Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones

Martín Mombelli

Índice general

Capítulo 1. Introducción 7

Capítulo 2. Categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales 9
- 2.1. Categorías, funtores y transformaciones naturales 9
- 2.2. Epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos 12
- 2.3. Subobjetos y cocientes 12
- 2.4. Productos y coproductos 13
- 2.5. Equalizadores y coequalizadores 13
- 2.6. Funtores y transformaciones naturales 14
- 2.7. Categorías aditivas 21
- 2.8. Categorías Abelianas 29
- 2.9. Producto tensorial de Deligne 36
- 2.10. La equivariantización de una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal 39

Capítulo 3. Categorías tensoriales 43
- 3.1. Categorías monoidales 43
- 3.2. Ejemplos de funtores monoidales 50
- 3.3. La categoría monoidal de bimódulos 54
- 3.4. Categorías monoidales rígidas 60
- 3.5. Categorías tensoriales finitas 65
- 3.6. Deformaciones de una categoría tensorial 67
- 3.7. La equivariantización de una categoría tensorial 68
- 3.8. Producto tensorial de categorías tensoriales finitas 69
- 3.9. La dimensión de Frobenius-Perron 71

Capítulo 4. Categorías monoidales trenzadas 77
- 4.1. Álgebras conmutativas y módulos disléxicos 81
- 4.2. El centro de una categoría monoidal 83

Capítulo 5. Representaciones de categorías tensoriales 87
- 5.1. Módulos sobre una categoría tensorial 87
- 5.2. Twists dinámicos y categorías módulo 94
- 5.3. Categorías módulo exactas 97
- 5.4. El Hom interno y el teorema de Etingof-Ostrik 101
- 5.5. Categorías módulo exactas sobre álgebras de Hopf 105

5.6. La categoría tensorial dual 118
5.7. Representaciones de las equivariantizaciones 120
5.8. La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}_A$ 120
5.9. La dimensión de Frobenius-Perron de una categoría módulo 121

Capítulo 6. Apéndice 123
6.1. Álgebras de Hopf débiles 123
6.2. Álgebras cuasi-Hopf 129
6.3. Twists dinámicos para álgebras de Hopf 131
6.4. Álgebras de Hopf cuasitriagulares y factorizables 132
6.5. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf 132
6.6. Preguntas 137

Bibliografía 139

Agradecimientos. Las presentes notas surgen de un curso dado en la Universidad de Santa María, Rio Grande del sur, Brasil, bajo el proyecto de fortalecimiento de posgrado del Mercosur. Agradezco a Daiana Aparecida Da Silva Flores y a Dirceu Baggio por la amable hospitalidad que me han brindado en la estada. Las notas fueron enriquecidas luego de dar un curso en Fa.M.A.F. - Universidad Nacional de Córdoba. Agradezco a los participantes del curso E. Bernaschini, A. Mejía Castaño, E. Pacheco Rodriguez, M. Müller, F. Rossi Bertone, V. Silva Rodrigues, D. Sulca por su cooperación en la confección de las presentes notas. En particular a Edwin y Eugenia, así también como a Sara Pinter y Gabriel Samuel, por la corrección de numerosos errores en una primera versión de las notas.

También me gustaría agradecer a María Inés Platzeck por su amable disposición para responder incontables preguntas.

Capítulo 1

Introducción

En el proceso de redacción, algunos temas fueron profundizados, para que el lector pueda contar con material de consulta de ciertos resultados que son muy especializados.

Capítulo 2

Categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales

2.1. Categorías, funtores y transformaciones naturales

Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de

- una colección de objetos $Ob(\mathcal{C})$;
- para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ una colección de flechas o morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;

tales que

- para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ existe un morfismo distinguido en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ denotado por id_X y llamado la *identidad*;
- para todo $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ existe una operación
$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$
llamada la composición, tal que es *unitaria*, es decir que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X;$$
y es *asociativa*, es decir que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ se cumple que
$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

Algunas observaciones sobre la notación que estamos usando:

1. Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ será denotado como
$$f : X \to Y \qquad \text{o bien} \qquad X \xrightarrow{f} Y.$$
Además X se llamará el *dominio* e Y el *códominio* de f.
2. La composición de dos morfismos f, g se denotará por $f \circ g$ ó bien por fg.
3. Los morfismos identidades id_X se denotarán a veces simplemente como 1_X.

Definición 2.1.1. Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría se dice un *isomorfismo* si existe $g : Y \to X$ tal que $fg = \mathrm{id}_Y$ y $gf = \mathrm{id}_X$. Un objeto X se dice *isomorfismo* a otro objeto Y si existe un isomorfismo $f : X \to Y$. En tal caso se denotará $X \simeq Y$.

Definición 2.1.2. Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es una categoría tal que $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$ y para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Las composiciones de los morfismos de $\mathcal{D}$ son las composiciones como morfismos en $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{D}$ es una subcategoría *plena* de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ es una subcategoría tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$.

2.1.1. Ejemplos de categorías.

1. La categoría Set es la categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfimos entre dos conjuntos son las funciones entre dichos conjuntos. Para cada conjunto X el morfismo id_X es la identidad de X. La composición de morfismos es la composición de funciones.
2. La categoría Grp es aquella categoría cuyos objetos son los grupos y los morfimos entre dos grupos son los morfismos de grupos.
3. La categoría Ab es la subcategoría plena de Grp que consiste de grupos abelianos.
4. Si $\Bbbk$ es un cuerpo denotaremos por $\mathrm{Vect}_\Bbbk$ la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales y los morfismos son las transformaciones lineales. Por $\mathrm{vect}_\Bbbk$ denotaremos la subcategoría plena de $\mathrm{Vect}_\Bbbk$ cuyos objetos son los espaciones vectoriales de dimensión finita sobre $\Bbbk$.
5. Si $\Bbbk$ es un cuerpo denotaremos por $\mathrm{Alg}_\Bbbk$ la categoría cuyos objetos son las $\Bbbk$-álgebras. Los morfismos son los morfismos de $\Bbbk$-álgebras. Si A, B son dos álgebras el espacio de morfismos se denotará por $\mathrm{Alg}\,(A, B)$.
6. Si R es un anillo se denotará por ${}_R\mathcal{M}$ (respectivamente $\mathcal{M}_R$) la categoría cuyos objetos son los R-módulos a izquierda (respectivamente a derecha). Los morfismos son los morfismos de R-módulos.
7. Si R es un anillo se denotará por ${}_R\mathcal{M}_R$ la categoría cuyos objetos son los R-bimódulos.
8. Si A es una $\Bbbk$-álgebra se denotará por ${}_A\mathcal{M}$, respectivamente $\mathcal{M}_A$, la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales munidos de una acción lineal que lo hace un A-módulos a izquierda, respectivamente a derecha. Las categorías ${}_A\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_A$ son las subcategorías plenas de ${}_A\mathcal{M}$, respectivamente $\mathcal{M}_A$, que consisten de aquellos módulos de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Análogamente se definen las categorías ${}_A\mathcal{M}_A$ y ${}_A\mathfrak{m}_A$
9. La categoría Top es aquella cuyos objetos son espacios topológicos y los morfismos entre dos espacios son las funciones continuas.
10. La categoría de trenzas $\mathbb{B}$. Recordemos primero que el *grupo de trenzas* de n hebras $\mathbb{B}_n$ es el grupo generado por elementos $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ sujetos a las relaciones:

$$\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1} \;\; i < n-1, \qquad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1, \; i, j \leq n-1.$$

La categoría $\mathbb{B}$ tiene por objetos a los números naturales y 0. Para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$ el espacio de morfismos es

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(n, m) = \begin{cases} \mathbb{B}_n & \text{si} \quad n = m \\ \emptyset & \text{si} \quad n \neq m. \end{cases}$$

La composición de morfismos, cuando está definida, es el producto en el grupo $\mathbb{B}_n$.

11. La categoría de complejos de cadena. Sea R un anillo conmutativo con unidad. La categoría de complejos de R-módulos tiene por objetos a los R-módulos $\mathbb{Z}$-graduados. Es decir R-módulos $C = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ munidos de un endomorfismo de R-módulos $d : C \to C$ de grado -1 ; es decir que
$$d(C_n) \subseteq C_{n-1}, \qquad \text{para todo } \ n \in \mathbb{Z}$$
tal que $d^2 = 0$. Usualmente se dice que el par (C, d) es una *cadena*. Un morfismo entre cadenas (C, d), (C', d') es un morfismo de R-módulos $f : C \to C'$ de grado cero tal que $d' \circ f = f \circ d$. Denotaremos esta categoría por $\mathfrak{C}hain(R)$.

12. La categoría de N-complejos de cadena. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. La categoría $\mathfrak{C}hain_N(R)$ es la categoría de pares (C, d),como en el ejemplo anterior, salvo que se satisface que $d^N = 0$.

13. Sea A un álgebra asociativa con unidad. La categoría $\underline{A}$ es aquella categoría con un único objeto. Los morfismos son los elementos de A. La composición es el producto de A.

2.1.2. Algunas construcciones de categorías. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, vamos a denotar por $\mathcal{C}^{\text{op}}$ a la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$ y tal que para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ el espacio de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z)$, es decir que $f : Y \to X$, $g : Z \to Y$ entonces la composición en $\mathcal{C}^{\text{op}}$ está dada por
$$g \circ^{\text{op}} f = f \circ g.$$
La categoría $\mathcal{C}^{\text{op}}$ es llamada la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son dos categorías, vamos a denotar por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ la categoría cuyos objetos son pares (X, Y) donde $X \in Ob(\mathcal{C}), Y \in Ob(\mathcal{D})$. Si $(X, Y), (X', Y')$ son dos objetos entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$.

Definición 2.1.3. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *esquelética* si cada vez que objetos X, Y son isomorfos entonces son iguales.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se define $Sk(\mathcal{C})$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que consiste de tomar un solo objeto en cada clase de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$. Naturalmente $Sk(\mathcal{C})$ es una categoría esquelética que se llama el *esqueleto* de $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.1.4. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. La categoría de matrices $Matr_{\mathbb{k}}$ es la categoría cuyos objetos es $\mathbb{N}_0$, los naturales unión el cero. Para cada par de objetos $n, m \in \mathbb{N}_0$ el espacio de morfismos entre n y m es el conjunto de matrices $M_{n,m}(\mathbb{k})$ de tamaño $n \times m$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{k}$. Demostrar que la categoría $Matr_{\mathbb{k}}$ es esquelética.

2.2. Epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : X \to Y$ un morfismo.

Definición 2.2.1. Decimos que f es un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tales que $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$. En otras palabras, f es monomorfismo cuando lo puedo *cancelar* a izquierda.

Análogamente, decimos que f es un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Y \to Z$ tales que $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$. Es decir, si podemos cancelar a f a derecha.

Ejercicio 2.2.2. Encontrar una categoría y un morfismo que sea un monomorfismo y epimorfismo pero que no sea un isomorfismo.

Observación 2.2.3. Sea $f : X \to Y$ un morfismo. El morfismo f es un monomorfismo si y sólo si la función

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \quad \beta \mapsto f \circ \beta,$$

es inyectiva para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$. Analogamente, f es un epimorfismo si y sólo si la función

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad \beta \mapsto \beta \circ f,$$

es inyectiva para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$.

2.3. Subobjetos y cocientes

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$, $\iota_2 : X_2 \to X$. Decimos que los monomorfismos ι_1, ι_2 son equivalentes si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Un *subobjeto* de X es una clase de equivalencia de monomorfismos a X. Si X, Y son dos objetos, denotaremos $X \subseteq Y$ si X es un subobjeto de Y.

Dos epimorfismos $q_1 : X \to X_1$, $q_2 : X \to X_2$ son equivalentes si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & & X_1 \arrow[dl, "u"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

Um *cociente* de X es una clase de equivalencia de epimorfismos desde X. Un *subcociente* de un objeto X es un subobjeto de un cociente de X.

2.4. Productos y coproductos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X_1, X_2 objetos en $\mathcal{C}$. Una terna (P, π_1, π_2) se dice el *producto* de X_1 y X_2 si

- P es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $\pi_i : P \to X_i$, $i = 1, 2$ son morfismos;
- si Y es otro objeto y existen morfismos $p_i : Y \to X_i$, $i = 1, 2$ entonces existe un único morfismo $p : Y \to P$ tal que $\pi_i \circ p = p_i$, $i = 1, 2$.

Si el producto de dos objetos X_1, X_2 existe, se lo denotará por $X_1 \times X_2$, omitiendo mención de los morfismos π_i. Los morfismos π_i se llaman usualmente las *proyecciones canónicas.*

Lema 2.4.1. *Si el producto de dos objetos X_1, X_2 existe es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean (P, π_1, π_2), (P', π_1', π_2') dos productos de X_1, X_2. Como P es producto entonces existe un morfismo $f : P' \to P$ tal que $\pi_i \circ f = \pi_i'$, $i = 1, 2$. Como P' es producto entonces existe $g : P \to P'$ tal que $\pi_i' \circ g = \pi_i$, $i = 1, 2$. Demostremos que $f \circ g = \operatorname{id}_P$. Se tiene que

$$\pi_i(f \circ g) = \pi_i' \circ g = \pi_i.$$

Por la unicidad en al definición de producto debe ser que $f \circ g = \operatorname{id}_P$. Análogamente se demuestra que $g \circ f = \operatorname{id}_{P'}$. □

Un *coproducto* de X_1, X_2 es una terna (Q, ι_1, ι_2) donde

- Q es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $\iota_i : X_i \to Q$, $i = 1, 2$ son morfismos;
- si Y es otro objeto y existen morfismos $a_i : X_i \to Y$, $i = 1, 2$ entonces existe un único morfismo $q : Q \to Y$ tal que $q \circ \iota_i = a_i$, $i = 1, 2$.

Ejercicio 2.4.2. El coproducto de dos objetos es único salvo isomorfismo.

El coproducto de dos objetos X_1, X_2 se denotará por $X_1 \amalg X_2$.

2.5. Equalizadores y coequalizadores

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f, g : X \to Y$ dos morfismos.

Definición 2.5.1. El *coequalizador* del par (f, g) es un morfismo $c : Y \to Z$ tal que

- $c \circ f = c \circ g$;
- Si $h : Y \to W$ es un morfismo tal que $h \circ f = h \circ g$ entonces existe un único morfismo $u : Z \to W$ tal que $u \circ c = h$.

Análogamente, el *ecualizador* del par (f, g) es un morfismo $e : Z \to X$ tal que

- $f \circ e = g \circ e$;
- Si $h : W \to X$ es un morfismo tal que $f \circ h = g \circ h$ entonces existe un único morfismo $u : W \to Z$ tal que $e \circ u = h$.

Ejercicio 2.5.2. Demostrar que el coecualizador y el ecualizador, si existen, son únicos salvo isomorfismo.

Ejercicio 2.5.3. Demostrar que en las categorías Set, Top y Ab los (co)ecualizadores siempre existen.

2.6. Funtores y transformaciones naturales

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de dos funciones:

(i) una función $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ que asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$;
(ii) y para cada par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ una función $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ que asigna a cada morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

tal que se verifica que

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

para todo objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ y todo par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$ que se puedan componer.

Observación 2.6.1. La definición de funtor anterior es lo que se conoce como funtor *covariante*. Un funtor se dice *contravariante* si satisface todos los axiomas de funtor excepto que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ para todo par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$ que se puedan componer.

Observación 2.6.2. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante entonces podemos definir un funtor $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ como sigue: $F^{\mathrm{op}}(X) = F(X)$ y $F^{\mathrm{op}}(f) = F(f)$ para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y para todo morfismo f de $\mathcal{C}$. Resulta que F^{op} es un funtor covariante. Usualmente cuando hagamos referencia a un funtor nos estaremos refiriendo a un funtor covariante, a menos que se indique explícitamente que es contravariante.

Observación 2.6.3. Toda categoría $\mathcal{C}$ posee el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo f.

Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, una *transformación natural* $\mu : F \to G$ es una colección de morfismos $\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in Ob(\mathcal{C})\}$ tal que para todo par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y para cada morfismo $f : X \to Y$ se satisface que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"'] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Diremos que una transformacion natural $\mu : F \to G$ es un *isomorfismo natural* si para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ los morfismos $\mu_X : F(X) \to G(X)$ son isomorfismos. En este caso diremos que F es *equivalente* a G y lo denotaremos por $F \sim G$.

Definición 2.6.4. Diremos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes*, y denotaremos $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tres funtores y $\mu : F \to G, \nu : G \to H$ dos transformaciones naturales. Entonces vamos a denotar por $\nu\circ\mu : F \to H$ la transformación natural dada por

$$(\nu \circ \mu)_X = \nu_X \circ \mu_X, \quad \text{para todo } X \in Ob(\mathcal{C}).$$

Esta composición se llama la *composición vertical* de transformaciones naturales.

Ahora si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $J, H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son funtores y $\eta : F \to G$, $\nu : J \to H$ son transformaciones naturales, la *composición horizontal* $\nu \circ \eta : J \circ F \to H \circ G$ es la transformación natural determinada por

$$(\nu \circ \eta)_X = \nu_{G(X)} \circ J(\eta_X),$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Además, si $J : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es otro funtor, vamos a denotar por $J(\mu) : J \circ F \to J \circ G$ a la transformación natural dada por

$$J(\mu)_X = J(\mu_X), \quad \text{para todo } X \in Ob(\mathcal{C}).$$

Ejercicio 2.6.5. Demostrar que existe una equivalencia de categorías $Matr_{\Bbbk} \simeq Sk(vect_{\Bbbk})$.

Ejemplo 2.6.6. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías entonces vamos a denotar $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Dados dos objetos en esta categoría, es decir, dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ el espacio de morfismos, que denotaremos por $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ es el conjunto de transformaciones naturales $\mu : F \to G$. Además se denotará $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathrm{End}\,(\mathcal{C})$.

Ejemplo 2.6.7. La categoría Cat es aquella cuyos objetos son las categorías. Dadas dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ el espacio de morfismos $\mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es la categoría de funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$.

2.6.1. Ejemplos de funtores.

1. Sea $F : Grp \to Set$ el funtor tal que $F(G) = G$ y $F(f) = f$ para todo grupo G y todo morfismo f. Al funtor F se lo llama el *funtor de olvido*, porque se está "olvidando" de la estructura de grupo.

2. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y A una $\Bbbk$-álgebra. Otro funtor de olvido es el funtor $F : {}_A\mathcal{M} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$, donde se olvida de la estructura de A-módulo.

3. Si X es un espacio topológico entonces denotamos por $C(X)$ al conjunto de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$. El conjunto $C(X)$ posee una estructura natural de $\mathbb{R}$-álgebra: si $f, g \in C(X)$ entonces se define

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad (f.g)(x) = f(x)g(x),$$

   para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si Y es otro espacio topológico y $\phi : X \to Y$ es una función continua, entonces $C(\phi) : C(Y) \to C(X)$ es el morfismo de álgebras dado por $C(\phi)(f) = f \circ \phi$. No es complicado demostrar que esto define un funtor $C : Top^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}}$.

4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $X \in Ob(\mathcal{C})$. Entonces existen funtores $L_X, : \mathcal{C} \to Set$, $R_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Set$ definidos como sigue. Si $Y \in Ob(\mathcal{C})$ entonces $L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $R_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Además si $f : Y \to Z$ es una función entonces $L_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$, $L_X(f)(\alpha) = f \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $R_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ está definida por $R_X(f)(\beta) = \beta \circ f$ para todo $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$. Uno también puede considerar el funtor
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to Set.$$
Queda como ejercicio definirlo y demostrar que es un funtor.
5. Definimos $D : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ al funtor $D(V) = V^{**}$ para todo espacio vectorial V. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entonces $D(f) : V^{**} \to W^{**}$ es la doble transpuesta de f.
6. Denotamos por $T : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to Alg_{\Bbbk}$ al funtor dado como sigue. Si V es un espacio vectorial entonces $T(V) = \oplus_{0 \leq n} V^{\otimes n}$ denota el álgebra tensorial de V. Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entonces $T(f) : T(V) \to T(W)$ es morfismo de álgebras dado por
$$T(f)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_m),$$
para todo $v_i \in V$.
7. Denotamos por $Lie_{\Bbbk}$ a la categoría de álgebras de Lie sobre $\Bbbk$. Definimos $U : Lie_{\Bbbk} \to Alg_{\Bbbk}$ al funtor dado como sigue. Para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$ es el álgebra universal de $\mathfrak{g}$.
8. Denotemos por $Hopf_{\Bbbk}$ a la categoría de álgebras de Hopf sobre $\Bbbk$. Definimos por $\mathcal{P} : Hopf_{\Bbbk} \to Lie_{\Bbbk}$ al funtor “tomar primitivos”. Es decir que para cualquier álgebra de Hopf H, $\mathcal{P}(H) = \{x \in H : \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ es el espacio de elementos primitivos de H. El espacio vectorial $\mathcal{P}(H)$ es un álgebra de Lie con corchete dado por $[x,y] = xy - yx$ para todo $x, y \in \mathcal{P}(H)$. Completar la demostración de que $\mathcal{P}$ es un funtor.

