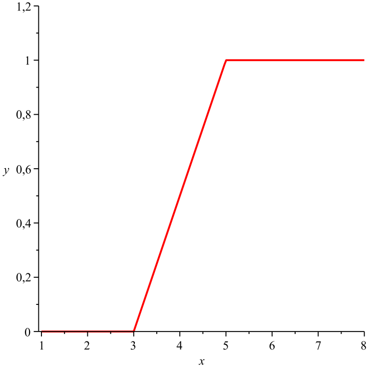
- Función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$.
- $Var(X) = \dfrac{1}{12}(b-a)^2$.

Gráficos





$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{(3,5)}(x) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2} & 3 < x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Distribución Normal

Definición

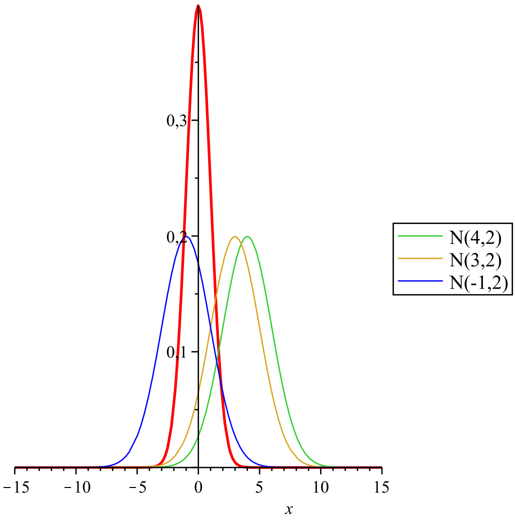
La v.a. X se dice normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2 si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
- Notación: $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Distribución normal estándar: $Z \sim N(0, 1)$.

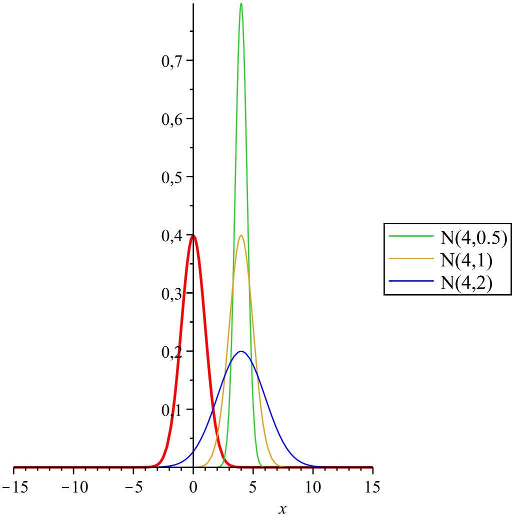
$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Variando μ

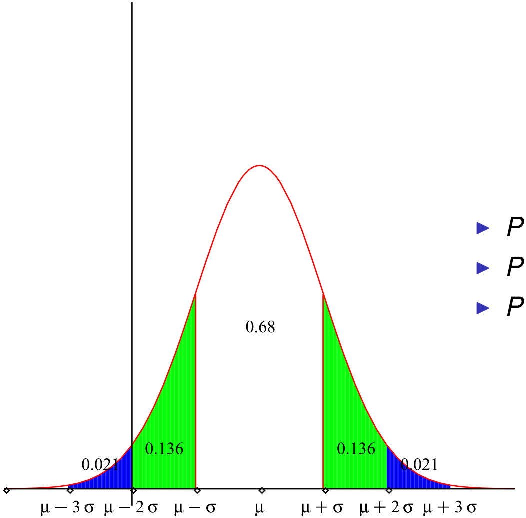


- Máximo: $x = \mu$
- Valor Máximo: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0.398$
- $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} \simeq 0.2$

Variando σ



La desviación estándar



- $P(|X-\mu|<\sigma) \simeq 68\%$
- $P(|X-\mu|<2\sigma) \simeq 95\%$
- $P(|X-\mu|<3\sigma) \simeq 99.7\%$

Distribución Normal estándar

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

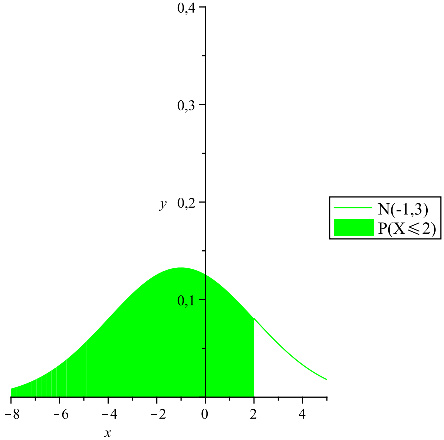
- No existe una fórmula cerrada para $\Phi(x)$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces

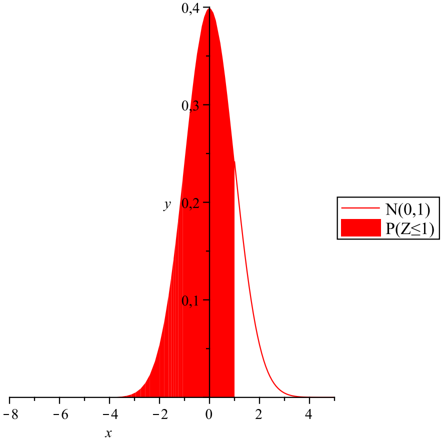
$$aX + b \sim N(a\mu + b, |a|\sigma).$$

- $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim Z = N(0,1)$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma)$,

$$\boxed{P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right).}$$

La función $\Phi(x)$





$$P(X \leq 2) = P(Z \leq 1) = \Phi(1).$$

Valores de $\Phi(x)$

- Para $\alpha \in (0, 1)$, z_α es el número real tal que

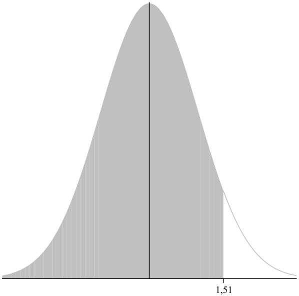
$$P(Z > z_\alpha) = \alpha.$$

- Los valores de $\Phi(z)$ están tabulados:

$$\boxed{\Phi(z_\alpha) = P(Z \leq \alpha) = 1 - \alpha}$$

- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, por lo tanto es suficiente tabular para $z \geq 0$, o $z \leq 0$.

