Integración por el método de Monte Carlo

Patricia Kisbye

FaMAF

25 de marzo, 2010

El método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un procedimiento general para seleccionar muestras aleatorias de una población utilizando números aleatorios.

La denominación Monte Carlo fue popularizado por los científicos Stanislaw Ulam, Enrico Fermi, John von Neumann, y Nicholas Metropolis, entre otros, quienes ya trabajaban sobre *muestreo estadístico*.
Hace referencia al Casino de Montecarlo en Mónaco.

Aplicación en cálculos matemáticos

Este método se utiliza para calcular numéricamente expresiones matemáticamente complejas y difíciles de evaluar con exactitud, o que no pueden resolverse analíticamente.
Algunos ejemplos son:

- Cálculo de integrales definidas
- Aproximaciones al valor de π.

Cálculo de integrales definidas

Se tienen en cuenta los siguientes resultados:

- Si X es una variable aleatoria con densidad f y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función, entonces el valor esperado de la v. a. $g(X)$ es

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx.$$

- Ley Fuerte de los Grandes Números: Si $X_1,\ X_2, \ldots$ es una sucesión de v. a. i. i. d., todas con media μ, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n}{n} = \mu.$$

Integración sobre $(0, 1)$

Ejemplo

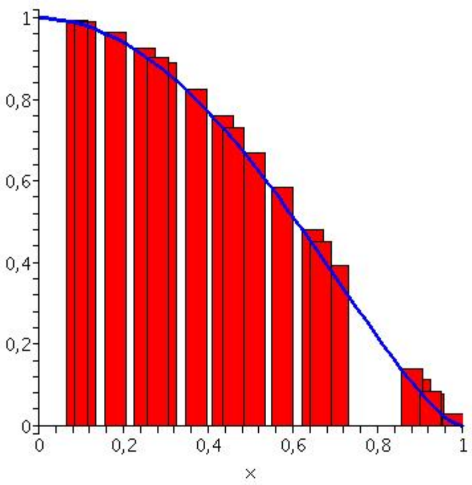
Calcular $\quad \theta = \int_0^1 g(x)\, dx.$

Si $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, entonces $\quad \theta = E[g(X)].$

Si $U_1,\ U_2, \ldots$ v.a.i.i.d., uniformes en $(0, 1)$, entonces $g(U_1),\ g(U_2), \ldots$ son v.a.i.i.d., con media θ. Luego

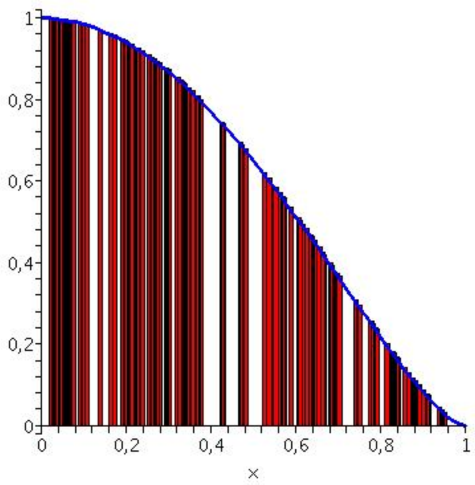
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(U_i)}{n} = \theta.$$

$g(x) = (1 - x^2)^{3/2}$



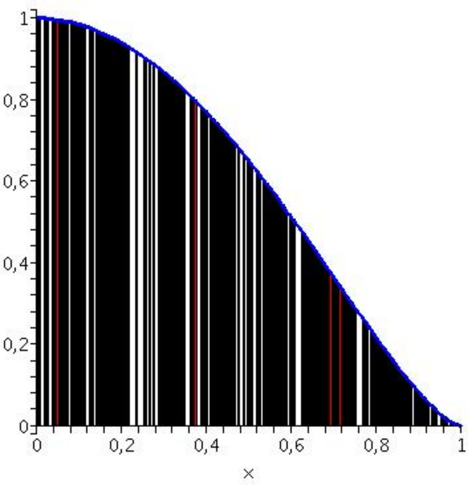
$n = 20$, Área=0.5019617835

$$g(x) = (1 - x^2)^{3/2}$$



$n = 100$, Área= 0.4946866190

$g(x) = (1 - x^2)^{3/2}$



$n = 300$, Área=0.6067846103

$g(x) = (1 - x^2)^{3/2}$

Analíticamente:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{3\,\pi}{16} \approx 0.5890486226$$

Por Monte Carlo

n	Aproximación
20	0.5019617835
100	0.4946866190
300	0.6067846103
1000	0.5959810476
10000	0.5895682376

Integración sobre (a, b)

Ejemplo

Calcular $\quad \theta = \int_a^b g(x)\,dx$, con $a < b$.