Ejercicio 2.6.8. Demostrar que el funtor $D : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ descripto en el punto (5) es equivalente al funtor identidad $\mathrm{Id} : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$.

Ejercicio 2.6.9. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Consideramos el funtor de olvido $F : {}_A\mathcal{M} \to Vect_{\Bbbk}$. Demostrar que $\mathrm{Nat}(F,F)$ posee una estructura de $\Bbbk$-álgebra y que existe un isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $A \simeq \mathrm{Nat}(F,F)$.

Definición 2.6.10. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *dominante* si todo objeto $Y \in \mathcal{D}$ es un subcociente de $F(X)$ para algún $X \in \mathcal{C}$. El funtor F se dice *denso* si para todo objeto $Z \in \mathcal{D}$ existe un objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq Z$.

Definición 2.6.11. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *fiel*, respectivamente *pleno*, si para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ la aplicación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

es inyectiva, respectivamente suryectiva.

Se tiene el siguiente resultado. Ver [**8**, Teorema 1.4].

Teorema 2.6.12. *Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia si y sólo si existe F es pleno, fiel y denso.* □

Ejercicio 2.6.13. Demostrar que $\mathcal{C} \simeq Sk(\mathcal{C})$ para toda categoría $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.6.14. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías, un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ es un monomorfismo, respectivamente un epimorfismo, si y sólo si $F(f)$ es un monomorfismo, respectivamente un epimorfismo.

Ejercicio 2.6.15. Demostrar que “tomar” el centro de un grupo no es funtorial; es decir que no determina un funtor $F : Grp \to Ab$.

2.6.2. Funtores representables. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, definamos

$$L_X : \mathcal{C} \to Set, \quad L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{C}. \tag{2.6.1}$$

En este caso decimos que L_X esta *representado* por X. Un funtor se dice *representable* si es naturalmente equivalente a un funtor representado por un objeto.

Uno de los lemas elementales más importantes y utilizados en teoría de categorías es el lema de Yoneda.

Lema 2.6.16 (Yoneda). *Sea $F : \mathcal{C} \to Set$ un funtor y $X \in \mathcal{C}$. El conjunto de transformaciones naturales de L_X a F está en biyección con el conjunto $F(X)$ via la función*

$$\phi : Nat(L_X, F) \to F(X), \quad \phi(\nu) = \nu_X(\mathrm{id}_X).$$

Demostración. Recordemos que una transformación natural $\nu \in Nat(L_X, F)$ es una colección de morfismos $\{\nu_Y : \mathrm{Hom}(X, Y) \to F(Y) : Y \in \mathcal{C}\}$ tal que para todo $Z, Y \in \mathcal{C}$ y para todo morfismo $f : Z \to Y$ se verifica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \arrow[r, "\nu_Z"] \arrow[d, "L_X(f)"] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

En particular si tomamos $Z = X$ y $f : X \to Y$ cualquier función se tiene que

$$\nu_Y \circ L_X(f) = F(f) \circ \nu_X,$$

y aplicando esta identidad a id_X y usando que $L_X(f)(\mathrm{id}_X) = f$ obtenemos que

$$\nu_Y(f) = F(f)(\nu_X(\mathrm{id}_X)).$$

Definimos $\psi : F(X) \to Nat(L_X, F)$ la función determinada por

$$\psi(x) : L_X \to F, \quad \psi(x)_Y(f) = F(f)(x),$$

para todo $x \in F(X)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Por lo anterior se puede ver claramente que ψ es la inversa de ϕ. $\square$

Ejercicio 2.6.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y \in \mathcal{C}$. Demostrar que $L_X \simeq L_Y$ si y sólo si $X \simeq Y$.

Ejercicio 2.6.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X, Y objetos de $\mathcal{C}$. Demostrar que el coproducto de X e Y existe si y sólo si el funtor

$$F : \mathcal{C} \to Set, \quad F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$$

es representable.

Ejercicio 2.6.19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Demostrar que el funtor $\Phi : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, Set)$, dado por $\Phi(X) = L_X$ es un funtor fiel y pleno.

2.6.3. Funtores adjuntos. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías.

Definición 2.6.20. Una adjunción de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una terna (F, G, ϕ) donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ son funtores y se tienen isomorfismos naturales

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)),$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$.

Notar que en la definición anterior se están considerando los funtores

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{F \times Id} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-)} Set,$$

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \xrightarrow{Id \times G} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)} Set,$$

y $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times \mathrm{Id}\,) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (\mathrm{Id}\, \times G)$ es un isomorfismo natural. La naturalidad de ϕ implica que para todo par de morfismos $f : U \to X$, $g : Y \to V$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\alpha \mapsto g\,\alpha F(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[d, "\beta \mapsto G(g)\,\beta\, f"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \end{tikzcd} \tag{2.6.2}$$

es conmutativo.

Si (F, G, ϕ) es una adjunción, diremos que F es *adjunto a izquierda* de G y que G es *adjunto a derecha* de F.

Lema 2.6.21. *Los funtores adjuntos a derecha o a izquierda de un funtor dado son únicos salvo equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y sean (F, G, ϕ), (F, G', ϕ') adjunciones. Demostraremos que $G \simeq G'$.

Por hipótesis, los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (\operatorname{Id} \times G)$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (\operatorname{Id} \times G')$ son equivalentes. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\alpha_{X,Y} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G'(Y)), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}.$$

definido por $\alpha_{X,Y} = \phi'_{X,Y} \phi^{-1}_{X,Y}$. Definimos $\psi_Y : G(Y) \to G'(Y)$ como $\psi_Y = \alpha_{G(Y),Y}(\operatorname{id}_{G(Y)})$ para todo $Y \in \mathcal{D}$. Se deduce de (2.6.2) que ψ es una transformación natural. Queda como ejercicio demostrar que ψ es un isomorfismo. □

2.6.4. Ejemplos de adjunciones. Queda como ejercicio para el lector el demostrar que los siguientes pares de funtores son adjunciones.

1. El funtor de olvido $F : Ab \to Grp$ es adjunto a derecha de $U : Grp \to Ab$ dado por $U(G) = G/[G, G]$, para todo grupo G.
2. Sea R un anillo. El funtor de olvido $F : {}_R\mathcal{M} \to Ab$ es adjunto a derecha de $L : Ab \to {}_R\mathcal{M}$, $L(A) = R \otimes_{\mathbb{Z}} A$, para todo grupo abeliano A.
3. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. El funtor de olvido $F : \operatorname{Alg}_{\Bbbk} \to \operatorname{Vect}_{\Bbbk}$ es adjunto a derecha del funtor $T : \operatorname{Vect}_{\Bbbk} \to \operatorname{Alg}_{\Bbbk}$ tal que para todo espacio vectorial V, $T(V) = \oplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes n}$ es el álgebra tensorial.
4. Sea $Com_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-álgebras conmutativas. Es decir que $Com_{\Bbbk}$ es la subcategoría plena de $\operatorname{Alg}_{\Bbbk}$ cuyos objetos son las álgebras conmutativas. El funtor de olvido $F : Com_{\Bbbk} \to \operatorname{Vect}_{\Bbbk}$ es adjunto a derecha del funtor $S : \operatorname{Vect}_{\Bbbk} \to Com_{\Bbbk}$, donde para todo espacio vectorial V, $S(V)$ es el álgebra simétrica. Recordemos que el álgebra simétrica de un espacio vectorial V es el cociente del álgebra tensorial $T(V)$ por el ideal bilátero generado por los elementos $v \otimes w - w \otimes v$ para todo $v, w \in V$.
5. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $Lie_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-álgebras de Lie. Sea $F : \operatorname{Alg}_{\Bbbk} \to Lie_{\Bbbk}$ el funtor dado como sigue: para toda álgebra A, el espacio $F(A) = A$ donde la estructura de álgebra de Lie en A es el conmutador, es decir que el corchete $[\,,\,] : A \times A \to A$ está dado por

$$[a, b] = ab - ba, \qquad \text{para todo } a, b \in A.$$

   El funtor F es adjunto a derecha del funtor $U : Lie_{\Bbbk} \to \operatorname{Alg}_{\Bbbk}$, donde para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ el funtor $U(\mathfrak{g})$ es el álgebra universal. Es decir que $U(\mathfrak{g})$ es el cociente del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ por el ideal bilátero generado por elementos de la forma $[v, w] - v \otimes w + w \otimes v$, para todo $v, w \in \mathfrak{g}$.

Ejercicio 2.6.22. Sea $Free : \operatorname{Vect}_{\Bbbk} \to Lie_{\Bbbk}$ el funtor tal que $Free(V) = \mathcal{P}(T(V))$ para todo espacio vectorial V. Recordar que si H es un álgebra de Hopf entonces $\mathcal{P}(H)$ es el espacio de los elementos primitivos de H. Es decir que $Free$ es el funtor tomar el álgebra de Lie libre generada por un espacio vectorial dado. Demostrar que Free es un funtor y decidir si posee un adjunto.

Ejercicio 2.6.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Demostrar que el funtor $-\times\mathcal{C} : Cat \to Cat$ posee un adjunto a derecha.

Teorema 2.6.24. *Sean $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ funtores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(F, G, ϕ) es una adjunción.*
2. *Existen transformaciones naturales $e : F\circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}, c : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G\circ F$ tales que para todo $Y\in\mathcal{D}$, $X\in\mathcal{C}$*

$$\mathrm{id}_{G(Y)} = G(e_Y)\circ c_{G(Y)}, \quad e_{F(X)}\circ F(c_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Para todo $Y\in\mathcal{D}$, $X\in\mathcal{C}$ definimos

$$e_Y = \phi^{-1}_{G(Y),Y}(\mathrm{id}_{G(Y)}), \quad c_X = \phi_{X,F(X)}(\mathrm{id}_{F(X)}).$$

Sea $f : F(X)\to Y$ un morfismo en $\mathcal{D}$. Por la naturalidad de ϕ sabemos que el diagrama

(2.6.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\alpha\mapsto f\,\alpha"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X)) \arrow[d, "\beta\mapsto G(f)\,\beta"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En particular se tiene que

$$G(f)\circ c_X = \phi_{X,Y}(f).$$

Tomando $f = e_Y$ se tiene que $\mathrm{id}_{G(Y)} = G(e_Y)\circ c_{G(Y)}$. La identidad $e_{F(X)}\circ F(c_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ se demuestra de forma similar. La desmotración de la naturalidad de e y c queda como ejercicio.

Veamos que (2) implica (1). Para todo $X\in\mathcal{C}$, $Y\in\mathcal{D}$ definimos

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)), \quad \phi_{X,Y}(\alpha) = G(\alpha)c_X,$$

$$\widetilde{\phi}_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y), \quad \widetilde{\phi}_{X,Y}(\beta) = e_Y F(\beta).$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que ϕ es una transformación natural en ambas variables y que $\widetilde{\phi}$ es el inverso de ϕ. $\square$

Usualmente las transformaciones e, c se llaman, respectivamente, la *counidad* y la *unidad* de la adjunción.

2.7. Categorías aditivas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

Definición 2.7.1. Un objecto $Z \in \mathcal{C}$ se llama un *objeto cero* u *objeto nulo* si para todo $X \in \mathcal{C}$ existen únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$, $\psi_X : Z \to X$. Es decir si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Observar que si Z es un objeto cero entonces $\phi_Z = \psi_Z = \mathrm{id}_Z$.

Lema 2.7.2. *Si $\mathcal{C}$ posee un objeto cero, este es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean Z, Z' dos objetos ceros de $\mathcal{C}$. Entonces, usando el hecho de que Z' es objeto cero, existen morfismos $\phi_Z : Z \to Z'$, $\psi_Z : Z' \to Z$. Luego el morfismo $\phi_Z \circ \psi_Z : Z' \to Z'$ debe ser la identidad id'_Z. Análogamente se demuestra que $\psi_Z \circ \phi_Z = \mathrm{id}_Z$. □

Ejemplo 2.7.3. En la categoría Grp el grupo trivial $1 = \{1\}$ es un objeto cero.

Ejercicio 2.7.4. Demostrar que la categoría Set no posee objetos cero.

Ejercicio 2.7.5. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una equivalencia de categorías. Si Z es un objeto cero de $\mathcal{C}$ entonces $F(Z)$ es un objeto cero de $\mathcal{D}$.

Definición 2.7.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero Z. Para todo $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ se define $0_Y^X : X \to Y$ al morfismo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "0_Y^X"] & \\ Z \arrow[rr, "\psi_Y"] & & Y. \end{tikzcd}$$

El morfismo 0_Y^X se llama el morfismo nulo. A veces simplemente lo denotaremos por $0 : X \to Y$.

Ejercicio 2.7.7. Demostrar que el morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ no depende del objeto cero Z de la categoría.

Proposición 2.7.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Entonces*

$$f \circ 0_B^A = 0_C^A, \quad 0_D^C \circ f = 0_D^B.$$

□

Ejercicio 2.7.9. Si X no es un objeto nulo entonces $\mathrm{id}_X \neq 0_X^X$

2.7.1. Núcleos y conúcleos.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definición 2.7.10. Un núcleo de f es un objeto $K = \operatorname{Ker} f \in Ob(\mathcal{C})$ y un morfismo $k : K \to X$ tal que $f \circ k = 0_Y^K$. Además es universal con respecto a esta propiedad; es decir si $k' : K' \to X$ es otro morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$ entonces existe un único morfismo $u : K' \to \operatorname{Ker} f$ tal que $k \circ u = k'$.

Ejercicio 2.7.11. Demostrar que si existe el núcleo de un morfismo este es único salvo isomorfismo.

Lema 2.7.12. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo y $k : \operatorname{Ker} f \to X$ un núcleo. Entonces k es un monomorfismo.*

Demostración. Sean $g, h : U \to \operatorname{Ker} f$ morfismos tales que $kg = kh$. Entonces $f \circ (kh) = 0_Y^K \circ h = 0_Y^U$. Por la definición de núcleo, existe un morfismo $u : U \to \operatorname{Ker} f$ tal que $ku = kh$. Como $kg = kh$, la unicidad nos dice que $u = g = h$.

□

Definición 2.7.13. Un *conúcleo* de f es un objeto $\operatorname{coKer} f$ y un morfismo $q : Y \to \operatorname{coKer} f$ tal que $q \circ f = 0$ y es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, si $q' : Y \to Q$ es otro morfismo tal que $q' \circ f = 0$ entonces existe un único morfismo $u : \operatorname{coKer} f \to Q$ tal que $q' = u \circ q$.

Ejercicio 2.7.14. Demostrar que el conúcleo de un morfismo es único salvo isomorfismo y que además es un epimorfismo.

Ejercicio 2.7.15. Dados X, Y objetos. Calcular $\operatorname{Ker} 0_X^Y$ y $\operatorname{coKer} 0_X^Y$.

Ejercicio 2.7.16. Sea R un anillo y M, N dos R-módulos a izquierda. Si $f : M \to N$ es un morfismo de R-módulos demostrar que $\operatorname{Ker} f = \{m \in M : f(m) = 0\}$, $\operatorname{coKer} f = N/Im(f)$.

Ejercicio 2.7.17. Sea $\iota : X \to Y$ un monomorfismo. Demostrar que si el conúcleo de ι existe, este no depende de la clase de equivalencia de X como subobjeto de Y. En particular, si $X \subseteq Y$ es un subobjeto, uno puede definir Y/X como el conúcleo de ι.

Ejercicio 2.7.18. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq N$. Decidir si las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$ y $\mathfrak{C}hain_N(R)$ poseen objetos nulos, núcleos y conúcleos.

2.7.2. Categorías aditivas.

Definición 2.7.19. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *preaditiva* si

- $\mathcal{C}$ posee un objeto cero;
- para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ el conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un grupo abeliano;
- la composición de morfismos es bilineal, es decir que para todo $f, f' : X \to Y$, $g, g' : Y \to Z$ se tiene que

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f', \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y X_1, X_2 dos objetos de $\mathcal{C}$. Una *suma directa* de X_1, X_2 es una colección (Z, p_1, p_2, i_1, i_2) tal que

- $p_j : Z \to X_i$, $i_j : X_j \to Z$, $j = 1, 2$ son morfismos;
- se satisface que

$$p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{X_1}, \quad p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{X_2}, \quad i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}_Z.$$

Definición 2.7.20. Una categoría preaditiva es *aditiva* si todo par de objetos posee una suma de directa.

Ejercicio 2.7.21. Demostrar que en una categoría preaditiva un morfismo $f : X \to Y$ es un monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Ker} f = 0$. Demostrar un resultado análogo para epimorfismos.

Observación 2.7.22. Si (Z, p_1, p_2, i_1, i_2) es una suma directa de dos objetos X_1, X_2 entonces (Z, p_1, p_2) es un producto y (Z, i_1, i_2) es un coproducto de X_1, X_2. Algunos autores llaman a la suma directa un *biproducto*.

La suma directa de dos objetos es única salvo isomorfismo. Si la colección (Z, p_1, p_2, i_1, i_2) es una suma directa de dos objetos X_1, X_2 vamos a denotar a $Z = X_1 \oplus X_2$.

Lema 2.7.23. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y X_1, X_2, Y objetos de $\mathcal{C}$. Existen isomorfismos naturales de grupos Abelianos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \oplus X_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2).$$

Demostración. Definimos los morfismos

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y),$$

$$\phi(\alpha) = (\alpha \circ i_1, \alpha \circ i_2)$$

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y),$$

$$\psi(f_1, f_2) = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2.$$

Es inmediato demostrar que ambas funciones son morfismos de grupos uno el inverso del otro y que además son morfismos naturales. □

Definición 2.7.24. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *aditivo* si para todo par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se tiene que

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Ejercicio 2.7.25. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo entonces para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ se tiene que $F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$.

Ejercicio 2.7.26. Demostrar que toda equivalencia entre dos categorías aditivas es necesariamente un funtor aditivo.

Ejercicio 2.7.27. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo entre categorías aditivas. Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un funtor adjunto a derecha (o izquierda) de F entonces G es aditivo.

Ejercicio 2.7.28. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva y f, g son dos morfismos en $\mathcal{C}$ entonces $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$.

Ejercicio 2.7.29. Una transformación natural entre funtores aditivos es aditiva.

Ejercicio 2.7.30. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en una categoría aditiva $\mathcal{C}$. Demostrar que el núcleo de f es cualquier objeto que representa al funtor

$$F : \mathcal{C} \to Set, \quad F(Z) = \{g : Z \to X : f \circ g = 0\}.$$

Es decir existe un objeto $A \in \mathcal{C}$ tal que $F(Z) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A)$.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores vamos a denotar por $F \oplus G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ al funtor determinado por $F \oplus G(X) = F(X) \oplus G(X)$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

2.7.3. Ejemplos de categorías aditivas.

1. Dado un anillo R, las categorías ${}_R\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_R$ y ${}_R\mathcal{M}_R$ son aditivas.
2. La categoría Ab es aditiva.
3. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías, donde $\mathcal{D}$ es aditiva, entonces la categoría $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría aditiva. En efecto, el objeto nulo es el funtor $\mathbf{0} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\mathbf{0}(X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, el conjunto $\operatorname{Nat}(F, G)$ es un grupo abeliano con la suma definida como sigue: Si $\eta, \mu \in \operatorname{Nat}(F, G)$ entonces $(\eta + \mu)_X = \eta_X + \mu_X$ para todo $X \in \mathcal{C}$.
4. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es aditiva.

Ejercicio 2.7.31. Si R es un anillo conmutativo y $2 \leq N \in \mathbb{N}$, demostrar que las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$, $\mathfrak{C}hain_N(R)$ son aditivas.

Ejercicio 2.7.32. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Demostrar que en $\mathcal{C}$ todo morfismo posee núcleo si y sólo si todo par de morfismos posee equalizadores. Dualizar.

Ejercicio 2.7.33. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y sea $\mathcal{D}$ una subcategoría plena aditiva de $\mathcal{C}$. Para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ denotamos por $\mathcal{D}(X, Y)$ al conjunto de morfismos $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ tales que existe $Z \in \mathcal{D}$ y morfismos $g : X \to Z, h : Z \to Y$ tal que $f = h \circ g$.

1. Demostrar que $\mathcal{D}(X, Y)$ es un subgrupo de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
2. Definimos la categoría $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ cuyos objetos son los mismos objetos de $\mathcal{C}$. Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ definimos el espacio de morfismos

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\mathcal{D}(X, Y).$$

Demostrar que $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ está bien definida y que es una categoría aditiva.

2.7.4. Sucesiones exactas. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos en $\mathcal{C}$. Decimos que la sucesión

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

es *exacta a izquierda* si f es un núcleo de g, que es *exacta a derecha* si g es un conúcleo de f. Decimos que es *exacta* si lo es a derecha e izquierda. En particular, si (S) es exacta entonces $g \circ f = 0$, f es un monomorfismo y g es un epimorfismo.