Tabla de $\Phi(z)$

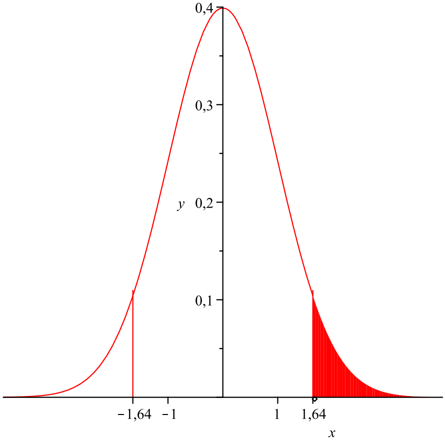


$Z \sim N(0, 1)$

$P(Z \leq 1.51) = 0.93448$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0	0.5	0.50399	0.50398	0.51197
$\vdots$				
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
$\vdots$				

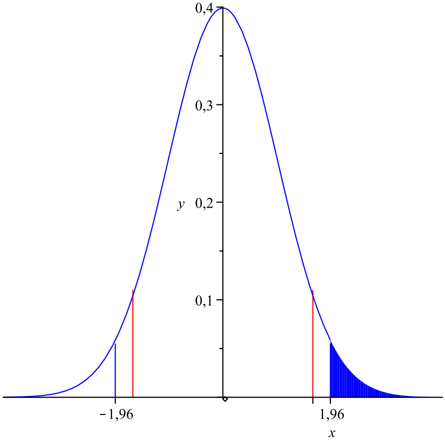
Valores frecuentes de z_α



- $\alpha = 0.05$
- $z_\alpha = 1.64$

$$P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) = 0.90$$

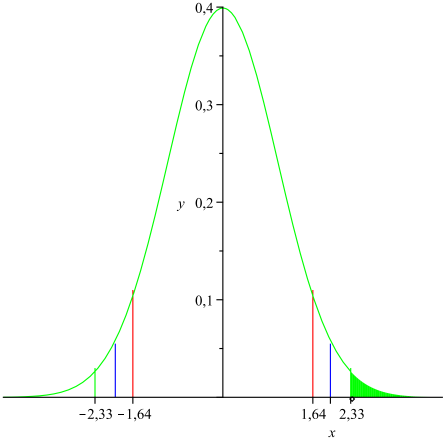
Valores frecuentes de z_α



- $\alpha = 0.025$
- $z_\alpha = 1.96$

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

Valores frecuentes de z_α



- $\alpha = 0.01$
- $z_\alpha = 2.33$

$$P(-2.33 \leq Z \leq 2.33) = 0.99$$

Teorema Central del límite

Teorema (Teorema Central del Límite)

Sean $X_1, X_2, \ldots,$ variables aleatorias igualmente distribuidas, con media μ y varianza σ^2. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x).$$

Distribución exponencial

Definición

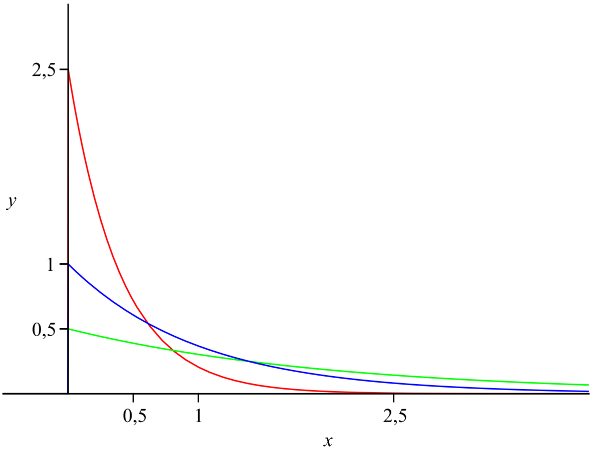
Una v.a. X con función de densidad dada por

$$f_\lambda(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

para cierto $\lambda > 0$ se dice una v.a. exponencial con parámetro λ.

- $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Función de densidad



Propiedades

- Una variable aleatoria con distribución exponencial tiene falta de memoria.
$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$
- Son las únicas v.a. continuas con falta de memoria.
- El análogo en el caso discreto son las v.a. geométricas.
- Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, entonces $c\,X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{c}\lambda)$.

Mínimo de exponenciales

Sean X_1, X_2, ..., X_n son v.a. independientes con f.d.a. F_1, F_2, ..., F_n, y sea

$$\boxed{M = \min_{1 \le i \le n} \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}}.$$

Entonces

$$1 - F_M(x) = P(M > x) = (1 - F_1(x)) \cdot (1 - F_2(x)) \cdots (1 - F_n(x)).$$

Si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, entonces

$$1 - F_X(x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \ldots e^{-\lambda_n x} = e^{-(\sum_i \lambda_i)\, x}.$$

$$\boxed{M \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).}$$