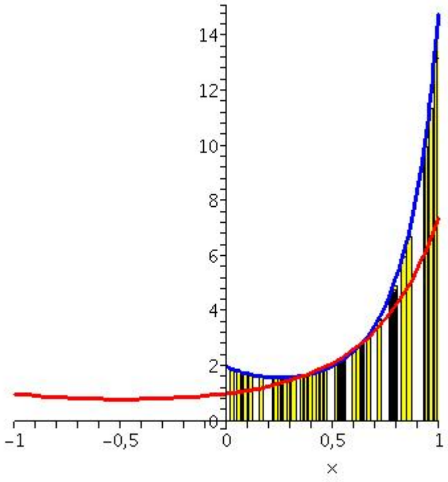
Realizamos el cambio de variables

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \qquad\qquad dy = \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_0^1 g(a+(b-a)y)(b-a)\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy.$$

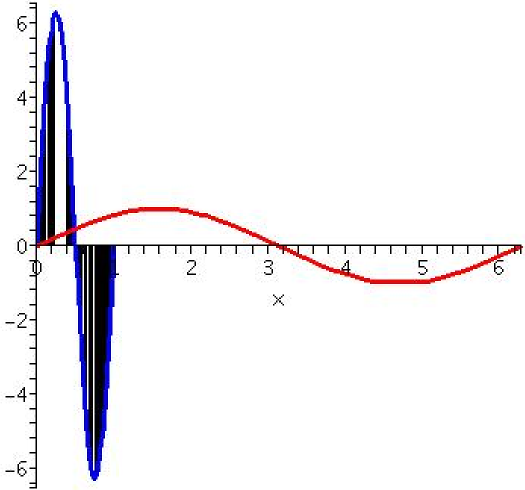
Integración en (a, b)

$$g(x) = e^{x+x^2} \text{ en } (-1, 1)$$



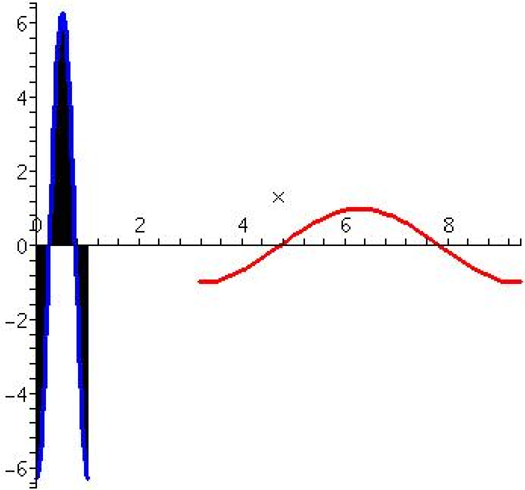
Integración en (a, b)

$$g(x) = \operatorname{sen}(x) \text{ en } (0, 2\pi)$$



Integración en (a, b)

$$g(x) = \cos(x) \text{ en } (\pi, 3\pi)$$



Integración sobre $(0, \infty)$

Ejemplo

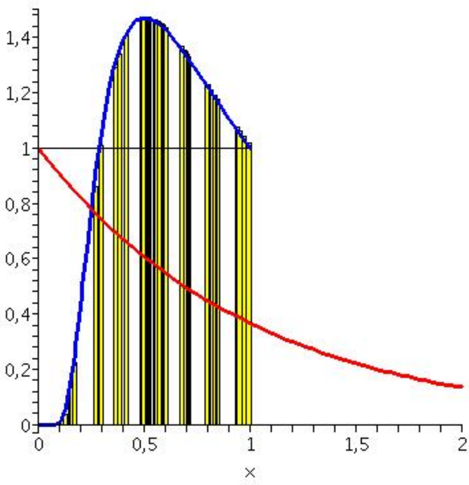
Calcular $\quad \theta = \int_0^\infty g(x)\, dx$.