Decimos que la sucesión (S) se *escinde* si existe un morfismo $\iota : Z \to Y$ tal que $g \circ \iota = \mathrm{id}_Z$.

Ejercicio 2.7.34. Sean X_1, X_2 objetos en $\mathcal{C}$ y $(X_1 \oplus X_2, p_1, p_2, i_1, i_2)$ una suma directa. La sucesión

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{i_1} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_2} X_2 \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

Definición 2.7.35. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aditivo se dice *exacto a izquierda* si para todo morfismo $f : X \to Y$, $\mathrm{Ker}\,(F(f)) = F(\mathrm{Ker}\, f)$. Decimos que F es *exacto a derecha* si para todo morfismo $f : X \to Y$, $\mathrm{coKer}\,(F(f)) = F(\mathrm{coKer}\, f)$. El funtor F se dice *exacto* si es exacto a izquierda y a derecha.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas, denotaremos por

$$\mathrm{Fun}_{e.d.}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad \mathrm{Fun}_{e.i}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \ \text{ y } \ \mathrm{Fun}_{e.}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

respectivamente, a las subcategorías plenas de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ que consisten, respectivamente, de funtores exactos a derecha, exactos a izquierda y exactos.

Ejercicio 2.7.36. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Demostrar que para todo $X \in \mathcal{C}$ el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to Ab$ es exacto a izquierda.

Ejercicio 2.7.37. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores exactos (a derecha, izquierda respectivamente) entonces $F \oplus G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es exacto (a derecha, izquierda respectivamente).

Definición 2.7.38. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Denotamos por $F(\mathcal{C})$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$. Si X es un objeto vamos a denotar $[X]$ su clase de isomorfismo. El subgrupo $R(\mathcal{C})$ de $F(\mathcal{C})$ es el subgrupo generado por los elementos $[Z] - [X] - [Y]$ cada vez que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Se define el *grupo de Grothendieck* $G_0(\mathcal{C})$ como el cociente $F(\mathcal{C})/R(\mathcal{C})$. La clase de un objeto $[X]$ en $G_0(\mathcal{C})$ la denotaremos $\langle X \rangle$. En particular, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se tiene que $\langle X \oplus Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$ en $G_0(\mathcal{C})$.

Lema 2.7.39. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Entonces:*

1. *F es exacto si y sólo si para toda sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$
la sucesión
$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$
es exacta.
2. *Si F es exacto, entonces induce un homomorfismo de grupos abelianos $[F] : G_0(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{D})$.*

Demostración. La primera parte del Lema sigue inmediatamente de la definición de funtor exacto. Definimos $[F] : G_0(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{D})$ por $[F](\langle X\rangle) = \langle F(X)\rangle$ para todo $X \in \mathcal{C}$. La buena definición de $[F]$ se deduce del primer enunciado del Lema.

□

Definición 2.7.40. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Un objeto distinto a cero $S \in \mathcal{C}$ se dice *simple* si todo subobjeto de S es isomorfo a 0 o a S. Un objeto se dice *indescomponible* si no puede descomponerse como suma directa de subobjetos no triviales.

La demostración del siguiente resultado puede deducirse de [**70**, Thm 2].

Teorema 2.7.41. *Sean A y B álgebras de dimensión finita. Si $F : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$ es un funtor aditivo exacto a derecha, entonces existe un bimódulo $C \in {}_B\mathcal{M}_A$ y un isomorfismo natural $F \simeq C \otimes_A -$.* □

Ejercicio 2.7.42. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores aditivos tales que F es adjunto a izquierda de G. Demostrar que F es exacto a derecha y G es exacto a izquierda.

Como consecuencia del ejercicio anterior, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7.43. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Si F posee adjuntos a derecha e izquierda, entonces F es exacto.* □

Ejercicio 2.7.44. Demostrar que todo funtor que da una equivalencia de categorías aditivas es un funtor exacto.

Ejercicio 2.7.45. Sea $F : \mathrm{Rep}\,(\Bbbk G) \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ el funtor
$$F(V) = V^G = \{v \in V : g \cdot v = v, \text{ para todo } g \in G\}.$$
Demostrar que F es exacto a izquierda y que no es exacto a derecha.

Ejercicio 2.7.46. Si F es un funtor exacto a izquierda (respectivamente a derecha) y f es un monomorfismo (resp. un epimorfismo) entonces $F(f)$ es un monomorfismo (resp. un epimorfismo).

Ejercicio 2.7.47. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. La sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$
se escinde.
2. Para todo $W \in \mathcal{C}$ la sucesión de grupos Abelianos
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Z) \longrightarrow 0$$
es exacta en ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$.
3. Para todo $W \in \mathcal{C}$ la sucesión de grupos Abelianos
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W) \longrightarrow 0$$
es exacta en ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$.

2.7.5. Objetos proyectivos e inyectivos.

Definición 2.7.48. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $P \in Ob(\mathcal{C})$ se dice *proyectivo* si para todo epimorfismo $\pi : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : P \to N$ existe un morfismo $g : P \to M$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[rr, "\pi"] & & N \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Proposición 2.7.49. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$P \in Ob(\mathcal{C})$ es un objeto proyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta*
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$
se escinde.
3. *El funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-) : \mathcal{C} \to Ab$ *es exacto.* □

La demostración de este resultado es similar a la demostración para categorías de módulos sobre un anillo, por lo cual queda como ejercicio.

Definición 2.7.50. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $Q \in Ob(\mathcal{C})$ se dice *inyectivo* si para todo monomorfismo $\iota : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : M \to Q$ existe un morfismo $g : N \to Q$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & N \arrow[dl, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Proposición 2.7.51. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$Q \in Ob(\mathcal{C})$ es un objeto inyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta*
$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$
se escinde.
3. *El funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Q) : \mathcal{C} \to Ab$ es exacto.* □

Ejercicio 2.7.52. Sea Q un objeto inyectivo y M un objeto munido de morfismos $\pi : Q \to M$, $\iota : M \to Q$ tales que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_M$. Demostrar que M es inyectivo.

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que posee *suficientes proyectivos* si para todo objeto X de $\mathcal{C}$ existe un objeto proyectivo P y un epimorfismo $P \to X$.

Ejercicio 2.7.53. Si R es un anillo, la categoría de R-módulos posee suficientes proyectivos.

Ejercicio 2.7.54. Demostrar que la propiedad de ser proyectivo es estable bajo equivalencias de categorías.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva se denotará por $Proj(\mathcal{C})$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que consiste de los objetos proyectivos de $\mathcal{C}$. La categoría $Proj(\mathcal{C})$ es aditiva. Denotaremos por $K_0(\mathcal{C})$ al grupo de Grothendieck de $Proj(\mathcal{C})$.

2.7.6. El cubrimiento proyectivo y la cápsula inyectiva.

Definición 2.7.55.
- Un morfismo en la categoría $f : M \to N$ se dice *superfluo* si es un epimorfismo y para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo entonces g es epimorfismo.
- Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto M de $\mathcal{C}$ es un par (P, f) donde $f : P \to M$ es superfluo y P es un objeto proyectivo.

Denotaremos por $(P(M), f)$ al cubrimiento proyectivo de M. A veces se dejará implícita la función f. No en toda categoría existe el cubrimiento proyectivo.

Definición 2.7.56.
- Un morfismo en la categoría $f : M \to N$ se dice *esencial* si es un monomorfismo y para todo morfismo $g : N \to L$ tal que $g \circ f$ es monomorfismo, entonces g es monomorfismo.
- Una *cápsula inyectiva* de un objeto M es un par (E, q), donde $q : M \to E$ es esencial y E es un objeto inyectivo.

Se denotará por $(E(M), q)$ a la cápsula inyectiva de M.

Ejercicio 2.7.57. Si R es un anillo, todo objeto en ${}_R\mathcal{M}$ posee cápsula inyectiva y cubrimiento proyectivo. chequear esto

2.8. Categorías Abelianas

Definición 2.8.1. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *Abeliana* si:

- $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva;
- todo morfismo en $\mathcal{C}$ posee núcleos y conúcleos;
- todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.

2.8.1. Ejemplos de categorías Abelianas.

1. La categoría Ab de grupos abelianos.
2. Si R es un anillo entonces las categorías ${}_R\mathcal{M}, \mathcal{M}_R, {}_R\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_R$ son Abelianas.
3. Si $\mathcal{A}$ es una categoría Abeliana entonces la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ es Abeliana.
4. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas entonces $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ son Abelianas.
5. Si R es un anillo conmutativo y $2 \leq N \in \mathbb{N}$, entonces las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$, $\mathfrak{C}hain_N(R)$ son Abelianas.

La demostración de que las categorías mencionadas anteriormente son Abelianas queda como ejercicio.

Ejercicio 2.8.2. La categoría de grupos Grp no es Abeliana.

Observación 2.8.3. De ahora en más, si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas, se denotará a $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$.

Lema 2.8.4. *Sea $\mathcal{C}$ Abeliana. Todo monomorfismo en $\mathcal{C}$ es el núcleo de su conúcleo. Dualmente, todo epimorfismo en $\mathcal{C}$ es el conúcleo de su núcleo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un epimorfismo y $k : \ker f \to X$ su núcleo. Por los axiomas de categoría Abeliana existe un morfismo $g : Z \to X$ tal que $f = \mathrm{coKer}\, g$. Como $f \circ g = 0$, por la universalidad de k, se tiene que existe un morfismo $u : Z \to \ker f$ tal que $g = k \circ u$. Demostremos que $f = \mathrm{coKer}\, k$.

Sabemos que $f \circ k = 0$. Sea $h : X \to W$ un morfismo tal que $h \circ k = 0$. Entonces

$$h \circ g = h \circ k \circ u = 0.$$

Como $f = \mathrm{coKer}\, g$, por la universalidad del conúcleo, existe un morfismo $u' : Y \to W$ tal que $u' \circ f = h$. □

Proposición 2.8.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Sea $k : \mathrm{Ker}\, f \to X$ el núcleo de f y $q : Y \to \mathrm{coKer}\, f$ el conúcleo. Si $c : X \to \mathrm{coKer}\, k$ es el conúcleo de k y $d : \mathrm{Ker}\, q \to Y$ es el núcleo de q, entonces existe un único morfismo $\phi : \mathrm{coKer}\, k \to \mathrm{Ker}\, q$ que hace que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ \mathrm{coKer}\, k & \xrightarrow[\phi]{} & \mathrm{Ker}\, q, \end{array} \tag{2.8.1}$$

sea conmutativo.

Demostración. Como $f \circ k = 0$, por la propiedad universal del conúcleo, existe $h : \operatorname{coKer} k \to Y$ tal que $f = h \circ c$. Como $q \circ f = 0$ entonces $q \circ h \circ c = 0$ y como c es un epimorfismo debe ser que $q \circ h = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, se tiene que existe un único morfismo $\phi : \operatorname{coKer} k \to \operatorname{Ker} q$ tal que $d \circ \phi = h$. $\square$

Definición 2.8.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Se define la imagen y coimagen de f como $Imf = \operatorname{Ker}(\operatorname{coKer} f), coImf = \operatorname{coKer}(\operatorname{Ker} f)$.

La demostración del siguiente resultado es un ejercicio.

Proposición 2.8.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Demostrar que el morfismo ϕ de la Proposición 2.8.5 es un isomorfismo. En particular* $\operatorname{Ker}(\operatorname{coKer} f) \simeq \operatorname{coKer}(\operatorname{Ker} f)$. $\square$

Corolario 2.8.8. *Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría Abeliana es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración. Asumamos que $f : X \to Y$ es un monomorfismo y epimorfismo. Escribamos $f = d \circ \phi \circ c$ como en la Proposición 2.8.5. Como f es un epimorfismo y un monomorfismo, $c = \operatorname{id}_X, d = \operatorname{id}_Y$. Por lo tanto $f = \phi$ y por la Proposición 2.8.7 f es un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.8.9. *Sean S, S' objetos simples en una categoría Abeliana $\mathcal{C}$. Si $\phi : S \to S'$ es un morfismo no nulo entonces es un isomorfismo.*

Demostración. Como $\ker \phi = 0$, ya que de lo contrario $\ker \phi = S$ y por lo tanto $\phi = 0$, se deduce que ϕ es un monomorfismo. Sea $q : S' \to Q$ el conúcleo de ϕ y sea $k : \operatorname{Ker} q \to S'$ su núcleo. Como S' es simple entonces $\operatorname{Ker} q = 0$ o bien $\operatorname{Ker} q = S'$. Si $\operatorname{Ker} q = 0$ entonces q es un monomorfismo, pero como $q \circ \phi = 0$ entonces debería ser que $\phi = 0$, lo cual contradice las hipótesis. Luego $\operatorname{Ker} q = S'$ entonces $q = 0$ y por lo tanto ϕ es un epimorfismo. En este caso ϕ es un isomorfismo. $\square$

Definición 2.8.10. Decimos que una sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es *exacta en Y* si $Imf = \operatorname{Ker} g$, como subobjetos de Y. Una sucesión

$$0 \to X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \to 0$$

es exacta, si es exacta en cada X_i, $i = 1, \dots, n+1$.

Ejercicio 2.8.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo. Demostrar que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} \operatorname{coKer}(f) \to 0$$

es exacta. Aquí k es el núcleo de f y q el conúcleo de f.

Debemos conciliar la definción previamente dada de sucesión exacta corta con la definición anterior. Esto es el siguiente resultado cuya demostración queda como ejercicio.

Proposición 2.8.12. *Una sucesión*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta si y sólo si es exacta en X, Y y Z. □

Ejercicio 2.8.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y una sucesión exacta corta

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{C}$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. La sucesión exacta corta (S) se escinde.
2. Existe un morfismo $\pi : Y \to X$ tal que $\pi \circ f = \mathrm{id}_X$.
3. Existen morfismos $\pi : Y \to X$, $\iota : Z \to Y$ tales que $\mathrm{id}_Y = f \circ \pi + \iota \circ g$.
4. Para cualquier $V \in \mathcal{C}$ la aplicación

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Y) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Z)$$

es suryectiva.

Ejercicio 2.8.14. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo entre categorías Abelianas. Demostrar que si F es fiel entonces para cada $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq 0$ entonces $X \simeq 0$. Demostrar que la recíproca no es cierta.

El siguiente resultado será de utilidad más adelante.

Proposición 2.8.15. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor aditivo exacto tal que para todo objeto $U \in \mathcal{C}$ no nulo, el objeto $F(U) \neq 0$. Entonces F es fiel.*

Demostración. Sean X, Y objetos y $f : X \to Y$. Asumamos que $F(f) = 0$. Por la Proposición 2.8.5 sabemos que $f = d \circ \phi \circ c$, donde $c : X \to \mathrm{coKer}\,\mathrm{Ker}\, f$ y $d : \mathrm{Ker}\,\mathrm{coKer}\, f :\to Y$. Como F es exacto, se tiene que

$$F(\mathrm{coKer}\,\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{coKer}\, F(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{coKer}\,\mathrm{Ker}\, 0 = 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{coKer}\,\mathrm{Ker}\, f = 0$. Entonces $c = 0$, de lo cual deducimos que $f = 0$. □

El siguiente resultado, que puede encontrarse en [**37**] o en [**70**, Thm. 6], se utilizará más adelante.

Teorema 2.8.16. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto a izquierda. Entonces F es representable.* □

Ejercicio 2.8.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana. Demostrar que el funtor

$$\Phi : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}_{e.i.}(\mathcal{C}, Ab), \quad \Phi(X) = L_X, \quad X \in \mathcal{C},$$

es un funtor exacto. Para la definición de L_X ver la ecuación (2.6.1).

Ejercicio 2.8.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana. Demostrar que si $F \in \mathrm{Fun}_{e.i.}(\mathcal{C}, Ab)$ es un objeto inyectivo entonces F es exacto.

Ejercicio 2.8.19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{A}$ una categoría Abeliana. Una sucesión de funtores $0 \to F \to G \to H \to 0$ en $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ es exacta corta si y sólo si la sucesión $0 \to F(X) \to G(X) \to H(X) \to 0$ es exacta corta para todo $X \in \mathcal{C}$.

2.8.2. Categorías semisimples.

Definición 2.8.20. Sea $\mathcal{C}$ aditiva. Decimos que $\mathcal{C}$ es semisimple si toda sucesión exacta corta se escinde.

Ejemplo 2.8.21.

1. Para cualquier cuerpo $\Bbbk$ la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es semisimple.
2. Si $\Bbbk$ es un cuerpo y G es un grupo finito tal que char $\Bbbk$ no divide al orden del grupo G, entonces ${}_{\Bbbk G}\mathcal{M}$ es semisimple.

Ejercicio 2.8.22. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) $\mathcal{C}$ es semisimple
(b) Todo objeto de $\mathcal{C}$ es proyectivo.
(c) Para cualquier objeto $V \in \mathcal{C}$, todo subobjeto de V posee un complemento directo.

2.8.3. La longitud de un objeto.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana.

Definición 2.8.23. Sea X un objeto de $\mathcal{C}$. Una *serie de composición* de X es una serie de subobjetos

$$0 = X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X_0 = X$$

tal que los objetos X_i/X_{i-1} son simples para todo $i = 0, \dots, n-1$. Los objetos simples X_i/X_{i-1} se llaman los *factores de composición* de X. Si S es un objeto simple, la *multiplicidad* de S en X es la cantidad de i tal que $S \sim X_i/X_{i-1}$. Se denotará a ese número por $[X : S]$.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio para el lector.

Proposición 2.8.24. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El objeto X posee una serie de composición*
$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X.$$
2. *Existe un natural n tal que para cualquier sucesión $0 = X_m \subset X_{m-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X_0 = X$ se tiene que $m \leq n$.*
3. *Cualquier sucesión decreciente $\cdots \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X_0 = X$ y creciente $X \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ se estabiliza.* $\square$

Definición 2.8.25. Si cualquiera de las condiciones de la proposición anterior se satisface decimos que X es de *longitud finita* y n es su *longitud*.

Teorema 2.8.26. *(Teorema de Jordan-Hölder) Sea X un objeto de longitud finita. Cualquier filtración de X puede ser extendida a una serie de composición. Dos series de composición tienen a un objeto simple dado con la misma multiplicidad.* $\square$

Proposición 2.8.27. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana donde todo objeto es de longitud finita. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples. Entonces el grupo de Grothendieck $G_0(\mathcal{C})$ es el grupo libre generado por $\mathcal{S}$.*

Demostración. Para todo objeto simple S denotemos por 1_S al elemento del grupo libre $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}}$ que tiene un 1 en la componente S y 0 en las demás. Definamos $\phi : \mathbb{Z}^{\mathcal{S}} \to G_0(\mathcal{C})$ y $\psi : G_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}^{\mathcal{S}}$ como sigue. Para cada objeto simple S

$$\phi(1_S) =< S >,$$

y $\psi(< M >) = \sum_{S\in\mathcal{S}}[M : S]1_S$. Observar que podemos definir el entero $[M : S]$ ya que todo objeto tiene longitud finita. El morfismo ψ es aditivo y claramente ϕ es suryectivo. Se puede observar que $\psi\circ\phi = \mathrm{id}$ evaluando en 1_S para objetos simples S. Esto demuestra que ϕ es inyectiva. $\square$

no estoy seguro que este del todo correcto el siguiente resultado

Proposición 2.8.28. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal con suficientes proyectivos, donde todo objeto es de longitud finita. Entonces todo objeto simple posee cubrimiento proyectivo.* $\square$

2.8.4. Subcategorías de Serre. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana. Una *subcategoría de Serre* de $\mathcal{C}$ es una subcategoría Abeliana plena $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ que es cerrada por subcocientes y extensiones. Una definición equivalente de ser Serre es que sea cerrada por sucesiones exactas cortas. Es decir $\mathcal{D}$ es una subcategoría de Serre de $\mathcal{C}$ si es una subcategoría plena tal que para toda suseción exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{C}$, el objeto Y pertenece a $\mathcal{D}$ si y sólo si X, Z pertenecen a $\mathcal{D}$.

Proposición 2.8.29. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. *Si $\mathcal{S}$ es una subcategoría Serre de $\mathcal{C}$ entonces el funtor inclusión $I : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ es exacto.*
2. *Sea $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor exacto. La subcategoría plena $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$ definida por aquellos objetos S tales que $F(S) = 0$ es una subcategoría Serre.*

Demostración. 1. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en la categoría $\mathcal{S}$. Demostraremos que $\ker_{\mathcal{S}} f = \ker_{\mathcal{C}} f$. Aquí denotamos por $\ker_{\mathcal{S}}$ y $\ker_{\mathcal{C}}$ a los núcleos calculados en las categorías respectivas.

