Generación de variables aleatorias discretas
Método de aceptación y rechazo
Método de composición

Patricia Kisbye

FaMAF

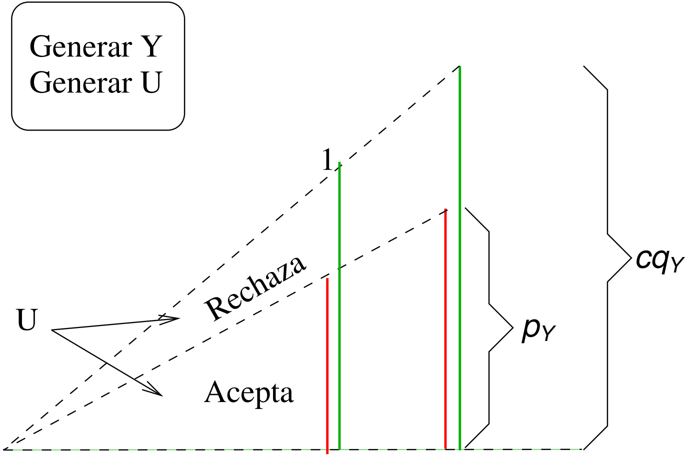
6 de abril, 2010

Método de Aceptación y Rechazo

- Se desea simular una v. a. X discreta, con probabilidad de masa $p_j = P(X = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.
- Hipótesis: Se conoce un método eficiente para generar una v.a. Y, con probabilidad de masa $q_j = P(Y = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, que verifica
  - Si $p_j \neq 0$ entonces $q_j \neq 0$.
  - Existe una constante c ($c > 1$) tal que

$$\frac{p_j}{q_j} \leq c \qquad \text{para todo } j \text{ tal que } p_j > 0$$

Método de Aceptación y Rechazo



Método de Aceptación y Rechazo

Algoritmo: Método de aceptación y rechazo

---

repeat
  Simular Y, con probabilidad de masa q_Y;
  Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
until $U < p_Y/cq_Y$;
$X \leftarrow Y$

Teorema

El algoritmo de aceptación y rechazo genera una variable aleatoria tal que

$$P(X_j) = p_j, \qquad j = 0, 1, \ldots .$$

Además, el número de iteraciones requeridas para obtener X es una v.a. geométrica con media c.

Probabilidad de que $X = j$

- $X = j$ si y sólo si $Y = j$ es aceptado en alguna iteración:

$$P(X = j) = \sum_{k \geq 1} P(j \text{ es aceptado en la iteración } k)$$

- j es aceptado en la iteración k significa que Y es rechazado $k - 1$ veces e $Y = j$ es aceptado en la iteración k:

  $P(j \text{ aceptado en la iteración } k) =$

  $P(Y \text{ rechazado } k-1 \text{ veces }) \, P(Y = j \text{ aceptado en la iteración } k)$

$P(X = j)$

- Probabilidad de aceptar Y.

$$P(Y \text{ sea aceptado}) = \sum_k P(Y = k \wedge Y \text{ es aceptado })$$

- Probabilidad de aceptar $Y = k$

$$\begin{aligned} P(Y = k \wedge Y \text{ es aceptado}) &= P(Y = k)P(Y \text{es aceptado } \mid Y = k) \\ &= q_k \frac{p_k}{cq_k} \\ &= \frac{p_k}{c} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y \text{ sea aceptado}) = \sum_k \frac{p_k}{c} = \frac{1}{c}}$$

$P(X = j)$

- $P(X = j) = P(j \text{ sea aceptado en alguna iteración})$

$$P(j \text{ sea aceptado en la iteración } k) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{k-1} \frac{p_j}{c}$$

$$P(X = j) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \frac{p_j}{c} = p_j$$

Ejemplo: Método de rechazo

Ejemplo

Generar una v.a. X con valores en $\{1, 2, \ldots, 10\}$ y probabilidades $0.11,\ 0.12,\ 0.09,\ 0.08,\ 0.12,\ 0.10,\ 0.09,\ 0.09,\ 0.10,\ 0.10$

- Método de la transformada inversa: implica una media (mínima) de 5,04 iteraciones.
- Método de aceptación y rechazo: $c = 1.2$. La media de iteraciones es 1,2.

Método de Composición

Se tienen métodos eficientes para generar valores de v. a. X_1 y X_2, con funciones de probabilidad de masa

$$X_1 : \{p_j \quad j = 0, 1, \dots\} \qquad X_2 : \{q_j \quad j = 0, 1, \dots.\}$$

El método de composición permite generar una v.a. X con función de probabilidad de masa

$$P(X = j) = \alpha p_j + (1 - \alpha) q_j \qquad j = 0, 1, \dots, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{con probabilidad } \alpha \\ X_2 & \text{con probabilidad } 1 - \alpha \end{cases}$$

Método de Composición

Algoritmo: Método de composición para dos v.a.

Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
if $U < \alpha$ **then**
    $X \leftarrow X_1$
else
    $X \leftarrow X_2$
end

$$
\begin{aligned}
P(X = j) &= P(U < \alpha,\ X_1 = j) + P(\alpha < U < 1,\ X_2 = j) \\
&= P(U < \alpha)\, P(X_1 = j) + P(\alpha < U < 1)\, P(X_2 = j) \\
&= \alpha\, p_j + (1 - \alpha)\, q_j
\end{aligned}
$$

Método de composición

Ejemplo

Generar X tal que

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.05 & \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15 & \text{para } j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

$(0.05) \cdot 5 = 0.25$
$(0.15) \cdot 5 = 0.75$

Algoritmo

Generar $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
if $U < 0.75$ **then**
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
  $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 6$
else
  Generar $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
  $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 1$
end

Método de composición

Ejemplo

Generar X tal que

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.05 & \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15 & \text{para } j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

(0.05)·10=0.5
(0.10)·5=0.5

Algoritmo: otra solución

Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
if $U < 0.5$ **then**
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 10V \rfloor + 1$
else
    Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;
    $X \leftarrow \lfloor 5V \rfloor + 6$
end