Realizamos el cambio de variables

$$y = \frac{1}{x+1}, \qquad\qquad dy = -\frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -y^2\, dx$$

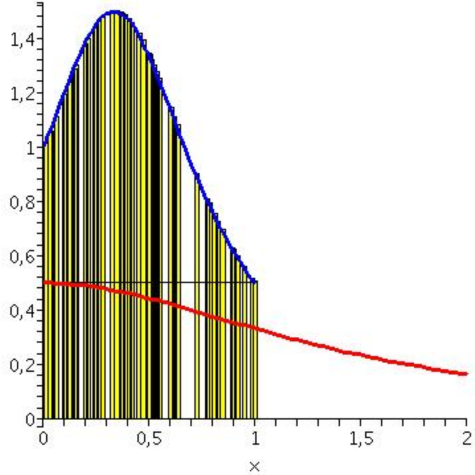
$$\int_0^\infty g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{g(\frac{1}{y} - 1)}{y^2}\, dy = \int_0^1 h(y)\, dy.$$

Integración sobre $(0, \infty)$



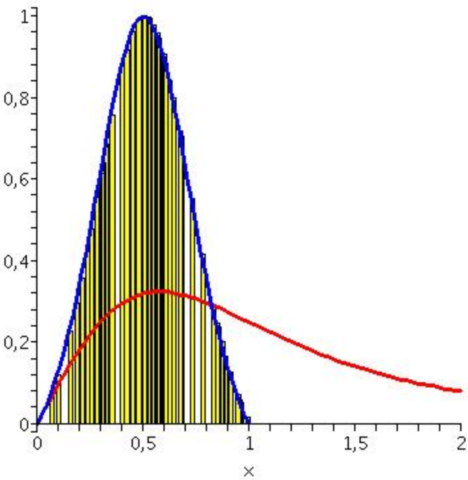
$g(x) = e^{-x}$

Integración sobre $(0, \infty)$



$$g(x) = \frac{1}{(2 + x^2)}$$

Integración sobre $(0, \infty)$



$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

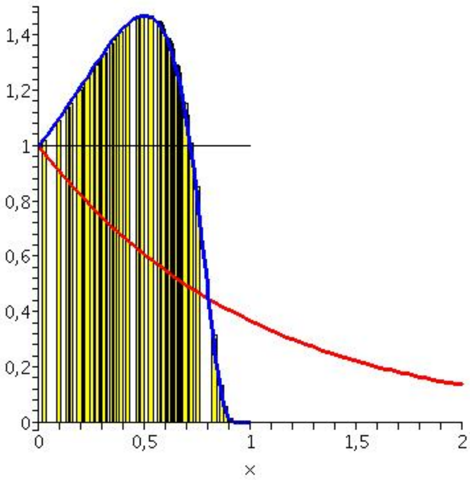
Integración sobre $(0, \infty)$

Si usamos el siguiente cambio de variables

$$y = 1 - \frac{1}{x+1}, \qquad dy = (y-1)^2,$$

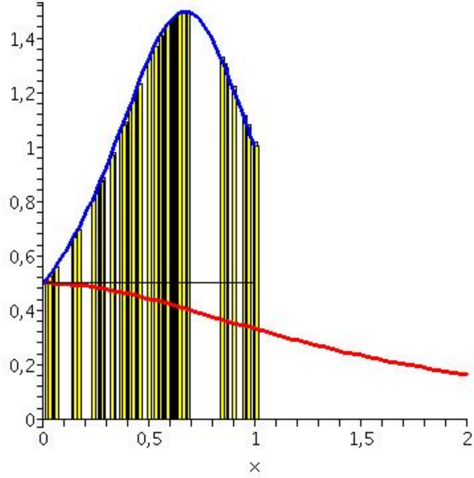
entonces la transformación está dada por una función creciente $y : [0, \infty] \mapsto [0, 1)$. Se tienen entonces los siguientes gráficos:

Integración sobre $(0, \infty)$



$g(x) = e^{-x}$

Integración sobre $(0, \infty)$



$$g(x) = \frac{1}{(2 + x^2)}$$

Integrales múltiples

El método de Monte Carlo para el cálculo de integrales en una variable no es muy eficiente, comparado con otros métodos numéricos que convergen más rápidamente al valor de la integral.
Pero sí cobra importancia en el caso del cálculo numérico de integrales múltiples:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, \dots, x_l)\, dx_1 \dots dx_l$$

Integrales múltiples

Para calcular la cantidad

$$\theta = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, \dots, x_l)\, dx_1 \dots dx_l$$

utilizamos el hecho que

$$\theta = E[g(U_1, \dots, U_l)]$$

con $U_1, \dots, U_l$ independientes y uniformes en $(0, 1)$.

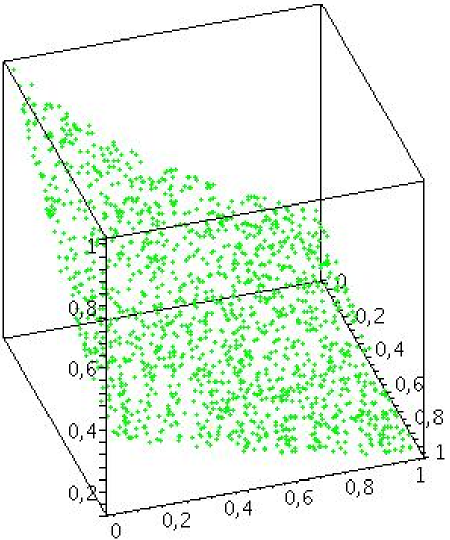
Si

$$U_1^1, \ldots, U_l^1$$
$$U_1^2, \ldots, U_l^2$$
$$\vdots$$
$$U_1^n, \ldots, U_l^n$$

son n muestras independientes de estas l variables, podemos estimar

$$\theta \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{g(U_1^i, \ldots, U_l^i)}{n}$$

$g(x, y) = e^{-(x+y)}$ en $(0, 1) \times (0, 1)$

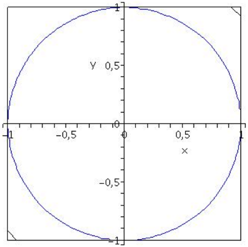


Cálculo aproximado el valor de π

Una aplicación a las integrales múltiples es el cálculo aproximado del valor de π.

Recordemos que el área de un círculo de radio r es $\pi \cdot r^2$, y por lo tanto π está dado por el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{I}_{\{x^2+y^2<1\}}(x,y)\, dx\, dy.$$



Cálculo aproximado el valor de π

Si X e Y son v.a.i.i.d., uniformes en $(-1, 1)$, ambas con densidad $f(x) = \dfrac{1}{2}$ en $(-1, 1)$, entonces su densidad conjunta será:

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{4}, \qquad \text{en } (0, 1) \times (0, 1).$$

Por lo tanto (X, Y) es un vector con distribución uniforme en $(0, 1) \times (0, 1)$.

Cálculo de π

Si $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$, entonces

$$X = 2U_1 - 1 \qquad Y = 2U_2 - 1$$

verifican $X,\ Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

entonces

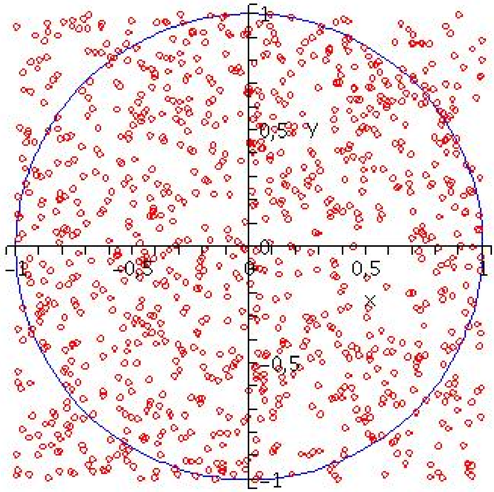
$$E[I] = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Algoritmo para el cálculo de π