Sea $k : \ker_{\mathcal{S}} f \to X$ el núcleo de f en $\mathcal{S}$ y $\widetilde{k} : \ker_{\mathcal{C}} f \to X$ el núcleo de f en $\mathcal{C}$. Por lo tanto $f \circ k = 0$. Por la universalidad del núcleo, existe un morfismo $u : \ker_{\mathcal{S}} f \to \ker_{\mathcal{C}} f$

tal que $k = \widetilde{k} \circ u$. Como $\mathcal{S}$ es Serre, es cerrada por subobjetos, por lo tanto el morfismo $\widetilde{k} : \ker_{\mathcal{C}} f \to X$ pertenece a $\mathcal{S}$. Como $f \circ \widetilde{k} = 0$, entonces existe un morfismo $v : \ker_{\mathcal{C}} f \to \ker_{\mathcal{S}} f$ tal que $\widetilde{k} = k \circ v$. Entonces

$$k = \widetilde{k} \circ u = k \circ v \circ u.$$

Por lo tanto $v \circ u = \mathrm{id}$. Análogamente se demuestra que $u \circ v = \mathrm{id}$. La demostración de que $\mathrm{coKer}_{\mathcal{S}} f = \mathrm{coKer}_{\mathcal{C}} f$ es completamente similar.

2. Se deduce del Lema 2.7.39. □

El siguiente resultado se puede encontrar en [**59**].

Teorema 2.8.30. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y $\mathcal{S}$ una subcategoría Serre. Existe una categoría Abeliana $\mathcal{C}/\mathcal{S}$ munida de un funtor exacto $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{S}$ tal que $Q(S) \simeq 0$ para todo $S \in \mathcal{S}$ y dicho funtor es universal para esta propiedad.* □

Ejemplo 2.8.31. Sea K un álgebra y sea $I \subseteq K$ un ideal bilátero. Denotemos por $\pi : K \to K/I$ la proyección canónica de álgebras. Tenemos un funtor $P : {}_{K/I}\mathfrak{m} \to {}_{K}\mathfrak{m}$ dado por $P(M) = M$ con acción

$$k \cdot m = \pi(k) \cdot m,$$

para todo $k \in K$, $m \in M$. La subcategoría plena $\mathcal{P}$ que es la imagén del funtor P es una subcategoría Serre. Para demostrar esto definamos el funtor $F : {}_{K}\mathfrak{m} \to {}_{K}\mathfrak{m}$, $F(M) = I \cdot M$. El funtor F es exacto y la subcategoría $\mathcal{P}$ coincide con los objetos $M \in {}_{K}\mathfrak{m}$ tales que $F(M) \simeq 0$.

2.8.5. Categorías finitas.

Definición 2.8.32. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Una categoría Abeliana $\mathcal{C}$ se dice $\Bbbk$-lineal si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial para todo par de objetos X, Y y la composición es $\Bbbk$-bilineal.

Una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *finita* si

(a) Todo objeto de $\mathcal{C}$ posee longitud finita;
(b) $\dim_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$;
(c) todo objeto simple de $\mathcal{C}$ posee cubrimiento proyectivo;
(d) la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples es finita.

Observación 2.8.33. Se sabe que toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita es equivalente a la categoría ${}_{A}\mathfrak{m}$, para algún álgebra A de dimensión finita. Dicha álgebra no está canónicamente determinada. Se prefiere usar, sin embargo, la definición antes dada ya que es intrínsica de la categoría.

Los siguientes resultados serán de utilidad más adelante. La demostración de ambos resultados sigue de que toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita es equivalente a la categoría ${}_{A}\mathfrak{m}$, para algún álgebra A de dimensión finita.

Proposición 2.8.34. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita, $S \in \mathcal{C}$ un objeto simple. Entonces para todo objeto $Y \in \mathcal{C}$ se tiene que*

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P(S), Y) = [Y : S]. \tag{2.8.2}$$

□

Como aplicación del resultado anterior se tiene el siguiente:

Corolario 2.8.35. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita donde I es un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de objetos simples. Para todo $X \in \mathcal{C}$*

$$\langle X \rangle = \sum_{S \in I} \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P(S), X) \, \langle S \rangle. \tag{2.8.3}$$

□

Recordemos que $\langle X \rangle$ denota la clase de isomorfismo de X en el grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$, Definición 2.7.38.

El siguiente resultado es [**8**, Proposición 5.2].

Proposición 2.8.36. *Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita y sea I el conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples. Asumamos que $I = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ es una unión disjunta. Si $\mathcal{C}_k$ es la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que consiste de aquellos objetos cuyos subcocientes simples pertenecen a J_k entonces existe una equivalencia $\mathcal{C} \simeq \oplus_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k$.* □

Proposición 2.8.37. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Existe una correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de objetos simples y clases de isomorfismos de objetos proyectivos indescomponibles. Si $S \in \mathcal{C}$ es un objeto simple, la correspondencia está dada por $S \leftrightsquigarrow P(S)$.* □

Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita, y sean $F, G : \mathcal{C} \to vect_{\Bbbk}$ dos funtores exactos fieles. Definimos el funtor $F \otimes G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to vect_{\Bbbk}$ por

$$(F \otimes G)(X, Y) := F(X) \otimes_{\Bbbk} G(Y), \quad X, Y \in \mathcal{C}.$$

Proposición 2.8.38. *Existe un isomorfismo canónico*

$$\alpha_{F,G} : \operatorname{End}(F) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{End}(G) \to \operatorname{End}(F \otimes G)$$

dado por

$$\alpha_{F,G}(\eta_1 \otimes \eta_2)_{F(X) \otimes G(Y)} = (\eta_1)_{F(X)} \otimes (\eta_2)_{G(X)}$$

para todo $\eta_1 \in \operatorname{End}(F), \eta_2 \in \operatorname{End}(G)$, $X, Y \in \mathcal{C}$. □

Lema 2.8.39. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Además, asumamos que los proyectivos e inyectivos en $\mathcal{D}$ coinciden. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *F es denso.*

(ii) *Todo objeto $Y \in \mathcal{D}$ es un subobjeto de $F(X)$ para algún objeto $X \in \mathcal{C}$.*
(iii) *Todo objeto $Y \in \mathcal{D}$ es un cociente de $F(X)$ para algún objeto $X \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Las implicaciones (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i), son evidentes. Veamos que (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $Y \in \mathcal{D}$ y $I(Y)$ la cápsula inyectiva. Como F es denso, $I(Y)$ es un subcociente de $F(X)$ para algún $X \in \mathcal{C}$. Es decir que existe $W \in \mathcal{D}$, un monomorfismo $\iota : I(Y) \hookrightarrow W$ y un epimorfismo $F(X) \twoheadrightarrow W$. Por ser $I(Y)$ inyectivo, existe un morfismo $f : W \to I(Y)$ tal que $f \circ \iota = \mathrm{id}$. Por lo tanto, $W = I(Y) \oplus U$, para algún $U \in \mathcal{D}$. Entonces tenemos un epimorfismo

$$F(X) \twoheadrightarrow W \twoheadrightarrow I(Y).$$

Como $I(Y)$ es inyectivo, también es proyectivo, por hipótesis. Luego existe un objeto $V \in \mathcal{D}$ tal que $F(X) = I(Y) \oplus V$. Así Y es un subobjeto de $F(X)$. La demostración de la implicación (i) $\Rightarrow$ (iii) es análoga, usando cubrimiento proyectivo. □

El siguiente resultado será útil más adelante. Es la recíproca del Teorema 2.7.43. Se deduce de los resultados de Watts, ver el Teorema 2.7.41.

Teorema 2.8.40. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas, y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto. Entonces F posee adjuntos a derecha e izquierda.* □

2.9. Producto tensorial de Deligne

Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales. En esta sección, todos los funtores serán aditivos $\Bbbk$-lineales.

Un *producto tensorial* de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ munida de un funtor $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}$ exacto a derecha tal que para toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{D}$ el funtor

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto GF} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$$

es una equivalencia de categorías. Aquí la categoría $BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ denota los bifuntores exactos a derecha en cada variable.

Lema 2.9.1. *Si el producto tensorial de dos categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ existe es único salvo equivalencia.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales y funtores

$$F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}, \quad F' : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}'$$

tales que los funtores

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto GF} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}),$$

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{A}', \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto GF'} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}),$$

son equivalencias de categorías para cualquier categoría Abeliana $\mathcal{D}$. En particular existen funtores $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $\Psi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ tales que

$$\Phi \circ F \sim F', \quad \Psi \circ F' \sim F.$$

Entonces $\Phi \circ \Psi \circ F' \sim F'$. Lo cual implica que $\Phi \circ \Psi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}$. Análogamente se demuestra que $\Psi \circ \Phi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, y por lo tanto las categorías $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ son equivalentes. $\square$

De ahora en más, si el producto tensorial de dos categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ existe se denotará por $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$.

Observación 2.9.2. Al funtor F de la definición de producto tensorial se lo denota $\boxtimes : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$ y para cada par $X \in \mathcal{C}_1, Y \in \mathcal{C}_2$ la imagen de este funtor se denota por $X \boxtimes Y$. Para enfatizar, a veces denotaremos a este funtor $\boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$. Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}_1$, $g : X' \to Y'$ es un morfismo en $\mathcal{C}_2$, denotaremos $f \boxtimes g : X \boxtimes X' \to Y \boxtimes Y'$ al morfismo en $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$ dado por $f \boxtimes g = \boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}(f, g)$.

Observación 2.9.3. Que el funtor

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto G \circ \boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D})$$

sea una equivalencia de categorías implica que para toda categoría Abeliana $\mathcal{D}$ y toda transformación natural $\mu : F \circ \boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} \to G \circ \boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$, donde $F, G : \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ son dos funtores, existe una única transformación natural $\widetilde{\mu} : F \to G$ tal que $\widetilde{\mu} \circ \boxtimes_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} = \mu$.

La siguiente proposición puede encontrarse en [**20**]. Ver también [**48**].

Proposición 2.9.4. *Asumamos que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Entonces*

- *El producto tensorial de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ existe;*
- *El funtor $\boxtimes : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$ es exacto en cada variable;*
- *Para toda toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{D}$ existe una equivalencia de categorías*

$$Fun_{e.}(\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \xrightarrow{G \mapsto GF} BiFun_{e.}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D});$$

- *La transformación natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X_1, Y_1) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(X_2, Y_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2}(X_1 \boxtimes X_2, Y_1 \boxtimes Y_2)$$

  es un isomorfismo de espacios vectoriales.
- *Si A, B son dos $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita entonces ${}_A\mathfrak{m} \boxtimes {}_B\mathfrak{m} \simeq {}_{A \otimes_{\Bbbk} B}\mathfrak{m}$.* $\square$

Lema 2.9.5. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales tales que existe el producto tensorial $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}', \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ funtores exactos a derecha. Entonces existe un único funtor $F \boxtimes G : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}' \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$ tal que*

$$(F \boxtimes G) \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \boxtimes_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} \circ (F \times G).$$

Demostración. El funtor $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ es exacto a derecha. Por lo tanto el funtor

$$\boxtimes_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} \circ (F \times G) : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$$

es exacto a derecha en cada variable. La existencia del funtor $F \boxtimes G$ se deduce de la propiedad universal del producto tensorial. $\square$

El siguiente Lema es una consecuencia inmediata de la definición de $\boxtimes$.

Lema 2.9.6. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{A}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas y sean $F, G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funtores exactos a derecha en cada variable. Vamos a denotar por $\overline{F}, \overline{G} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ a los funtores tales que*

$$\overline{F} \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = F, \quad \overline{G} \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = G.$$

Para toda transformación natural $\eta : F \to G$ existe una única transformación natural $\overline{\eta} : \overline{F} \to \overline{G}$ que verifica

$$\overline{\eta}_{X \boxtimes Y} = \eta_{(X,Y)},$$

para todo $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$. □

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio para el lector motivado.

Lema 2.9.7. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales tales que existe el producto tensorial $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}', \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F', G' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ funtores exactos a derecha y $\mu : F \to G$, $\nu : F' \to G'$ transformaciones naturales. Entonces existe una única transformación natural $\mu \boxtimes \nu : F \boxtimes F' \to G \boxtimes G'$ tal que $(\mu \boxtimes \nu)_{X \boxtimes Y} = \mu_X \boxtimes \nu_Y$ para todo $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{C}'$.* □

Ejercicio 2.9.8. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales tal que existe el producto tensorial. Demostrar que existe una equivalencia de categorías $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \simeq \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$.

Ejercicio 2.9.9. Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{D}$ son categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas tales que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$ entonces $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \simeq \mathcal{C}' \boxtimes \mathcal{D}$.

Proposición 2.9.10. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita entonces existe una equivalencia de categorías* $\mathrm{vect}_{\Bbbk} \boxtimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$.

Demostración. Demostraremos que $Matr_{\Bbbk} \boxtimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$. Definimos $F : Matr_{\Bbbk} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el funtor

$$F(n, X) = X^n = \underbrace{X \oplus \cdots \oplus X}_{n-veces},$$

para todo $(n, X) \in Matr_{\Bbbk} \times \mathcal{C}$. Se puede demostrar que F es exacto. Sea $\mathcal{A}$ una categoría Abeliana y sean

$$\Phi : Fun_{e.d.}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to BiFun_{e.d.}(Matr_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}),$$
$$\Psi : BiFun_{e.d.}(Matr_{\Bbbk} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}) \to Fun_{e.d.}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

los funtores dados por

$$\Phi(G) = G \circ F, \quad \Psi(H)(X) = H(1, X)$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Se puede demostrar que los funtores Φ, Ψ establecen una equivalencia de categorías. □

Ejercicio 2.9.11. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Demostrar que todo objeto simple es de la forma $U \boxtimes V \in \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ donde $U \in \mathcal{C}$ y $V \in \mathcal{D}$ son objetos simples.

2.10. La equivariantización de una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal

Sea G un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal. Una *acción* de G sobre $\mathcal{C}$ es una colección de funtores aditivos $\Bbbk$-lineales $\{F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\}_{g\in G}$ munidos de isomorfismos naturales

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}, \quad \gamma_0 : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to F_1,$$

tales que para todo $g, h, f \in G$, $X \in \mathcal{C}$

$$(\gamma_{gh,f})_X(\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X F_g((\gamma_{h,f})_X), \tag{2.10.1}$$

$$(\gamma_{g,1})_X F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X(\gamma_0)_{F_g(X)}. \tag{2.10.2}$$

Un objeto $X \in \mathcal{C}$ se dice *equivariante* si está equipado de una familia de isomorfismos $s = \{s_g : F_g(X) \to X\}_{g\in G}$ tales que $s_1(\gamma_0)_X = \mathrm{id}_X$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_g(F_h(X)) \arrow[r, "F_g(s_h)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_X"] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"'] \\ F_{gh}(X) \arrow[r, "s_{gh}"] & X \end{tikzcd} \tag{2.10.3}$$

es conmutativo para todo $g, h \in G$.

Definición 2.10.1. Decimos que la acción de G en $\mathcal{C}$ es *unitaria* si $F_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $\gamma_0 = \mathrm{id}$, $\gamma_{g,1} = \mathrm{id} = \gamma_{1,g}$ para todo $g \in G$.

Definición 2.10.2. La categoría $\mathcal{C}^G$ es la categoría cuyos objetos son pares (X, s) donde X es un objeto equivariante. Si (X, s), (Y, r) son dos objetos equivariantes, un morfismo $f : (X, s) \to (Y, r)$ entre ellos es un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ s_g = r_g \circ F_g(f)$ para todo $g \in G$. La categoría $\mathcal{C}^G$ se llama la *equivariantización* de $\mathcal{C}$ por G.

La demostración de la siguiente proposición queda como ejercicio para el lector.

Proposición 2.10.3. *Sea G un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal tal que G actua en $\mathcal{C}$.*

1. *La categoría $\mathcal{C}^G$ es Abeliana $\Bbbk$-lineal.*
2. *El funtor de olvido $\mathcal{F} : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$, $\mathcal{F}(X, s) = X$ para todo $(X, s) \in \mathcal{C}^G$, es fiel.*
3. *Definamos el funtor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^G$ dado por $L(X) = (\oplus_{h\in G} F_h(X), s^X)$, donde*

$$s_g^X : \oplus_{h\in G} F_g(F_h(X)) \to \oplus_{h\in G} F_h(X)$$

está dado, componente a componente, por $\gamma_{g,h}$. Entonces L es adjunto a derecha e izquierda de $\mathcal{F}$. En particular $\mathcal{F}$ es exacto.

4. *Si $\mathcal{C}$ es además finita entonces $\mathcal{C}^G$ es finita.*
5. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana semisimple entonces $\mathcal{C}^G$ es semisimple.* □

Ejemplo 2.10.4. Sea A un álgebra de dimensión finita. Asumamos que para todo $g, h \in G$ existen

- morfismos de álgebras $g_* : A \to A$;
- elementos $\theta_{g,h} \in A^\times$

tales que para todo $a \in A$ y para todo $g, h, f \in G$

$$1_* = \mathrm{id}_A, \quad \theta_{g,h} h_*(g_*(a)) = (gh)_*(a)\theta_{g,h}, \quad \theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h}) = \theta_{g,hf}\theta_{h,f},$$
$$\theta_{g,1} = 1 = \theta_{1,g}.$$

Para todo $g, h \in G$ definimos

$$F_g : {}_A\mathfrak{m} \to {}_A\mathfrak{m}, \quad F_g(M) = M.$$

La acción de A en $F_g(M)$ está dada por $a \triangleright m = g_*(a) \cdot m$, para todo $a \in A, m \in M$. Además definamos para todo $g, h \in G$, $M \in {}_A\mathfrak{m}$, $m \in M$

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}, \quad (\gamma_{g,h})_M(m) = \theta_{g,h} \cdot m.$$

Es inmediato comprobar que esto induce una acción del grupo G en la categoría ${}_A\mathfrak{m}$. Si definimos sobre el espacio vectorial $A \otimes_\Bbbk \Bbbk G$ el siguiente producto

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \theta_{g,h} h_*(a) b \otimes gh,$$

para todo $a, b \in A, g, h \in G$. Se puede comprobar que con esta estructura el espacio $A \otimes_\Bbbk \Bbbk G$ es un álgebra.

Afirmación 2.10.1. *Se tiene una equivalencia de categorías*

$$({}_A\mathfrak{m})^G \simeq {}_{A \otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m}.$$

Demostración de la afirmación. Sean $\Phi : ({}_A\mathfrak{m})^G \to {}_{A \otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m}$, $\Psi : {}_{A \otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m} \to ({}_A\mathfrak{m})^G$ los funtores definidos de la siguiente manera. Para todo $(X, s) \in ({}_A\mathfrak{m})^G, M \in {}_{A \otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m}$ definamos

$$\Phi(X, s) = X, \quad \Psi(M) = (M, r).$$

Donde la acción de $A \otimes_\Bbbk \Bbbk G$ en X está dada por $(a \otimes g) \cdot x = s_g(a \cdot x)$. Para todo $g \in G$ los morfismos $r_g : M \to M$ se definen $r_g(m) = (1 \otimes g) \cdot m$. □

Veamos un ejemplo de esta situación. Sea $m \in \mathbb{N}$, $n = m^2$, $q \in \mathbb{C}$ una raíz m-ésima de la unidad y H el álgebra generada por elementos h, x sujetos a las relaciones

$$hx = q\,xh, \quad x^n = 0, \quad h^n = 1$$

Sea A la subálgebra de H generada por x y h^m, y sea $C_m =< g >$ el grupo cíclico de orden m generado por g. Definimos

$$(g^i)_* : A \to A, \quad (g^i)_*(a) = h^i a h^{-i}, \quad \theta_{(g^i, g^j)} = h^{i+j-(i+j)'}$$

Aquí para todo $z \in \mathbb{Z}$ denotamos por z' al resto en la división por m.

arreglar este ejemplo

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales equipadas de acciones de un grupo G via funtores F_g y $\widetilde{F}_g$, respectivamente. Sea $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que H es *G-equivariante* si está equipado de isomorfismos naturales

$$\pi_g : H \circ F_g \to \widetilde{F}_g \circ H,$$

para todo $g \in G$, tales que

$$(\pi_1)_X H(\gamma_0)_X = (\widetilde{\gamma}_0)_{H(X)}, \quad (\pi_{gh})_X H(\gamma_{gh})_X = (\widetilde{\gamma}_{gh})_{H(X)} F_g(\pi_h)_X (\pi_g)_{F_h(X)}, \tag{2.10.4}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor G-equivariante, entonces podemos definir un funtor $H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ de la siguiente forma. Si $(X, s) \in \mathcal{C}^G$ entonces $H^G(X, s) = (H(X), t)$, donde

$$t_g = H(s_g)(\pi_g^{-1})_X,$$

para todo $g \in G$. La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio.

