Procesos de Poisson

FaMAF

18 de marzo, 2010

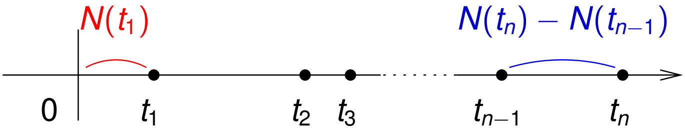
Proceso de Poisson homogéneo

$$N(t), \quad t \geq 0,$$

es un proceso de Poisson homogéneo de razón λ, $\lambda > 0$, si:

- $N(0) = 0$
- para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se tiene que $N(t_0)$, $N(t_1) - N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
- Para cada $t \geq 0$, $s > 0$, se cumple que la distribución de $N(t+s) - N(t)$ es igual a la de $N(s)$.
- $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(h) = 1)}{h} = \lambda,$
- $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0.$

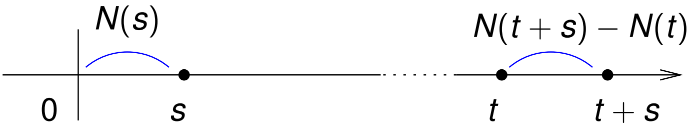
Incrementos independientes



- $N(t_1)$: nro. de llegadas hasta $t = t_1$.
- $N(t_n) - N(t_{n-1})$: nro. de llegadas entre t_{n-1} y t_n.

En dos intervalos de tiempo disjuntos, las variables "número de llegadas" son independientes.

Incrementos estacionarios



La distribución del número de llegadas en un intervalo dado de tiempo depende sólo de la longitud del intervalo.

$$N(s) \sim N(t+s) - N(t), \qquad s < t.$$

Homogeneidad temporal: La distribución depende del período de observación y no de su posición.

Ocurrencia de 1 o más eventos

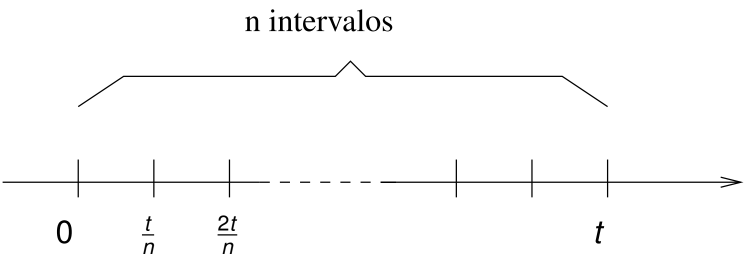
$$\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h) = 1)}{h} = \lambda,$$

- La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional al tamaño del intervalo. Constante = λ.

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0.$$

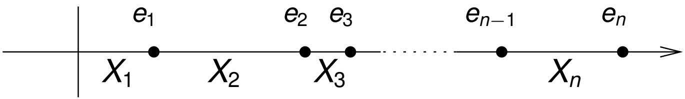
- La probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos en un intervalo muy pequeño es cero. Es decir, no hay probabilidad de ocurrencia de más de un evento en un mismo instante.

La variable aleatoria $N(t)$



- En cada subintervalo, el número de llegadas es una v.a. Bernoulli, con $p = \lambda \frac{t}{n}$
- $N(t)$, nro. de llegadas en el intervalo $(0, t]$, es una v.a. binomial, que para n grande converge a una Poisson, con media $n \cdot \lambda \frac{t}{n} = \lambda t$.
- $N(t)$ es una variable aleatoria Poisson de media $\lambda \cdot t$.

Tiempos entre arribos



- e_i: tiempo en que ocurre el evento i.
- X_1: tiempo transcurrido hasta el primer evento.
- X_j: tiempo transcurrido entre el $(j-1)$-ésimo evento y el j-ésimo, para $j > 1$.

  $\{X_j\}$ es la sucesión de tiempos entre arribos

- X_1 es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

Tiempo entre arribos

$$
\begin{aligned}
P(X_2 > t \mid X_1 = s) &= P(0 \text{ eventos en } (s, s+t] \mid X_1 = s) \\
&= P(0 \text{ eventos en } (s, s+t]) \\
&= e^{-\lambda\, t}
\end{aligned}
$$

$X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, y es independiente de X_1.

Sea $s = s_1 + \cdots + s_{j-1}$: tiempo hasta el evento $j - 1$.

$$
\begin{aligned}
P(0 \text{ eventos en } (s, s+t] &\mid X_1 = s_1, \ldots, X_{j-1} = s_{j-1}) \\
\text{(incrementos independientes)} &= P(0 \text{ eventos en } (s, s+t]) \\
\text{(incrementos estacionarios)} &= e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

Distribución de los tiempos entre arribos

Proposición

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots,$ son v.a. independientes, igualmente distribuidas, con distribución exponencial con parámetro λ.

$$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \qquad i = 1, 2, \dots.$$

Variable aleatoria gamma

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

S_n: es el tiempo de arribo del n-ésimo evento.

$$f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Definición

Una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

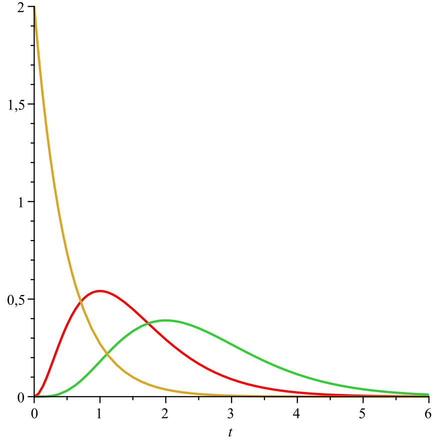
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

se dice una variable aleatoria gamma con parámetros (n, λ).

Variable aleatoria gamma

Corolario

La suma de n variables aleatorias exponenciales independientes, cada una de ellas de parámetro λ, es una variable aleatoria Gamma de parámetro (n, λ).



- $\Gamma(2, 2)$
- $\Gamma(5, 2)$
- $\Gamma(1, 2) \sim \mathcal{E}(2)$

El proceso de Poisson no homogéneo

$$N(t), \quad t \geq 0$$

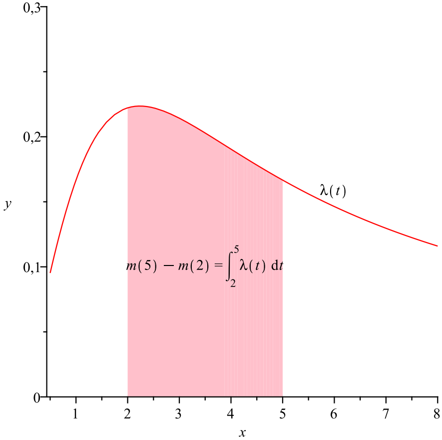
es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si:

1. $N(0) = 0$
2. para cada $n \geq 1$ y cada partición $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se tiene que $N(t_0), N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
3. $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(t+h) - N(t) = 1)}{h} = \lambda(t)$,
4. $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N(t+h) - N(t) = 1) \geq 2)}{h} = 0$.

Valor medio del proceso

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

- Si $\lambda(t) = \lambda$, constante, entonces $m(t) = \lambda \cdot t$.



Número de eventos en $(t, t+s]$

Proposición

Para cada $t \geq 0$ y $s > 0$ se tiene que $N(t+s) - N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media

$$m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(x)\, dx.$$

Corolario

Si $\lambda(t) = \lambda$ (es constante), $N(t+s) - N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media λs.