Algoritmo: Generar π

```
PI ← 0;
for i = 0 to n do
    Generar U, V ~ 𝒰(0, 1);
    X ← 2U − 1;
    Y ← 2V − 1;
    if X² + Y² ≤ 1 then
        PI ← PI + 1
    end
end
PI ← 4 * PI/n
```

Cálculo aproximado el valor de π



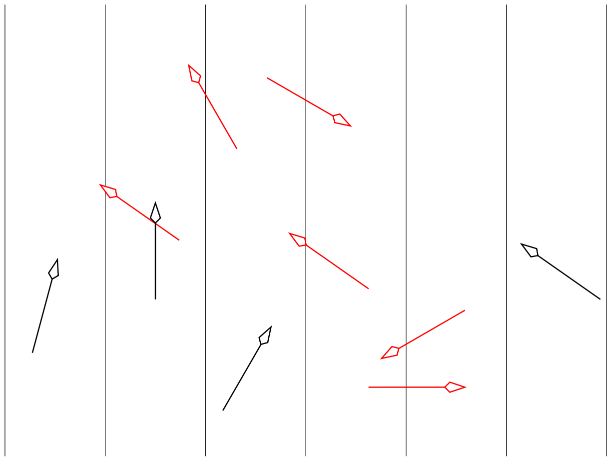
La aguja de Buffon

Un problema planteado en el s. XVIII por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, fue la siguiente:

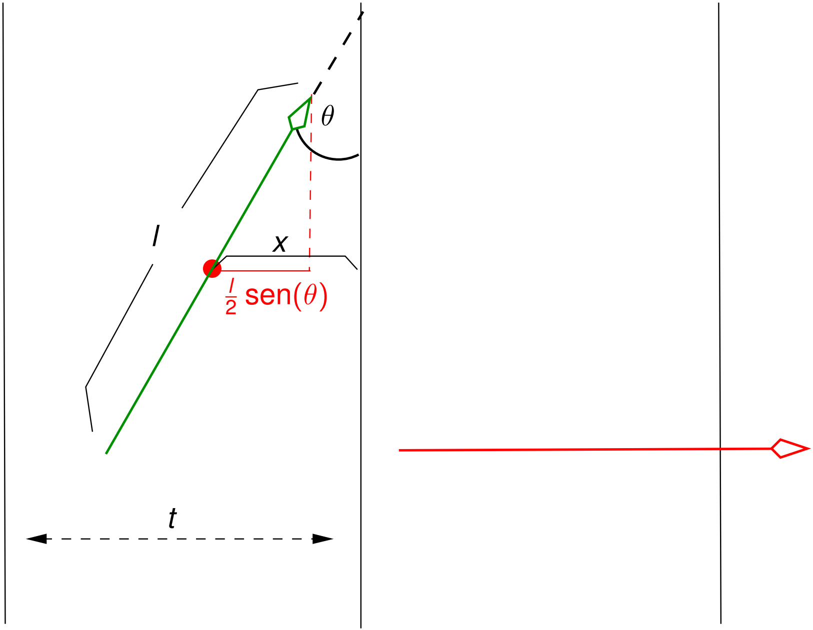
Se tienen rectas paralelas equidistantes entre sí, y se arroja una aguja de longitud mayor o igual a la distancia entre dos rectas.

¿Cuál es la probabilidad que una aguja corte a una de las rectas?

La aguja de Buffon



La aguja de Buffon



La aguja de Buffon

- t la distancia entre las rectas.
- l la longitud de la aguja.
- θ la medida del ángulo agudo entre la aguja (o su prolongación) y una de las rectas.
- x la distancia entre el punto medio de la aguja y la recta más cercana

x y θ son v.a. uniformes con distribución $f(x)$ y $g(\theta)$:

$$f(x) = \frac{2}{t}, \qquad g(\theta) = \frac{2}{\pi}.$$

La aguja de Buffon

Una aguja cortará la recta si y sólo si la distancia de su centro a una de las rectas es menor que $\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)$, es decir

$$x < \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

$$P(\text{la aguja corte la recta}) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)} \frac{2}{t}\frac{2}{\pi}\, dx\, d\theta$$

$$P(\text{la aguja corte la recta}) = \frac{2l}{\pi\, t}.$$

Tomando $l = t$, obtenemos aproximaciones a $\frac{2}{\pi}$.