Proposición 2.10.5. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales equipadas de acciones de un grupo G.*

1. *Demostrar que existe una acción de G en $\mathcal{C}$ unitaria y una equivalencia G-equivariante $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.*
2. *Si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia G-equivariante, entonces $H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ es una equivalencia de categorías.* $\square$

Ejercicio 2.10.6. Sea G un grupo finito. El grupo G actua en $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ trivialmente, es decir $F_g = \mathrm{Id}$, $\gamma_{g,h} = \mathrm{id}$ para todo $g, h \in G$. Demostrar que existe una equivalencia de categorías $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^G \simeq \mathrm{Rep}\,(G)$.

Capítulo 3

Categorías tensoriales

3.1. Categorías monoidales

Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$, donde

- $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathbf{1}$ es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor;
- $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)\}$, $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})\}$, y $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos naturales;

sujetos al *axioma del pentágono*, esto es

$$a_{X,Y,Z\otimes W}\, a_{X\otimes Y,Z,W} = (\operatorname{id}_X \otimes a_{Y,Z,W})\, a_{X,Y\otimes Z,W}\, (a_{X,Y,Z} \otimes \operatorname{id}_W), \tag{3.1.1}$$

para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$, y sujetos al *axioma del triángulo*:

$$(\operatorname{id}_X \otimes l_Y)\, a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes \operatorname{id}_Y, \tag{3.1.2}$$

para todo objeto X, Y en $\mathcal{C}$. Es decir que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes W \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},W}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes W) \arrow[dl, "id\otimes l_W"] \\
 & X \otimes W &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$.

Observación 3.1.1. A veces denotaremos la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ para enfatizar que los morfismos de asociatividad y unidad pertencen a $\mathcal{C}$.

Definición 3.1.2. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *estricta* si para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z), \quad \mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1},$$

y los morfismos de asociatividad y unidad son las identidades.

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [**47**].

Lema 3.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *El objeto unidad es único salvo isomorfismo.*
2. $r_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}}$.
3. *El conjunto* $\operatorname{End}(\mathbf{1})$ *es un monoide conmutativo con la composición.*

□

Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, un *funtor cuasi-monoidal* entre dichas categorías es una terna (F, ζ, ϕ), donde:

- $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es un funtor;
- $\zeta_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$, es una familia de isomorfismos naturales para todo $X, Y \in \mathcal{C}_1$;
- $\phi : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo.

El funtor (F, ζ, ϕ) se dice *monoidal* si además se satisface que

$$\zeta_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \zeta_{Y,Z}) a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}), \tag{3.1.3}$$

$$l_{F(X)} = F(l_X) \zeta_{\mathbf{1},X}(\phi \otimes \mathrm{id}_{F(X)}), \tag{3.1.4}$$

$$r_{F(X)} = F(r_X) \zeta_{X,\mathbf{1}}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \phi), \tag{3.1.5}$$

para todo objeto $X, Y, Z \in \mathcal{C}_1$.

Definición 3.1.4. Un funtor monoidal (F, ζ, ϕ) se dice *estricto* si $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, para todo X, Y se satisface que $F(X) \otimes F(Y) = F(X \otimes Y)$ y los isomorfismos ζ, ϕ son las identidades. Un funtor monoidal (F, ζ, ϕ) se dice *unitario* si $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $\phi = \mathrm{id}$ y $\zeta_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{id} = \zeta_{\mathbf{1},X}$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Si $(F, \zeta, \phi), (F', \zeta', \phi')$ son funtores monoidales entre las categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, una *transformacion natural monoidal* $\theta : (F, \zeta, \phi) \to (F', \zeta', \phi')$ es una transformación natural $\theta : F \to F'$ tal que para cualquier $X, Y \in \mathcal{C}_1$

$$\theta_{\mathbf{1}} \phi = \phi', \quad \theta_{X\otimes Y} \zeta_{X,Y} = \zeta'_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y). \tag{3.1.6}$$

Un *isomorfismo monoidal natural* es una transformación monoidal natural que es un isomorfismo natural.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ son categorías monoidales y $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, (F', \zeta', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son funtores monoidales entonces la composición de ellos es un nuevo funtor monoidal $(F' \circ F, \xi, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definido por:

$$\xi_{X,Y} : (F' \circ F)(X) \otimes (F' \circ F)(Y) \to (F' \circ F)(X \otimes Y),$$
$$\xi_{X,Y} = F'(\zeta_{X,Y})\zeta'_{F(X),F(Y)},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. Además $\psi : \mathbf{1} \to F' \circ F(\mathbf{1})$ está definido por $\psi = F'(\phi) \circ \phi'$. Queda como ejercicio verificar que este nuevo funtor es efectivamente monoidal.

Lema 3.1.5. *Las composiciones horizontal y vertical de transformaciones naturales monoidales entre funtores monoidales es nuevamente una transformación monoidal.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías monoidales munidas de funtores monoidales $(J, \zeta), (H, \xi) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $(G, \xi'), (F, \zeta') : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con $\nu : J \to H, \eta : F \to G$ transformaciones naturales monoidales. Verfiquemos que la composición horizontal $\nu \circ \eta : J \circ F \to G \circ H$ es una transformación natural monoidal.

Sean $X, Y \in$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
(\nu \circ \eta)_{X \otimes Y} J(\zeta'_{X,Y})\zeta_{F(X),F(Y)} &= \nu_{G(X \otimes Y)} J(\eta_{X \otimes Y}) J(\zeta'_{X,Y})\zeta_{F(X),F(Y)} \\
&= \nu_{G(X \otimes Y)} J(\xi'_{X,Y}(\eta_X \otimes \eta_Y))\zeta_{F(X),F(Y)} \\
&= \nu_{G(X \otimes Y)} J(\xi'_{X,Y})\zeta_{G(X),G(Y)}(J(\eta_X) \otimes J(\eta_Y)) \\
&= H(\xi'_{X,Y})\nu_{G(X) \otimes G(Y)}\zeta_{G(X),G(Y)}(J(\eta_X) \otimes J(\eta_Y)) \\
&= H(\xi'_{X,Y})\xi_{G(X),G(Y)}(\nu_{G(X)} \otimes \nu_{G(Y)})(J(\eta_X) \otimes J(\eta_Y)) \\
&= H(\xi'_{X,Y})\xi_{G(X),G(Y)}((\nu \circ \eta)_X \otimes (\nu \circ \eta)_Y).
\end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a la definición, la segunda a que η es una transformación natural monoidal, la tercera por la naturalidad de ζ, la cuarta por la naturalidad de ν y la quinta se debe a que ν es monoidal. La demostración que la composición vertical es monoidal es inmediata. ☐

La subcategoría de funtores monoidales entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ se denotará por $\mathrm{Fun}_{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ es un funtor monoidal $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tal que existe otro funtor monoidal $(F', \zeta', \phi') : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ e isomorfismos naturales monoidales $\theta_1 : F \circ F' \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $\theta_2 : F' \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$. En este caso diremos que las categorías $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son *monoidalemente equivalentes*, y se denotará $\mathcal{C}_1 \simeq_{\otimes} \mathcal{C}_2$
.

La demostración del siguiente lema puede encontrarse en [**47**, Lemma XI.2.2].

Lema 3.1.6. *Sea* $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ *una categoría monoidal. Para todo par de objetos* $X, Y \in \mathcal{C}$ *se verifica*

$$l_{X \otimes Y} a_{\mathbf{1},X,Y} = l_X \otimes \mathrm{id}_Y, \quad (\mathrm{id}_X \otimes r_Y) a_{X,Y,\mathbf{1}} = r_{X \otimes Y}. \tag{3.1.7}$$

□

3.1.1. Ejemplos de categorías monoidales. Queda como ejercicio para el lector completar los detalles de la demostración de que las siguientes categorías son monoidales.

1. La categoría de conjuntos Set es monoidal. El producto tensorial $\times : Set \times Set \to Set$ es el producto cartesiano. El objeto unidad $\mathbf{1} = \{*\}$ es el conjunto con un único elemento. Los morfismos de asociatividad son los canónicos. Para cualquier conjunto X los isomorfismos $l_X : \mathbf{1} \times X \to X$, $r_X : X \times \mathbf{1} \to X$ están dados por
$$l_X(*, x) = x, \qquad r_X(x, *) = x,$$
para todo $x \in X$.
2. Toda categoría aditiva es monoidal tomando el producto tensorial dado por la suma directa y el objeto unidad el objeto cero de la categoría.
3. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. La categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es monoidal. El producto tensorial $\otimes : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \times \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es el producto tensorial sobre el cuerpo de base $\otimes_{\Bbbk}$. El morfismo de asociatividad es el canónico, es decir que si X, Y, Z son $\Bbbk$-espacios vectoriales, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ entonces
$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes_{\Bbbk} Y) \otimes_{\Bbbk} Z \to X \otimes_{\Bbbk} (Y \otimes_{\Bbbk} Z), \quad a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$
El objeto unidad es el cuerpo $\Bbbk$ y los isomorfismos $V \otimes \Bbbk \simeq V \simeq \Bbbk \otimes V$ son los canónicos. La categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ de espacios vectoriales de dimensión finita es monoidal con la misma estructura de $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$.
4. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. La categoría $\mathrm{Supervect}_{\Bbbk}$ de super espacios vectoriales. Los objetos son $\Bbbk$-espacios vectoriales V de dimensión finita equipados de una graduación $V = V_0 \oplus V_1$. Los morfismos son aquellas transformaciones lineales que preservan la graduación. Si $V, W \in \mathrm{Supervect}_{\Bbbk}$ el producto tensorial es $V \otimes W = V \otimes_{\Bbbk} W$, con graduación
$$(V \otimes W)_0 = V_0 \otimes_{\Bbbk} W_0 \oplus V_1 \otimes_{\Bbbk} W_1 \ , \quad (V \otimes W)_1 = V_0 \otimes_{\Bbbk} W_1 \oplus V_1 \otimes_{\Bbbk} W_0.$$
La asociatividad y los morfismos de unidad a derecha e izquierda son los mismos que en la categoría de espacios vectoriales.
5. Sea H una biálgebra sobre $\Bbbk$. La categoría ${}_H\mathcal{M}$ es monoidal. El producto tensorial $\otimes : {}_H\mathcal{M} \times {}_H\mathcal{M} \to {}_H\mathcal{M}$ es el producto tensorial sobre el cuerpo de base $\otimes_{\Bbbk}$. Si $V, W \in {}_H\mathcal{M}$ la estructura de H-módulo sobre $V \otimes_{\Bbbk} W$ es la siguiente. Si $v \in V, w \in W$, $h \in H$ entonces
$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w.$$
Los morfismos de asociatividad son los mismos que en la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ del ejemplo anterior. Falta demostrar que dichos morfismos son de H-módulos: Si

X, Y, Z son H-módulos, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ entonces

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z}(h \cdot ((x \otimes y) \otimes z)) &= a_{X,Y,Z}(h_{(1)} \cdot (x \otimes y) \otimes h_{(2)} \cdot z)) \\ &= a_{X,Y,Z}((h_{(1)(1)} \cdot x \otimes h_{(1)(2)} \cdot y) \otimes h_{(2)} \cdot z)) \\ &= h_{(1)(1)} \cdot x \otimes (h_{(1)(2)} \cdot y \otimes h_{(2)} \cdot z) \\ &= h_{(1)} \cdot x \otimes (h_{(2)(1)} \cdot y \otimes h_{(2)(2)} \cdot z) \\ &= h \cdot a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z). \end{aligned}$$

La cuarta igualdad sigue de la coasociatividad del coproducto de H. El objeto unidad es el cuerpo de base $\Bbbk$ con acción de H dada por la counidad, es decir que si $\epsilon : H \to \Bbbk$ es la counidad, $h \in H, \lambda \in \Bbbk$ entonces $h \cdot \lambda = \epsilon(h)\lambda$. Los isomorfismos l y r son los mismos que en la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. La categoría de ${}_H\mathfrak{m}$ es monoidal con la misma estructura. De ahora en más denotaremos $\mathrm{Rep}\,(H) = {}_H\mathfrak{m}$ para enfatizar que estamos utilizando esta estructura monoidal.

6. Similarmente al ejemplo anterior, si H es una biálgebra, la categoría ${}^H\mathcal{M}$ de H-comódulos a izquierda es una categoría monoidal. La subcategoría plena de H-comódulos de dimensión finita la denotaremos por $\mathrm{Comod}\,(H)$.

7. Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo, es decir que para todo $a, b, c, d \in G$

$$\omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(b, c, d) = \omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd).$$

Denotaremos por $\mathcal{C}(G, \omega)$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, es decir que los objetos son los $\Bbbk$-espacios vectoriales V de dimensión finita equipados de una G-graduación: $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ y los morfismos son aquellas transformaciones lineales que preservan la graduación. Esta categoría es monoidal como sigue. Si $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, y $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$ son objetos en $\mathcal{C}(G, \omega)$, entonces

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} (V \otimes W)_g,$$

donde $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes_{\Bbbk} W_y$. El objeto unidad es $\Bbbk$ concentrado en grado 1, la identidad del grupo. El morfismo de asociatividad esta dado por el 3-cociclo ω, es decir $a_{UVW} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ está definido como

$$a_{UVW}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g, h, f)\ u \otimes (v \otimes w),$$

donde $u \in U_g, v \in V_h, w \in W_f$, $g, h, f \in G$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda $l_X : \Bbbk \otimes X \to X, r_X : X \otimes \Bbbk \to X$ están dados por

$$l_X(1 \otimes x) = \omega(1, h, h^{-1})\ x, \quad r_X(x \otimes 1) = \omega(h, 1, 1)\ x,$$

para todo $x \in X_h$. Cuando ω es trivial $\mathcal{C}(G, \omega)$ coincide con la categoría de $\Bbbk G$-comódulos.

10. Sea R un anillo. La categoría de R-bimódulos ${}_R\mathcal{M}_R$ es monoidal. El producto tensorial es $\otimes_R$, el objeto unidad es R con las acciones regulares a derecha e izquierda.

11. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la categoría de endofuntores $\operatorname{End}(\mathcal{C})$ es monoidal con producto tensorial dado por la composición de funtores. Recordemos que en esta categoría la composición de transformaciones naturales es la vertical. Esta categoría monoidal es estricta. El objeto unidad es el funtor identidad, los morfismos de asociatividad son las igualdades. La composición de transformaciones naturales es la vertical y el producto tensorial de dos transformaciones naturales es la horizontal. Es decir, si $F, F', G, G' \in \operatorname{End}(\mathcal{C})$ y $\eta : F \to G, \mu : F' \to G'$ son trasformaciones naturales, entonces $\eta\otimes\mu : F \circ F' \to G \circ G'$ es la transformación natural dada por

$$(\eta\otimes\mu)_X : F(F'(X)) \to G(G'(X)), \quad (\eta\otimes\mu)_X = G(\mu_X) \circ \eta_{F'(X)},$$

para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$. La subcategoría plena de funtores exactos $\operatorname{End}_e(\mathcal{C})$ hereda una estructura monoidal.

12. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal. Vamos a denotar por

$$\mathcal{C}^{rev} = (\mathcal{C}^{rev}, \otimes^{rev}, a^{rev}, r^{rev}, l^{rev}, \mathbf{1}^{rev})$$

a la siguiente categoría monoidal. Como categorías $\mathcal{C}^{rev} = \mathcal{C}$. El producto tensorial $\otimes^{rev} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $X \otimes^{rev} Y = Y\otimes X$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. Si $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ entonces

$$a^{rev}_{X,Y,Z} : Z\otimes(Y\otimes X) \to (Z\otimes Y)\otimes X, \quad a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X};$$

$$r^{rev}_X = l_X, \quad l^{rev}_X = r_X, \quad \mathbf{1}^{rev} = \mathbf{1}.$$

13. Sea $\Bbbk$ un cuerpo, A un grupo abeliano finito, $\chi : A \times A \to \Bbbk$ un bicaracter simétrico no degenerado y τ una raíz cuadrada de $\frac{1}{|A|}$. La categoría $\mathcal{T}Y(A, \chi, \tau)$ es la categoría semisimple esquelética cuyos objetos son sumas directas finitas de los elementos $S := A \sqcup \{m\}$. Los morfismos entre elementos de S están dados por

$$\operatorname{Hom}(s, t) = \begin{cases} \Bbbk \operatorname{id}_s & \text{if } s = t, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

El producto tensorial de dos elementos de S está dado por:

$$a \otimes b = ab, \quad a \otimes m = m = m \otimes a, \quad m \otimes m = \bigoplus_{x\in A} x \quad (a, b \in A).$$

El objeto unidad es $1 \in A$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda son las identidades. El isomorfismo de asociatividad α está determinado por:

$$\alpha_{a,m,b} = \chi(a,b)\,\mathrm{id}_m : m \to m;$$
$$\alpha_{m,a,m} : \bigoplus_{x\in A} x \to \bigoplus_{y\in A} y, \quad (\alpha_{m,a,m})_{x,y} = \chi(a,x)\delta_{x,y}\mathrm{id}_x;$$
$$\alpha_{m,m,m} : \bigoplus_{x\in A} m \to \bigoplus_{y\in A} m, \quad (\alpha_{m,m,m})_{x,y} = \tau\,\chi(x,y)^{-1}\,\mathrm{id}_m;$$

para todo $a, b \in A$. El resto de las asociatividades son las identidades. Notar que aquí estamos denotando por $(\alpha_{m,a,m})_{x,y}$ a la componente homogénea que sale de x y llega a y. La categoría $\mathcal{TY}(A, \chi, \tau)$ se la conoce como la *categoría de Tambara-Yamagami*. Ver [**68**].

14. Sea R un anillo conmutativo con unidad. La categoría $\mathfrak{C}hain(R)$ posee una estructura monoidal como sigue. Si $C, D \in \mathfrak{C}hain(R)$ entonces definimos

$$(C\otimes D)_n = \oplus_{n=r+s}\, C_r \otimes_R D_s,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. El morfismo $d : C\otimes D \to C\otimes D$ se define

$$d(x\otimes y) = d(x)\otimes y + (-1)^r\, x\otimes d(y),$$

para todo $x \in C_r, y \in D_s$. Queda como ejercicio definir la asociatividad y la unidad y demostrar que se satisfacen los axiomas de categoría monoidal.

15. Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo con unidad, $N \in \mathbb{N}$ y sea $q \in \mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $[n]_q = q^{n-1} + \cdots + q + 1$, $[0]_q = 1$. Asumiremos que

$$[N]_q = 0, \quad \text{y} \quad [n]_q \in \mathbb{K}^\times \text{ para } N-1 \geq n \geq 1.$$

Como en el ejemplo anterior, dados $C, D \in \mathfrak{C}hain_N(\mathbb{K})$ se define

$$(C\otimes D)_n = \oplus_{n=r+s}\, C_r \otimes_R D_s,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. El morfismo $d : C\otimes D \to C\otimes D$ se define

$$d(x\otimes y) = d(x)\otimes y + q^n\, x\otimes d(y),$$

para todo $x \in C, y \in D$. Queda como ejercicio demostrar que $(C\otimes D, d) \in \mathfrak{C}hain_N(\mathbb{K})$, además definir la asociatividad, unidad y demostrar que se satisfacen los axiomas de categoría monoidal.

16. La categoría de trenzas $\mathbb{B}$ (presentada en el ejemplo 10 de la sección 2.1.1) es monoidal estricta. Dados dos objetos $n, m \in \mathbb{N}_0$ el producto tensorial es $n\otimes m = n + m$. El objeto unidad es 0. Los morfismos de asociatividad y unidad son los triviales. Se sabe que para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$ existe una función $\odot_{n,m} : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_m \to \mathbb{B}_{n+m}$ dada por la yuxtaposición de trenzas. Entonces si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(n, n), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(m, m)$ su producto tensorial es $f\otimes g = \odot_{n,m}(f, g)$.

Ejercicio 3.1.7. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías monoidales entonces $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ posee una estructura natural de categoría monoidal.

Ejercicio 3.1.8. Demostrar que si H es una biálgebra entonces existe una equivalencia monoidal ${}_H\mathcal{M}^{rev} \simeq_{\otimes} {}_{H^{\mathrm{cop}}}\mathcal{M}$.

Ejercicio 3.1.9. Sea $\mathcal{C}$ unca categoría monoidal. Denotamos por $\mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ a la subcategoría de $\mathrm{End}(\mathcal{C})$, descripta en el ejemplo 3.1.1 (11). Demostrar que $\mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ es monoidal con la restricción del producto monoidal de $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

Denotemos por $\mathrm{End}^{u}_{\otimes}(\mathcal{C})$, la subcategoría plena de $\mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$, que consiste de aquellos funtores monoidales unitarios, ver definición 3.1.4. Demostrar que existe una equivalencia monoidal $\mathrm{End}^{u}_{\otimes}(\mathcal{C}) \simeq_{\otimes} \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$.

Ejercicio 3.1.10. Recordar la definición de acción de un grupo finito G sobre una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ dada en la sección 2.10. Denotemos por $\underline{G}$ la categoría monoidal cuyos objetos son los elementos de G, el producto tensorial está determinado por el producto de G. Demostrar que una acción de un grupo finito G sobre una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ es lo mismo que un funtor monoidal $F : \underline{G} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$. Aquí $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ denota la categoría monoidal de autoequivalencias aditivas $\Bbbk$-lineales de $\mathcal{C}$.

Proposición 3.1.11. *Toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal esquelética.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una categoría monoidal y $Sk(\mathcal{D})$ su esqueleto. Para cada $X \in \mathcal{D}$ denotamos por $\overline{X} \in Obj(Sk(\mathcal{D}))$ al único objeto de $Sk(\mathcal{D})$ que es isomorfo a X y sea $d_X : X \to \overline{X}$ un isomorfismo. Demostremos que la categoría $Sk(\mathcal{D})$ posee una estructura monoidal y que $Sk(\mathcal{D})$ es equivalente monoidalemente a $\mathcal{D}$.

Definimos el producto monoidal $\odot : Sk(\mathcal{D}) \times Sk(\mathcal{D}) \to Sk(\mathcal{D})$ de la siguiente forma $\overline{X} \odot \overline{Y} = \overline{X\otimes Y}$. Denotemos $\sigma_{X,Y} := d^{-1}_{X\otimes Y} : \overline{X} \odot \overline{Y} \to X\otimes Y$, y si $f \in Hom_{Sk(\mathcal{D})}(X, X')$ y $g \in Hom_{Sk(\mathcal{D})}(Y, Y')$ entonces $f\odot g = \sigma^{-1}_{X',Y'}\circ(f\otimes g)\circ\sigma_{X,Y}$. Claramente $\odot$ define un funtor. Si $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ los isomorfismos de asociatividad $\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} : (\overline{X} \odot \overline{Y}) \odot \overline{Z} \to \overline{X} \odot (\overline{Y} \odot \overline{Z})$ están dados por

$$\overline{a}_{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}} = \sigma^{-1}_{X,Y\odot Z}(\mathrm{id}_X\otimes\sigma^{-1}_{Y,Z})a_{X,Y,z}(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_Z)\sigma_{X\odot Y,Z},$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{D}$. Se puede demostar que los funtores $G : \mathcal{C} \to Sk(\mathcal{D})$, $F : Sk(\mathcal{D}) \to \mathcal{C}$, $G(X) = \overline{X}$, $F(\overline{X}) = \overline{X}$ son monoidales y establecen una equivalencia de categorías. $\square$

3.2. Ejemplos de funtores monoidales

3.2.1. Funtores monoidales y álgebras de Hopf.

Sea H un álgebra de Hopf.

Definición 3.2.1. Un *twist* para H es un elemento inversible $J \in (H\otimes H)^{\times}$ que satisface

$$(\Delta\otimes\mathrm{id}_H)(J)(J\otimes 1) = (\mathrm{id}_H\otimes\Delta)(J)(1\otimes J), \tag{3.2.1}$$

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(J) = 1 = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(J). \tag{3.2.2}$$

Se usará la siguiente notación: $J = J^1 \otimes J^2, J^{-1} = J^{-1} \otimes J^{-2}$.

Si $x \in H^\times$ es un elemento tal que $\varepsilon(x) = 1$ y J es un twist entonces

$$J^x = \Delta(x) J (x^{-1} \otimes x^{-1}), \tag{3.2.3}$$

es también un twist. Diremos que J y J^x son equivalentes.

Si J es un twist para H entonces existe una nueva álgebra de Hopf H^J con la misma estructura de álgebra y la misma counidad que H, pero con comultiplicación y antípoda determinadas por

$$\Delta^J(h) = J^{-1}\Delta(h)J, \quad \mathcal{S}^J(h) = Q_J^{-1}\mathcal{S}(h)Q_J,$$

para todo $h \in H$. Donde $Q_J = \mathcal{S}(J^1)J^2$ es un elemento inversible de H con inverso $Q_J^{-1} = J^{-1}\mathcal{S}(J^{-2})$.

Si J y J' son twists equivalentes entonces las álgebras de Hopf H^J, $H^{J'}$ son isomorfas vía

$$\phi : H^J \to H^{J'}, \quad \phi(h) = xhx^{-1}, \quad \text{para todo } h \in H.$$

Lema 3.2.2. *Sea H un álgebra de Hopf y J un twist para H. Entonces:*

1. *El funtor $(F, \xi^J) : {}_H\mathcal{M} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es monoidal, donde F es el funtor de olvido y para todo $X, Y \in {}_H\mathcal{M}$, $x \in X, y \in Y$*

$$\xi^J_{X,Y} : X \otimes_{\Bbbk} Y \to X \otimes_{\Bbbk} Y, \quad \xi^J_{X,Y}(x \otimes y) = J^1 \cdot x \otimes J^2 \cdot y.$$

2. *Las categorías ${}_H\mathcal{M}$, ${}_{H^J}\mathcal{M}$ son monoidalmente equivalentes.*

Demostración. 1. Demostremos que (3.1.3) se satisface. Sean $X, Y, Z \in {}_H\mathcal{M}$, $x \in X, y \in Y$, $z \in Z$. Entonces

$$\begin{aligned}
\xi^J_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \xi^J_{Y,Z})(x \otimes y \otimes z) &= \xi^J_{X,Y\otimes Z}(x \otimes J^1 \cdot y \otimes J^2 \cdot z) \\
&= j^1 \cdot x \otimes j^2 \cdot \big(J^1 \cdot y \otimes J^2 \cdot z\big) \\
&= j^1 \cdot x \otimes {j^2}_{(1)} J^1 \cdot y \otimes {j^2}_{(2)} J^2 \cdot z \\
&= (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J) \cdot (x \otimes y \otimes z).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\xi^J_{X\otimes Y,Z}(\xi^J_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)})(x \otimes y \otimes z) &= \xi^J_{X\otimes Y,Z}(J^1 \cdot x \otimes J^2 \cdot y \otimes z) \\
&= {j^1}_{(1)} J^1 \cdot x \otimes {j^1}_{(2)} J^2 \cdot y \otimes j^2 \cdot z \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{id}_H)(J)(J \otimes 1) \cdot (x \otimes y \otimes z).
\end{aligned}$$

2. El funtor $(F, \xi^J) : {}_H\mathcal{M} \to {}_{H^J}\mathcal{M}$ es una equivalencia monoidal. □

Sea A una extensión Hopf-Galois de H. Es decir que A es un H-comódulo algebra a derecha con coinvariantes triviales y el morfismo

$$can : A \otimes_{\Bbbk} A \to H \otimes_{\Bbbk} A, \quad can(a \otimes b) = ab_{(-1)} \otimes b_{(0)},$$

es un isomorfismo. Definamos el funtor $\mathcal{F}_A : \text{Comod}\,(H) \to \text{vect}_{\Bbbk}$, $\mathcal{F}_A(X) = A\Box_H X$ para todo $X \in \text{Comod}\,(H)$. Para todo $X, Y \in \text{Comod}\,(H)$ los morfismos

$$\xi^A_{X,Y} : (A\Box_H X)\otimes_{\Bbbk}(A\Box_H X) \to A\Box_H(X\otimes_{\Bbbk} Y),$$

$$\xi_{X,Y}(a_i\otimes x_i\otimes b_i\otimes y_i) = a_i b_i\otimes x_i\otimes y_i,$$

son isomorfismos bien definidos.

Teorema 3.2.3. [**69**] *Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Para cada A extensión Hopf-Galois de H los funtores $(\mathcal{F}_A, \xi^A)$ son funtores tensoriales.*
2. *Si $\mathcal{F} : \text{Comod}\,(H) \to \text{vect}_{\Bbbk}$ es un funtor tensorial entonces existe una extensión Hopf-Galois A tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$.* □

3.2.2. Funtores monoidales para $\mathcal{C}(G, \omega)$. Sea G un grupo finito y $\omega_1, \omega_2 \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ 3-cociclos. Sea $\mu : G \times G \to \Bbbk^\times$ una función.

Sea $\mu : G \times G \to \Bbbk^\times$ una función. Definimos $F : \mathcal{C}(G, \omega_1) \to \mathcal{C}(G, \omega_2)$ el funtor, $F(V) = V$ para todo $V \in \mathcal{C}(G, \omega_1)$, y las transformaciones naturales

$$\zeta_{X,Y} : X\otimes Y \to X\otimes Y, \quad \zeta_{X,Y}(x\otimes y) = \mu(g, h)\; x\otimes y,$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}(G, \omega_1)$, $x \in X_g, y \in Y_h$.

Lema 3.2.4. *El funtor $(F, \zeta) : \mathcal{C}(G, \omega_1) \to \mathcal{C}(G, \omega_2)$ es monoidal si*

$$\omega_1(g, h, f)\mu(gh, f)\mu(g, h) = \mu(g, hf)\mu(h, f)\omega_2(g, h, f),$$

para todo $g, h, f \in G$. En particular la categoría monoidal $\mathcal{C}(G, \omega)$ no depende del representante de la clase de ω en $H^3(G, \Bbbk^\times)$.

Demostración. Verifiquemos que se satisface

$$\zeta_{X,Y\otimes Z}(\text{id}_{F(X)}\otimes\zeta_{Y,Z})a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z})\zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y}\otimes\text{id}_{F(Z)}).$$

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{C}(G, \omega_1)$, $x \in X_g, y \in Y_h, z \in Z_f$. Entonces

$$\begin{aligned}\zeta_{X,Y\otimes Z}(\text{id}_{F(X)}\otimes\zeta_{Y,Z})a_{F(X),F(Y),F(Z)}(x\otimes y\otimes z) &=\\ &= \mu(g, hf)\mu(h, f)\omega_2(g, h, f)(x\otimes y\otimes z).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}F(a_{X,Y,Z})\zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y}\otimes\text{id}_{F(Z)})(x\otimes y\otimes z) &=\\ \omega_1(g, h, f)\mu(gh, f)\mu(g, h)(x\otimes y\otimes z).\end{aligned}$$

□

El Lema 3.2.4 implica que uno puede elegir la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ donde ω es *normalizado*, es decir que $\omega(g, 1, h) = 1$ para todo $g, h \in G$. Pues si no lo es, elegimos $\mu : G\times G \to \Bbbk^\times$ que satisfaga $\mu(1, f) = \omega(1, 1, f)$, $\mu(g, 1) = \omega(g, 1, 1)^{-1}$, para todo $g, f \in G$.

Ejercicio 3.2.5. Dos categorías de Tambara-Yamagami $\mathcal{T}Y(A,\chi,\tau)$, $\mathcal{T}Y(A',\chi',\tau')$ son monoidalmente equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo de grupos $\phi : A \to A'$ tal que $\chi' \circ (\phi \times \phi) = \chi$ y $\tau = \tau'$.

3.2.3. Los Teoremas de estrictificación y coherencia de MacLane. En esta sección presentaremos dos Teoremas debidos a Maclane. La demostración del primero fue tomada de [**46**].

Teorema 3.2.6. *Toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta.*

Demostración. Sea $(\mathcal{C},\otimes,a,r,l,\mathbf{1})$ una categoría monoidal. Definamos la categoría monoidal $\mathcal{D}$ como sigue. Los objetos de $\mathcal{D}$ son pares (F,ζ) donde

- $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es un funtor;
- $\zeta_{X,Y} : F(X)\otimes Y \to F(X\otimes Y)$ es una familia de isomorfismos naturales tales que

$$\zeta_{X,Y\otimes Z}a_{F(X),Y,Z} = F(a_{X,Y,Z})\zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_Z), \quad r_{F(Z)} = F(r_Z)\zeta_{Z,\mathbf{1}}, \tag{3.2.4}$$

para todo $X,Y,Z\in\mathcal{C}$.

Si $(F,\zeta),(G,\xi)$ son dos objetos en $\mathcal{D}$, un morfismo $\theta:(F,\zeta)\to(G,\xi)$ es una transformación natural $\theta: F\to G$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X)\otimes Y \arrow[r, "\zeta_{X,Y}"] \arrow[d, "\theta_X\otimes \mathrm{id}_Y"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\theta_{X\otimes Y}"'] \\ G(X)\otimes Y \arrow[r, "\xi_{X,Y}"] & G(X\otimes Y) \end{tikzcd} \tag{3.2.5}$$

sea conmutativo. La composición de transformaciones naturales es la vertical.

Si $(F,\zeta),(G,\xi)$ son dos objetos en $\mathcal{D}$ el producto tensorial de ellos es $(F\circ G,\varphi)$ donde φ es la composición:

$$F(G(X))\otimes Y \xrightarrow{\zeta_{G(X),Y}} F(G(X)\otimes Y) \xrightarrow{F(\xi_{X,Y})} F(G(X\otimes Y)).$$

El producto tensorial de dos morfismos, es decir de dos transformaciones naturales es la composición horizontal. El objeto unidad es el funtor identidad. Es inmediato demostrar que $\mathcal{D}$ es una categoría monoidal estricta.

Definamos el funtor $L:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, definido por

$$L(X) = (X\otimes -, a_{X,-,-}), \quad \text{para todo } X\in\mathcal{C}.$$

El par $L(X)$ pertenece a la categoría $\mathcal{D}$. En efecto (3.2.4) se satisface por el axioma del pentágono.

Demostremos que este funtor es una equivalencia de categorías monoidales. Para esto veamos que es denso, pleno y fiel. Como para todo $(F,\zeta)\in\mathcal{D}$ existe un isomorfismo $(F,\zeta)\simeq L(F(\mathbf{1}))$, se tiene que L es denso. En efecto, sea $\theta: L(F(\mathbf{1}))\to F$ el isomorfismo natural definido por $\theta_X = F(l_X)\zeta_{\mathbf{1},X}$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Claramente θ es un isomorfismo natural. Demostremos que θ satisface (3.2.5). Debemos demostrar que

$$\theta_{X\otimes Y} a_{F(\mathbf{1}),X,Y} = \zeta_{X,Y}(\theta_X \otimes \mathrm{id}_Y).$$

Por (3.2.4), el lado izquierdo es igual a

$$F(l_{X\otimes Y})\zeta_{\mathbf{1},X\otimes Y} a_{F(\mathbf{1}),X,Y} = F(l_{X\otimes Y})F(a_{\mathbf{1},X,Y})\zeta_{\mathbf{1}\otimes X,Y}(\zeta_{\mathbf{1},X}\otimes \mathrm{id}_Y).$$

Por la naturalidad de ζ, el lado derecho es igual a

$$\zeta_{X,Y}(F(l_X)\otimes \mathrm{id}_Y)(\zeta_{\mathbf{1},X}\otimes \mathrm{id}_Y) = F(l_X\otimes \mathrm{id}_Y)\zeta_{\mathbf{1}\otimes X,Y}(\zeta_{\mathbf{1},X}\otimes \mathrm{id}_Y).$$

Ambas son iguales por la ecuación (3.1.7).

Veamos que L es pleno. Tomemos $\theta : L(X) \to L(Y)$ un morfismo en $\mathcal{D}$. Definimos $f : X \to Y$ por $f = r_Y \circ \theta_{\mathbf{1}} \circ r_X^{-1}$. Veamos que $\theta_Z = f\otimes \mathrm{id}_Z$. Esto sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Z \arrow[r, "r_X^{-1}\otimes \mathrm{id}_Z"] \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}_Z"'] & (X\otimes \mathbf{1})\otimes Z \arrow[r, "a_{X,\mathbf{1},Z}"] \arrow[d, "\theta_{\mathbf{1}}\otimes \mathrm{id}_Z"] & X\otimes(\mathbf{1}\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes l_Z"] \arrow[d, "\theta_{\mathbf{1}\otimes Z}"] & X\otimes Z \arrow[d, "\theta_Z"] \\
Y\otimes Z \arrow[r, "r_Y^{-1}\otimes \mathrm{id}_Z"'] & (Y\otimes \mathbf{1})\otimes Z \arrow[r, "a_{Y,\mathbf{1},Z}"] & Y\otimes(\mathbf{1}\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_Y\otimes l_Z"] & Y\otimes Z.
\end{tikzcd} \tag{3.2.6}$$

Las filas de este diagrama son las identidades debido al axioma del triangulo. El cuadrado de la izquierda conmuta por la definición de f, el cuadrado central conmuta porque θ es un morfismo en $\mathcal{D}$ y el cuadrado de la derecha conmuta por la naturalidad de θ. Claramente L es un funtor fiel. La estructura monoidal de L es la siguiente. Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se define

$$\xi_{X,Y} : L(X) \circ L(Y) \to L(X\otimes Y), \quad \xi_{X,Y} = a^{-1}_{X,Y,-}.$$

$\square$

El siguiente resultado se conoce como el Teorema de coherencia de MacLane. Su demostración sigue del Teorema 3.2.6.

Teorema 3.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y $X_1, \ldots, X_n$ objetos de $\mathcal{C}$. Sean P_1, P_2 dos objetos que son formados por el producto tensorial de $X_1, \ldots, X_n$, en ese orden, donde los paréntesis y el objeto unidad $\mathbf{1}$ son colocados arbitrariamente. Sean $\alpha, \beta : P_1 \to P_2$ dos isomorfismos que son las composiciones de la asociatividad y los isomorfismos de unidad (y sus inversas). Entonces $\alpha = \beta$.* $\square$

3.3. La categoría monoidal de bimódulos

3.3.1. Álgebras y coálgebras en categorías monoidales. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal.

Definición 3.3.1. Un *álgebra* en $\mathcal{C}$ es una colección (A, m, u) donde A es un objeto de $\mathcal{C}$, $m : A\otimes A \to A$, $u : \mathbf{1} \to A$ son morfismos que satisfacen los axiomas de asociatividad y unidad, es decir

$$m(m\otimes \mathrm{id}_A) = m(\mathrm{id}_A\otimes m)a_{A,A,A},\ m(u\otimes \mathrm{id}_A) = l_A,\ m(\mathrm{id}_A\otimes u) = r_A.$$

Si A es un álgebra en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ denotaremos por $\mathcal{C}_A$, ${}_A\mathcal{C}$, ${}_A\mathcal{C}_A$ a la categoría de A-módulos a derecha, izquierda y bimódulos, respectivamente. Para ser más precisos la categoría $\mathcal{C}_A$ consiste de pares (V, ρ_V) donde $V \in \mathcal{C}$ y $\rho_V : V\otimes A \to V$es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

$$\rho_V(\rho_V\otimes \mathrm{id}_A) = \rho_V(\mathrm{id}_V\otimes m)a_{V,A,A}, \quad \rho_V(\mathrm{id}_A\otimes u) = r_V. \tag{3.3.1}$$

La primera igualdad dice que la acción a derecha es asociativa y la segunda que es unitaria.

Análogamente la categoría ${}_A\mathcal{C}$ consta de pares (W, λ_W) donde W es un objeto de $\mathcal{C}$, $\lambda_W : A\otimes W \to W$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

$$\lambda_W(m\otimes \mathrm{id}_W) = \lambda_W(\mathrm{id}_A\otimes\lambda_W)a_{A,A,W}, \quad \lambda_W(u\otimes \mathrm{id}_V) = l_V. \tag{3.3.2}$$

La categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ consiste de ternas (V, ρ_V, λ_V) donde $(V, \rho_V) \in \mathcal{C}_A$ y $(V, \lambda_V) \in {}_A\mathcal{C}$, es decir se satisfacen las identidades (3.3.1) y (3.3.2) respectivamente y además

$$\lambda_V(\mathrm{id}_A\otimes\rho_V)a_{A,V,A} = \rho_V(\lambda_V\otimes \mathrm{id}_A).$$

Los morfismos en ${}_A\mathcal{C}_A$ son los morfismos de A-bimódulos, es decir aquellos que son de A-módulos a izquierda y a derecha.

Ejemplo 3.3.2. Definamos una familia de álgebras en la categoría $\mathrm{Comod}\,(\Bbbk\mathbb{Z}_2)$, donde $\mathbb{Z}_2 =< u >$ es el grupo cíclico de orden 2 generado por el elemento u. Sea W un espacio vectorial y $\beta : W \times W \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica. El álgebra de Clifford $Cl(W, \beta) = T(W)/ < v\otimes w + w\otimes v = \beta(v, w)1 >$ es un álgebra en la categoría $\mathrm{Comod}\,(\Bbbk\mathbb{Z}_2)$ de la siguiente manera:

$$\lambda : Cl(W, \beta) \to \Bbbk\mathbb{Z}_2\otimes_{\Bbbk} Cl(W, \beta), \quad \lambda(w) = u\otimes w,$$

para todo $w \in W$.

Ejercicio 3.3.3. Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana y $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra entonces las categorías $\mathcal{C}_A$ y ${}_A\mathcal{C}_A$ son Abelianas. ojo con la existencia de coker

Ejercicio 3.3.4. Definir coálgebras en una categoría monoidal y comódulos a derecha e izquierda y bicomódulos.

Ejercicio 3.3.5. Demostrar que $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ es un álgebra.

Ejercicio 3.3.6. Sea H un álgebra de Hopf. Un álgebra en la categoría ${}_H\mathcal{M}$, respectivamente ${}^H\mathcal{M}$, es un H-módulo algebra, respectivamente un H-comódulo álgebra.

Ejercicio 3.3.7. Escribir detalladamente la estructura de un álgebra en las categorías $\mathfrak{C}hain(R)$ y $\mathfrak{C}hain_N(R)$.

Ejercicio 3.3.8. Para todo $X \in \mathcal{C}$ el objeto $X \otimes A$ posee una estructura de A-módulo a derecha. Además, existen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \otimes A, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -).$$

Si $\mathcal{C}$ es finita, cuando $\mathcal{C}_A$ es finita?

Definición 3.3.9. Asumamos que $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal. Un álgebra $A \in \mathcal{C}$ se dice *separable* si el morfismo de multiplicación $m : A \otimes A \to A$ tiene una sección de A-bimódulos.

Proposición 3.3.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal semisimple. Si $A \in \mathcal{C}$ es separable entonces la categoría $\mathcal{C}_A$ es semisimple.*

Demostración. Demostraremos que todo objeto en $\mathcal{C}_A$ es proyectivo. Sea $X \in \mathcal{C}_A$. Como $\mathcal{C}$ es semisimple, entonces X, pensado como objeto en $\mathcal{C}$, es proyectivo. El objeto $X \otimes A$, con acción en el segundo tensorando, es un objeto proyectivo de $\mathcal{C}_A$. En efecto, como existen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(X \otimes A, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -).$$

Como X es proyectivo, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ es exacto. Por lo tanto $X \otimes A \in \mathcal{C}_A$ es proyectivo.

Ahora, como $m : A \otimes A \to A$ tiene una sección de A-bimódulos, existe un $V \in {}_A\mathcal{C}_A$ tal que $A \otimes A \simeq A \oplus V$, como A-bimódulos. Por lo tanto, existen isomorfismos

$$X \otimes A \simeq X \otimes_A (A \otimes A) \simeq X \otimes_A A \oplus X \otimes_A V \simeq X \oplus X \otimes_A V.$$

Entonces X es un sumando directo de un proyectivo y por lo tanto es proyectivo. $\square$

3.3.2. La categoría monoidal ${}_A\mathcal{C}_A$. Asumamos que $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana monoidal tal que el producto monoidal $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor exacto a derecha en cada variable. Sin perder la generalidad asumamos que $\mathcal{C}$ es estricta. Además $(A, m, u) \in \mathcal{C}$ es un álgebra. La categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ posee una estructura monoidal como sigue. El producto tensorial es $\otimes_A$, que se define como el coecualizador de los morfismos

$$\rho_V \otimes \mathrm{id}_W,\ (\mathrm{id}_V \otimes \lambda_W) : (V \otimes A) \otimes W \longrightarrow V \otimes W,$$

es decir el conúcleo de la diferencia. Denotemos a dicho conúcleo por $\pi_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes_A W$. Por definición, el morfismo $\pi_{V,W}$ es un epimorfismo.

Si $f : U \to V, g : U' \to V'$ son dos morfismos de A-bimódulos en $\mathcal{C}$ entonces $f \otimes_A g : U \otimes_A U' \to V \otimes_A V'$ es el morfismo definido como sigue. El morfismo $\pi_{V,V'}(f \otimes g) : U \otimes U' \to V \otimes_A V'$ satisface que

$$\pi_{V,V'}(f \otimes g)(\rho_U \otimes \mathrm{id}_{U'}) = \pi_{V,V'}(f \otimes g)(\mathrm{id}_U \otimes \lambda_{U'}).$$

Por lo tanto existe un morfismo $f \otimes_A g : U \otimes_A U' \to V \otimes_A V'$ tal que

$$(f \otimes_A g)\pi_{U,U'} = \pi_{V,V'}(f \otimes g). \tag{3.3.3}$$

La unidad en ${}_A\mathcal{C}_A$ es el álgebra A con las acciones regulares a derecha e izquierda.

Queremos que el objeto $V \otimes_A W$ este en la categoría ${}_A\mathcal{C}_A$, es decir, debemos definir una acción a derecha e izquierda.

Sea $\phi : V \otimes W \otimes A \to V \otimes_A W$ definido como la composición

$$V \otimes W \otimes A \xrightarrow{id_V \otimes \rho_W} V \otimes W \xrightarrow{\pi_{V,W}} V \otimes_A W.$$

Es inmediato comprobar que $\phi(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_A) = \phi(\mathrm{id}_V \otimes \lambda_W \otimes \mathrm{id}_A)$. Por lo tanto existe un morfismo $\rho_{V \otimes_A W} : V \otimes_A W \otimes A \to V \otimes_A W$ tal que

$$\pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W) = \rho_{V \otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A). \tag{3.3.4}$$

Lema 3.3.11. *El morfismo $\rho_{V \otimes_A W}$ define una acción a derecha sobre el objeto $V \otimes_A W$.*

Demostración. Debemos demostrar que

$$\rho_{V \otimes_A W}(\rho_{V \otimes_A W} \otimes \mathrm{id}_A) = \rho_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_{V \otimes_A W} \otimes m).$$

Esta igualdad equivale a

$$\rho_{V \otimes_A W}(\rho_{V \otimes_A W} \otimes \mathrm{id}_A)(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes A}) = \rho_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_{V \otimes_A W} \otimes m)(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes A}),$$

ya que el morfismo $(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes A})$ es suryectivo, por ser el producto tensorial $\otimes$ exacto a derecha. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho_{V \otimes_A W}(\rho_{V \otimes_A W} \otimes \mathrm{id}_A)(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes A}) &= \rho_{V \otimes_A W}(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W \otimes \mathrm{id}_A)) \\
&= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W)(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W \otimes \mathrm{id}_A)) \\
&= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W)(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W \otimes m) \\
&= \rho_{V \otimes_A W}(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W \otimes m) \\
&= \rho_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_A \otimes m)(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes A}).
\end{aligned}$$

La primera y segunda igualdad por (3.3.4), la tercera por la asociatividad de ρ_W y la cuarta nuevamente por (3.3.4). □

Similarmente, definamos una acción a izquierda sobre $V \otimes_A W$. Sea $\psi : A \otimes V \otimes W \to V \otimes_A W$ el morfismo definido por $\psi = \pi_{V,W}(\lambda_V \otimes \mathrm{id}_W)$. Este morfismo induce un morfismo $\lambda_{V \otimes_A W} : A \otimes (V \otimes_A W) \to V \otimes_A W$ que satisface que

$$\lambda_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_A \otimes \pi_{V,W}) = \pi_{V,W}(\lambda_V \otimes \mathrm{id}_W). \tag{3.3.5}$$

De forma completamente similar se demuestra que $\lambda_{V \otimes_A W}$ le da estructura de A-módulo a izquierda a $V \otimes_A W$.

Lema 3.3.12. *$(V \otimes_A W, \lambda_{V \otimes_A W}, \rho_{V \otimes_A W})$ es un A-bimódulo.*

Demostración. Debemos demostrar que se satisface

$$\rho_{V \otimes_A W}(\lambda_{V \otimes_A W} \otimes \mathrm{id}_A) = \lambda_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_A \otimes \rho_{V \otimes_A W}).$$

Esta igualdad es equivalente a

$$\rho_{V \otimes_A W}(\lambda_{V \otimes_A W} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A \otimes \pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A) = \lambda_{V \otimes_A W}(\mathrm{id}_A \otimes \rho_{V \otimes_A W})(\mathrm{id}_A \otimes \pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A),$$

ya que el morfismo $(\mathrm{id}_A \otimes \pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A)$ es suryectivo, por ser $\otimes$ exacto a derecha. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_{V\otimes_A W}(\lambda_{V\otimes_A W}\otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A\otimes\pi_{V,W}\otimes\mathrm{id}_A) &= \rho_{V\otimes_A W}(\pi_{V,W}\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_V\otimes\mathrm{id}_W\otimes\mathrm{id}_A)\\ &= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V\otimes\rho_W)(\lambda_V\otimes\mathrm{id}_W\otimes\mathrm{id}_A).\end{aligned}$$

La primera igualdad por la ecuación (3.3.5) y la segunda por (3.3.4). Por otro lado

$$\begin{aligned}\lambda_{V\otimes_A W}(\mathrm{id}_A\otimes\rho_{V\otimes_A W})(\mathrm{id}_A\otimes\pi_{V,W}\otimes\mathrm{id}_A) &= \lambda_{V\otimes_A W}(\mathrm{id}_A\otimes\pi_{V,W})(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_V\otimes\rho_W)\\ &= \pi_{V,W}(\lambda_V\otimes\mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_V\otimes\rho_W).\end{aligned}$$

La primera igualdad por (3.3.4) y la segunda por (3.3.5). $\square$

Ahora queremos definir la asociatividad para la categoría ${}_A\mathcal{C}_A$, es decir queremos definir isomorfismos

$$a_{U,V,W} : (U\otimes_A V)\otimes_A W \to U\otimes_A(V\otimes_A W),$$

para todo $U, V, W \in {}_A\mathcal{C}_A$. Definimos

$$\alpha_{U,V,W} : U\otimes V\otimes W \to U\otimes_A(V\otimes_A W), \quad \alpha_{U,V,W} = \pi_{U,V\otimes_A W}(\mathrm{id}_U\otimes\pi_{V,W}).$$

Afirmamos que existe un morfismo $\beta : (U\otimes_A V)\otimes W \to U\otimes_A(V\otimes_A W)$ tal que hace que el diagrama

(3.3.6)
$$\begin{tikzcd} U\otimes V\otimes W \arrow[rr, "\pi_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W"] \arrow[dr, "\alpha_{U,V,W}"'] & & (U\otimes_A V)\otimes W \arrow[dl, "\beta_{U,V,W}"] \\ & U\otimes_A(V\otimes_A W) & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. En efecto basta con comprobar que

$$\alpha_{U,V,W}(\rho_U\otimes\mathrm{id}_V\otimes\mathrm{id}_W) = \alpha_{U,V,W}(\mathrm{id}_U\otimes\lambda_V\otimes\mathrm{id}_W).$$

Existe un morfismo $a_{U,V,W} : (U\otimes_A V)\otimes_A W \to U\otimes_A(V\otimes_A W)$ que hace que el diagrama

(3.3.7)
$$\begin{tikzcd} (U\otimes_A V)\otimes W \arrow[rr, "\pi_{U\otimes_A V,W}"] \arrow[dr, "\beta_{U,V,W}"'] & & (U\otimes_A V)\otimes_A W \arrow[dl, "a_{U,V,W}"] \\ & U\otimes_A(V\otimes_A W) & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. En efecto, debemos demostrar que se tiene

$$\beta_{U,V,W}(\rho_{U\otimes_A V}\otimes\mathrm{id}_W) = \beta_{U,V,W}(\mathrm{id}_{U\otimes_A V}\otimes\lambda_W).$$

Para demostrar esta última igualdad basta con demostrar que

$$\beta_{U,V,W}(\rho_{U\otimes_A V}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{U,V}\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_W) = \beta_{U,V,W}(\mathrm{id}_{U\otimes_A V}\otimes\lambda_W)(\pi_{U,V}\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_W). \tag{3.3.8}$$

Por un lado tenemos que $\beta_{U,V,W}(\rho_{U\otimes_A V}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{U,V}\otimes\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_W)$ es igual a

$$\begin{aligned}
&= \beta_{U,V,W}(\pi_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_U\otimes\rho_V\otimes\mathrm{id}_W)\\
&= \alpha_{U,V,W}(\mathrm{id}_U\otimes\rho_V\otimes\mathrm{id}_W)\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}(\mathrm{id}_U\otimes\pi_{V,W})(\mathrm{id}_U\otimes\rho_V\otimes\mathrm{id}_W)\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}(\mathrm{id}_U\otimes\pi_{V,W})(\mathrm{id}_U\otimes\mathrm{id}_V\otimes\lambda_W).
\end{aligned}$$

La primera igualdad por (3.3.4), la segunda igualdad por el diagrama (3.3.6), la tercera por la definición de $\alpha_{U,V,W}$ y la última por la definición de $\pi_{V,W}$. El lado izquierdo de la ecuación (3.3.8) es

$$\beta_{U,V,W}(\pi_{U,V}\otimes\lambda_W) = \alpha_{U,V,W}(\mathrm{id}_U\otimes\mathrm{id}_V\otimes\lambda_W).$$

Teorema 3.3.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal Abeliana estricta tal que el producto tensorial $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es exacto a derecha en cada variable. Si $A\in\mathcal{C}$ es un álgebra, entonces la categoría de A-bimódulos ${}_A\mathcal{C}_A$ con producto monoidal $\otimes_A$, unidad A y asociatividad $\{a_{U,V,W}\}$ es una categoría monoidal.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos únicamente que se satisface el axioma del pentágono. La demostración de los otros axiomas quedan como ejercicio para el lector. Sean $X,Y,Z,W\in {}_A\mathcal{C}_A$, debemos demostrar que

$$a_{X,Y,Z\otimes_A W}\ a_{X\otimes_A Y,Z,W} = (\mathrm{id}_X\otimes_A a_{Y,Z,W})\ a_{X,Y\otimes_A Z,W}\ (a_{X,Y,Z}\otimes_A \mathrm{id}_W).$$

Alcanza con mostrar que ambas expresiones compuestas con

$$\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})$$

son iguales, ya que este morfismo es un epimorfismo. Se tiene que

$$a_{X,Y,Z\otimes_A W}\ a_{X\otimes_A Y,Z,W}\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&= a_{X,Y,Z\otimes_A W}\ \beta_{X\otimes_A Y,Z,W}(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= a_{X,Y,Z\otimes_A W}\alpha_{X\otimes_A Y,Z,W}(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= a_{X,Y,Z\otimes_A W}\pi_{X\otimes_A Y,Y\otimes_A W}(\mathrm{id}_{X\otimes_A Y}\otimes\pi_{Z,W})(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= \beta_{X,Y,Z\otimes_A W}(\mathrm{id}_{X\otimes_A Y}\otimes\pi_{Z,W})(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= \beta_{X,Y,Z\otimes_A W}(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes_A W})(\mathrm{id}_{X\otimes Y}\otimes\pi_{Z,W})\\
&= \alpha_{X,Y,Z\otimes_A W}(\mathrm{id}_{X\otimes Y}\otimes\pi_{Z,W})\\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}(\mathrm{id}_X\otimes\pi_{Y,Z\otimes_A W})(\mathrm{id}_{X\otimes Y}\otimes\pi_{Z,W})
\end{aligned}$$

La primera igualdad por (3.3.7), la segunda por (3.3.6), la tercera por la definición de α, la cuarta nuevamente por (3.3.7), la sexta por (3.3.6). Por otro lado tenemos que

$$(\mathrm{id}_X\otimes_A a_{Y,Z,W})\ a_{X,Y\otimes_A Z,W}\ (a_{X,Y,Z}\otimes_A \mathrm{id}_W)\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes\mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{Z\otimes W})$$

es igual a

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) a_{X,Y\otimes_A Z,W} \pi_{X\otimes_A(Y\otimes_A Z),W}(a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&\qquad\qquad (\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \beta_{X,Y\otimes_A Z,W}(a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\pi_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \beta_{X,Y\otimes_A Z,W}(\beta_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)(\pi_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_{Z\otimes W})\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \beta_{X,Y\otimes_A Z,W}(\alpha_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \beta_{X,Y\otimes_A Z,W}(\pi_{X,Y\otimes_A Z}\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \alpha_{X,Y\otimes_A Z,W}(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (\mathrm{id}_X \otimes_A a_{Y,Z,W}) \pi_{X,Y\otimes_A Z\otimes_A W}(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y\otimes_A Z,W})(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}(\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W})(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y\otimes_A Z,W})(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}(\mathrm{id}_X \otimes \beta_{Y,Z,W})(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}(\mathrm{id}_X\otimes \pi_{Y,Z\otimes_A W})(\mathrm{id}_{X\otimes Y}\otimes \pi_{Z,W})
\end{aligned}
$$

La primera igualdad por (3.3.3), la segunda y la tercera por (3.3.7), la cuarta por (3.3.6), la quinta por la definición de $\alpha_{X,Y,Z}$, la sexta nuevamente por (3.3.6), la séptima por la definición de α, la octava por (3.3.3), la novena por (3.3.7) y la útlima nuevamente por (3.3.6). ☐

Ejemplo 3.3.14. Sea G un grupo finito, $\omega \in Z^3(G,\Bbbk^\times)$ y $F \subseteq G$ un subgrupo. Sea $\psi : F\times F \to \Bbbk^\times$ una función tal que $\psi(g,1) = 1 = \psi(1,g)$ para todo $g\in F$ y tal que $d\psi = \omega|_{F\times F\times F}$. El álgebra torcida del grupo F, que se denotará por $\Bbbk_\psi F$ es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $\Bbbk F$ y producto

$$g\cdot f = \psi(g,f)\, gf, \qquad \text{para todo } g,f\in F.$$

El espacio $\Bbbk_\psi F$ es un álgebra en $\mathcal{C}(G,\omega)$. Denotaremos la categoría monoidal $\mathcal{C}(G,\omega,F,\psi) = {}_{\Bbbk_\psi F}\mathcal{C}(G,\omega)_{\Bbbk_\psi F}$.

3.4. Categorías monoidales rígidas

Sea $(\mathcal{C},\otimes,a,r,l,\mathbf{1})$ una categoría monoidal.

Definición 3.4.1. Sea X un objeto de $\mathcal{C}$. Un dual a derecha de X es un objeto X^* munido de morfismos

$$ev_X : X^*\otimes X\to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1}\to X\otimes X^*,$$

tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{l_X^{-1}} \mathbf{1}\otimes X \xrightarrow{coev_X\otimes \mathrm{id}} (X\otimes X^*)\otimes X \xrightarrow{a} X\otimes(X^*\otimes X) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes ev_X} X\otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_X} X,$$

$$X^* \xrightarrow{r_{X^*}^{-1}} X^*\otimes\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes coev_X} X^*\otimes(X\otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}} (X^*\otimes X)\otimes X^* \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{ev_X\otimes \mathrm{id}} \mathbf{1}\otimes X^* \xrightarrow{l_{X^*}} X^*$$

son las identidades. Análogamente un dual a izquierda de X es un objeto ${}^*X$ munido de morfismos

$$ev_X : X\otimes{}^*X \to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \to {}^*X\otimes X,$$

tal que las composiciones

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X\otimes\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes coev_X} X\otimes({}^*X\otimes X) \xrightarrow{a^{-1}} (X\otimes{}^*X)\otimes X \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{ev_X\otimes \mathrm{id}} \mathbf{1}\otimes X \xrightarrow{l_X} X,$$

$${}^*X \xrightarrow{l_{{}^*X}^{-1}} \mathbf{1}\otimes{}^*X \xrightarrow{coev_X\otimes\mathrm{id}} ({}^*X\otimes X)\otimes{}^*X \xrightarrow{a} {}^*X\otimes(X\otimes{}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes ev_X} {}^*X\otimes\mathbf{1} \xrightarrow{r_{{}^*X}} {}^*X$$

son las identidades.

Lema 3.4.2. *Los duales a izquierda y a derecha son únicos salvo isomorfismos.*

Demostración. Escribiremos la demostración para duales a derecha. La demostración para duales a izquierda es completamente análoga. Sean X^*, X' dos duales a derecha de un objeto X. Sea $\phi : X^* \to X'$ el morfismo definido por

$$\phi = l_{X'}(ev_X\otimes\mathrm{id})a_{X^*,X,X'}^{-1}(\mathrm{id}\otimes coev_X)r_{X^*}^{-1}.$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar que ϕ es un isomorfismo. □

Definición 3.4.3. Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto posee duales a derecha y a izquierda.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal rígida, la dualidad se extiende a un funtor contravariante. Es decir, si X, Y son objetos y $f : X \to Y$ es un morfismo entonces $f^* : Y^* \to X^*$ se define por la composición

$$Y^* \xrightarrow{r_{Y^*}^{-1}} Y^*\otimes\mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes coev_X} Y^*\otimes(X\otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}} (Y^*\otimes X)\otimes X^* \to$$
$$\xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}} (Y^*\otimes Y)\otimes X^* \xrightarrow{ev_Y\otimes\mathrm{id}} \mathbf{1}\otimes X^* \xrightarrow{l_{X^*}} X^*$$

Proposición 3.4.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. $\mathbf{1}^* \simeq \mathbf{1} \simeq {}^*\mathbf{1}$.
2. *Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z\otimes Y^*), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*\otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X\otimes Z);$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes{}^*Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z\otimes Y), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, {}^*X\otimes Z).$$

Demostración. El punto (1) queda como ejercicio. Veamos que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*).$$

Definamos los morfismos

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*),$$
$$\phi(f) = (f \otimes \mathrm{id}_{Y^*})(\mathrm{id}_X \otimes coev_Y) r_X^{-1},$$
$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z),$$
$$\psi(g) = r_Z(\mathrm{id}_Z \otimes ev_Y)(g \otimes \mathrm{id}_Y).$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(\psi(g)) &= (r_Z \otimes \mathrm{id}_{Y^*})(\mathrm{id}_Z \otimes ev_Y \otimes \mathrm{id}_{Y^*}))(g \otimes \mathrm{id}_{Y \otimes Y^*})(\mathrm{id}_X \otimes coev_Y) r_X^{-1} \\ &= g.\end{aligned}$$

Aquí estamos usando los axiomas del dual de Y. Análogamente se demuestra que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. □

Observación 3.4.5. De la Proposición (2) se deduce que si una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es rígida entonces para cualquier objeto $X \in \mathcal{C}$ los funtores

$$L_X, R_X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad L_X(Y) = X \otimes Y, \quad R_X(Y) = Y \otimes X,$$

poseen adjuntos a derecha e izquierda. En particular, ambos funtores son exactos.

Ejercicio 3.4.6. Sea $\mathcal{C}$ categoría monoidal rígida y $0 \neq X \in \mathcal{C}$ un objeto, entonces el morfismo $coev_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X$ es un monomorfismo.

Ejemplo 3.4.7. La categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ de espacios vectoriales de dimensión finita es rígida y $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ no es rígida . Para esto demostaremos:

Afirmación 3.4.1. *Un objeto $V \in \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ posee un dual a derecha (o a izquierda) si y sólo si es de dimensión finita.*

Demostración. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ y los morfismos de evaluación y coevaluación son:

$$ev(f \otimes v) = f(v), \quad coev(1) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v^i,$$

para todo $f \in V^*, v \in V$. Aquí $(v_i)_{i=1}^n$ es base de V y $(v^i)_{i=1}^n$ es su base dual en V^*. Queda como ejercicio para el lector verificar que V^* es un dual en la categoría. Asumamos que V es un $\Bbbk$-espacio vectorial arbitrario con dual $\widetilde{V}$. Si $coev_V : \Bbbk \to V \otimes_{\Bbbk} \widetilde{V}$ es la coevaluación, escribimos

$$coev_V(1) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i.$$

Sea W el subespacio vectorial de V generado por $\{v_1, \dots, v_n\}$. Como $\widetilde{V}$ es dual, la composición

$$V \xrightarrow{\simeq} \Bbbk \otimes_{\Bbbk} V \xrightarrow{coev_V \otimes \mathrm{id}_V} (V \otimes_{\Bbbk} \widetilde{V}) \otimes_{\Bbbk} V \xrightarrow{a} V \otimes_{\Bbbk} (\widetilde{V} \otimes_{\Bbbk} V) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes ev_V} V \otimes_{\Bbbk} \Bbbk \xrightarrow{\simeq} V,$$

es la identidad. La imagen de dicha composición cae dentro de W y por lo tanto V es de dimensión finita.

□

Ejemplo 3.4.8. Si A es una $\Bbbk$-álgebra semisimple, la categoría ${}_A\mathfrak{m}_A$ de A-bimódulos de dimensión finita es rígida. Para esto demostraremos que

Afirmación 3.4.2. *Si R es un anillo, $M \in {}_R\mathcal{M}_R$, entonces M posee dual a derecha (respectivamente a izquierda) si y sólo si M es proyectivo, finitamente generado como R-módulo a derecha (respectivamente a izquierda).*

Demostración. Sea $M \in {}_R\mathcal{M}_R$ tal que como R-módulo a derecha es proyectivo y finitamente generado. Entonces existe un epimorfismo $\pi : \oplus_{i=1}^n R \to M$. Como M es proyectivo, existe un morfismo $\iota : M \to \oplus_{i=1}^n R$ tal que $\pi\iota = \mathrm{id}_M$. Sea $f_j : M \to R$, $f_j = p_j\iota$, donde $p_j : \oplus_{i=1}^n R \to R$ es la proyección canónica en la j-ésima coordenada. Sean $x_i = \pi(0, \dots, 1, \dots, 0)$, donde el 1 está en la coordenada i-ésima. Definamos $M^* = \mathrm{Hom}_R(M., R)$ con acciones

$$(f \cdot r)(m) = f(r \cdot m), \quad (r \cdot f)(m) = r \cdot f(m),$$

para todo $f \in M^*, m \in M, r \in R$. Sean los morfismos

$$ev_M : M^* \otimes_R M \to R, \qquad coev_M : R \to M \otimes_R M^*$$

determinados por

$$ev_M(f \otimes m) = f(m), \quad coev_M(r) = \sum_{i=1}^n r \cdot x_i \otimes f_i,$$

para todo $f \in M^*, m \in M$. Se puede demostrar que así M^* es un dual a derecha. De forma completamente análoga se demuestra que M posee un dual a izquierda.

□

Ejemplo 3.4.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sabemos que la categoría de endofuntores $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ es monoidal. Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita, la categoría de endofuntores exactos ($\Bbbk$-lineales) es rígida. Este resultado sigue de que todo funtor exacto posee adjuntos a izquierda y a derecha y de la siguiente

Afirmación 3.4.3. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor con adjunto a izquierda (respectivamente a derecha) $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, entonces G es un dual a derecha (respectivamente a izquierda) de F.*

Demostración. Por el Teorema 2.6.24 existen transformaciones naturales $e : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, c : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ tales que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{id}_{G(Y)} = G(e_Y) \circ c_{G(y)}, \quad e_{F(X)} \circ F(c_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Declarando a e como el morfismo de evaluación y a c como el de coevaluación se obtiene que G es un dual a derecha de F. □

Ejemplo 3.4.10. Si H es un álgebra de Hopf entonces la categoría $\mathrm{Rep}\,(H)$ de H-módulos a izquierda de dimensión finita es rígida.

Ejemplo 3.4.11. Sea G un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, es decir que $\omega(g, 1, h) = 1$ para todo $h, g \in G$. La categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es rígida.

Si $V \in \mathcal{C}(G, \omega)$ entonces $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ es el espacio vectorial dual con G-graduación $(V^*)_g = (V_{g^{-1}})^*$. La evaluación y coevaluación están determinadas como sigue. Si $h, g \in G$, $f \in (V_h)^*, v \in V_g$ entonces

$$ev_V(f \otimes v) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq g^{-1} \\ \omega(g, g^{-1}, g)^{-1} & \text{si } h = g^{-1} \end{cases}$$

$$coev_V(1) = \sum_{g \in G} \sum_i v_i^g \otimes f_i^g,$$

donde $(f_i^g), (v_i^g)$ son bases duales de V_g.

Ejemplo 3.4.12. Sea A un grupo abeliano finito, $\chi : A \times A \to \Bbbk$ un bicaracter simétrico no degenerado y τ una raíz cuadrada de $\frac{1}{|A|}$. La categoría $\mathcal{TY}(A, \chi, \tau)$ es rígida. El dual a derecha de un objeto $a \in A$ es $a^* = a^{-1}$. Los morfismos de evaluación y coevaluación son las identidades

$$\mathrm{id}_1 : 1 \to a \otimes a^*, \quad \mathrm{id}_1 : a^* \otimes a \to 1.$$

El dual a derecha de m es $m^* = m$. Los morfismos de evaluación y coevaluación son

$$\iota : 1 \to m \otimes m^*, \quad ev_m : m^* \otimes m \to 1,$$

donde ι es la inclusión canónica y $ev_m = \tau^{-1} p$, donde $p : m^* \otimes m \to 1$ es la proyección canónica. Queda como ejercicio además encontrar los duales a izquierda.

Lema 3.4.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. La dualidad $(\ )^* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor contravariante. Además para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se tiene que $(X \otimes Y)^* \simeq Y^* \otimes X^*$.*

Ejercicio 3.4.14. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías monoidales y $(F, \xi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor monoidal. Si $X \in \mathcal{C}$ posee dual a derecha X^* entonces $F(X^*)$ es dual a derecha de $F(X)$.

Ejercicio 3.4.15. Demostrar que las categorías de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf débil o de un álgebra cuasi-Hopf son rígidas.

Ejercicio 3.4.16. Demostrar que en una categoría monoidal rígida, todo objeto proyectivo es inyectivo, y viceversa.

3.5. Categorías tensoriales finitas

Definición 3.5.1.
- Una *categoría multitensorial finita sobre* $\Bbbk$ es una categoría Abeliana, $\Bbbk$-lineal finita, monoidal rígida tal que todos los funtores y transformaciones naturales involucrados son aditivos $\Bbbk$-lineales.
- Una *categoría tensorial finita sobre* $\Bbbk$ es una categoría multitensorial finita sobre $\Bbbk$ tal que el objeto unidad es simple.
- Una *categoría multifusión* es una categoría multitensorial finita semisimple. Cuando el objeto unidad es simple se dice que es una *categoría de fusión.*

Definición 3.5.2. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías (multi)tensoriales finitas, un *funtor tensorial* es un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aditivo $\Bbbk$-lineal.

Ejercicio 3.5.3. Si G un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, $F \subseteq G$ es un subgrupo, $\psi : F \times F \to \Bbbk^\times$ una función tal que $\psi(g, 1) = 1 = \psi(1, g)$ para todo $g \in F$ y tal que $d\psi\omega|_{F\times F\times F} = 1$. Demostrar que la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \psi)$ es una categoría de fusión.

Ejercicio 3.5.4. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial. Demostrar que F posee un adjunto a izquierda si y sólo si posee un adjunto a derecha.

Ejercicio 3.5.5. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial exacto. Demostrar que F es fiel.

Veamos algunas propiedades de las categorías tensoriales finitas que necesitaremos en la siguiente sección.

Proposición 3.5.6. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría multitensorial. Entonces,*
1. *El funtor* $(\ )^* : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ *es un funtor monoidal exacto.*
2. *El producto tensorial* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *resulta exacto en ambos argumentos*
3. *Si* $\mathcal{C}$ *es multitensorial entonces con el producto*
$$[V][W] = [V\otimes W],$$
para todo objeto $V, W \in \mathcal{C}$*, el grupo de Grothendieck* $G_0(\mathcal{C})$ *es un anillo con unidad.*

Demostración. El punto (1) queda como ejercicio. De la Proposición 3.4.4 (2) se deduce que para todo $X \in \mathcal{C}$ los funtores $X\otimes -, -\otimes X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ poseen adjuntos a derecha e izquierda. Luego por el Teorema 2.7.43 ambos funtores son exactos.

(3) Demostraremos que el producto en $G_0(\mathcal{C})$ definido por $\langle V\rangle\langle W\rangle = \langle V\otimes W\rangle$, para todo objeto $V, W \in \mathcal{C}$ está bien definido. Sea
$$0 \to U \to V \to W \to 0$$
una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. Como el funtor $X\otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es exacto, la sucesión
$$0 \to X\otimes U \to X\otimes V \to X\otimes W \to 0$$

es exacta. Por lo tanto el producto está bien definido. □

Proposición 3.5.7. [**36**, Prop. 2.1, 2.3] *Sean $\mathcal{C}$ un categoría tensorial finita y $X \in \mathcal{C}$ un objeto cualquiera. Si $P \in \mathcal{C}$ un objeto proyectivo entonces P^* y $P \otimes X$ son ambos proyectivos.*

Demostración. Como P es proyectivo el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ es exacto. Además el funtor $-\otimes X^*$ es exacto, y como composición de funtores exactos es exacto, resulta que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -\otimes X^*) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P \otimes X, -)$$

es exacto y así $P \otimes X$ es proyectivo. Como se tienen isomorfismos

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P^*, -) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, P \otimes -),$$

tenemos que demostrar que este último funtor es exacto. Si

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

es una sucesión exacta entonces

$$0 \to P \otimes U \to P \otimes V \to P \otimes W \to 0$$

es una sucesión exacta que se escinde, ya que, por lo anterior $P \otimes W$ es proyectivo. Por lo tanto al aplicarle el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, -)$ vuelve a ser exacta, pues el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, -)$ es aditivo. □

Ejercicio 3.5.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita. Entonces $\mathcal{C}$ es semisimple si y sólo si el objeto unidad $\mathbf{1}$ es proyectivo.

Corolario 3.5.9. *Sean $\mathcal{C}$ un categoría tensorial finita.*

1. *$K_0(\mathcal{C})$ es un $Gr_0(\mathcal{C})$-bimódulo.*
2. *Si $P \in \mathcal{C}$ es un objeto proyectivo indescomponible entonces* $\operatorname{Soc}(P)$ *es simple. Es decir, P contiene un solo objeto simple.*

Demostración. La parte (1) es inmediata. La demostración de (2) se deduce que el sócalo de un objeto inyectivo indescomponible es simple [**8**, Prop. 4.1 (d)]. □

3.5.1. Funtores de fibra. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. Un *funtor de fibra* para $\mathcal{C}$ es un funtor monoidal exacto y fiel $(F, \zeta) : \mathcal{C} \to vect_{\Bbbk}$ tal que $F(\mathbf{1}) = \Bbbk$.

Ejercicio 3.5.10. Sea H es un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $J \in H \otimes H$ un twist para H. El funtor de olvido $(Forget, \xi^J) : \operatorname{Rep}(H) \to vect_{\Bbbk}$, ver Lema 3.2.2, es un funtor de fibra.

Proposición 3.5.11. *Si $(F, \zeta) : \mathcal{C} \to vect_{\Bbbk}$ es un funtor de fibra para $\mathcal{C}$ entonces el álgebra $H = \operatorname{End}(F)$ posee una estructura natural de álgebra de Hopf.*

Demostración. Solo daremos una idea de la demostración. El coproducto $\Delta : H \to H\otimes_{\Bbbk}H$ está determinado por

$$\Delta(\eta) = \alpha^{-1}_{F,F}(\widetilde{\eta}),$$

para todo $\eta \in H$. Aquí $\alpha_{F,F} : \mathrm{End}\,(F)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{End}\,(F) \to \mathrm{End}\,(F\otimes F)$ es el isomorfismo presentado en la Proposición 2.8.38 y $\widetilde{\eta} : F\otimes F \to F\otimes F$ es la transformación natural definida por

$$\widetilde{\eta}_{X,Y} = \zeta^{-1}_{X,Y}\eta_{X\otimes Y}\zeta_{X,Y}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. La counidad $\epsilon : H \to \Bbbk$ y la antípoda están definidas por

$$\epsilon(\eta) = \eta_{\mathbf{1}}, \quad S(\eta)_X = \eta_{X^*},$$

para todo $\eta \in H$, $X \in \mathcal{C}$. □

La demostración del siguiente resultado de reconstrucción puede encontrarse en [**28**].

Teorema 3.5.12. *Las aplicaciones*

$$(\mathcal{C}, F) \mapsto H = \mathrm{End}\,(F), \qquad H \mapsto (\mathrm{Rep}\,(H), Forget)$$

son biyecciones, una la inversa de la otra, entre:

- *categorías tensoriales sobre* $\Bbbk$ *munidas de un funtor de fibra (salvo equivalencia monoidal de categorías e isomorfismos de funtores monoidales);*
- *y álgebras de Hopf de dimensión finita sobre* $\Bbbk$ *(salvo isomorfismo de álgebras de Hopf).*

□

3.6. Deformaciones de una categoría tensorial

La siguiente definición de cociclo es bien conocida. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$.

Definición 3.6.1. Un *cociclo* para $\mathcal{C}$ es una familia de isomorfismos $J_{X,Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y)$ tal que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$a_{XYZ}\, J_{X\otimes Y,Z}\,(J_{X,Y}\otimes \mathrm{id}\,_Z) = J_{X,Y\otimes Z}\,(\mathrm{id}\,_X\otimes J_{Y,Z})\, a_{XYZ}, \tag{3.6.1}$$

$$J_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{id}\,_{X\otimes\mathbf{1}}, \quad J_{\mathbf{1},X} = \mathrm{id}\,_{\mathbf{1}\otimes X}. \tag{3.6.2}$$

Si J es un cociclo para $\mathcal{C}$ existe una nueva categoría tensorial, $\mathcal{C}^J$ definida de la siguiente manera. Las categoría Abeliana subyacente es la misma que la de $\mathcal{C}$. El producto tensorial de $\mathcal{C}^J$ coincide con el producto tensorial de $\mathcal{C}$ en objetos. Si $f : X \to Y, g : Z \to W$ es un par de morfismos, entonces el nuevo producto tensorial es

$$f\widetilde{\otimes}g = J_{Y,W}(f\otimes g)J^{-1}_{X,Z}.$$

Evidentemente si J conmuta con los morfismos de $\mathcal{C}$, es decir J es natural, entonces la categoría $\mathcal{C}^J$ es equivalente a $\mathcal{C}$.

3.7. La equivariantización de una categoría tensorial

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y G un grupo finito. Una *acción* de G en $\mathcal{C}$ es un funtor monoidal $F : \underline{G} \to \operatorname{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$. Aquí $\operatorname{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ denota la categoría monoidal de autoequivalencias tensoriales de $\mathcal{C}$.

En otras palabras, una acción de G en $\mathcal{C}$ es una colección de autoequivalencias tensoriales $(F_g, \zeta_g, \phi_g) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $g \in G$ e isomorfismos naturales monoidales $\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}$ tales que verifican las ecuaciones (2.10.1), (2.10.2).

Si $(X, s), (Y, r)$ son objetos equivariantes en $\mathcal{C}^G$, definimos

$$(X, s)\otimes(Y, r) = (X\otimes Y, t), \tag{3.7.1}$$

donde $t_g = (s_g\otimes r_g)(\zeta_g)^{-1}_{X,Y}$, para todo $g \in G$. El objeto unidad es $(1, \epsilon)$, donde $\epsilon_g : F_g(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$, $\epsilon_g = \phi_g^{-1}$, para todo $g \in G$.

Teorema 3.7.1. *La equivariantización $\mathcal{C}^G$ con el producto tensorial descripto en* (3.7.1) *es una categoría tensorial finita.*

Demostración. Si $(X, s), (Y, r), (Z, u)$ son tres objetos en $\mathcal{C}^G$, los isomorfismos de asociatividad son

$$a_{(X,s),(Y,r),(Z,u)} : ((X, s)\otimes(Y, r))\otimes(Z, u) \to (X, s)\otimes((Y, r)\otimes(Z, u)),$$

$$a_{(X,s),(Y,r),(Z,u)} = a_{X,Y,Z}.$$

Comprobemos que dichos isomorfismos están en la categoría $\mathcal{C}^G$. Para ello debemos demostrar que para todo $g \in G$ se tiene

$$\begin{aligned} &a_{X,Y,Z}\big((s_g\otimes r_g)(\zeta_g)^{-1}_{X,Y}\otimes u_g\big)(\zeta_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} = \\ &\qquad = (s_g\otimes(r_g\otimes u_g)(\zeta_g)^{-1}_{Y,Z})(\zeta_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z}F_g(a_{X,Y,Z}). \end{aligned}$$

Por un lado $a_{X,Y,Z}\big((s_g\otimes r_g)(\zeta_g)^{-1}_{X,Y}\otimes u_g\big)(\zeta_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z}$ es igual a

$$\begin{aligned} &= a_{X,Y,Z}\big((s_g\otimes r_g)\otimes u_g\big)(\zeta_g)^{-1}_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_Z)(\zeta_g)^{-1}_{X\otimes Y,Z} \\ &= (s_g\otimes(r_g\otimes u_g))a_{F_g(X),F_g(Y),F_g(Z)}\big((\zeta_g)_{X\otimes Y,Z}((\zeta_g)_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_{F_g(Z)})\big)^{-1} \\ &= (s_g\otimes(r_g\otimes u_g)(\zeta_g)^{-1}_{Y,Z})(\zeta_g)^{-1}_{X,Y\otimes Z}F_g(a_{X,Y,Z}). \end{aligned}$$

La segunda igualdad por la naturalidad de a, la tercera igualdad porque (F_g, ζ_g) es un funtor monoidal. La rigidez de $\mathcal{C}^G$ queda como ejercicio. □

A partir de una acción de un grupo finito G en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ existe otra categoría tensorial asociada, denotada por $\mathcal{C}[G]$, que está íntimamente relacionada con la equivariantización. Para más detalles referimos a [**67**].

Asumiremos que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial estricta. La categoría $\mathcal{C}[G]$ es igual, como categorías Abelianas, a $\oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$, donde $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}$ para todo $g \in G$. Un objeto de $\mathcal{C}[G]$ es denotado por $\oplus_{g\in G}[V, g]$, donde $V \in \mathcal{C}_g$ para todo $g \in G$. Los morfismos entre objetos son aquellos que preservan la graduación. El producto tensorial está definido por

$$[V, g]\otimes[W, h] = [V\otimes F_g(W), gh], \qquad V, W \in \mathcal{C}, g, h \in G.$$

El objeto unidad es $[\mathbf{1}, 1]$. Los isomorfismos de asociatividad están determinados por

$$a_{[V,g],[W,h],[U,f]} : [(V\otimes F_g(W))\otimes F_{gh}(U), ghf] \to [V\otimes F_g(W\otimes F_h(U)), ghf],$$
$$a_{[V,g],[W,h],[U,f]} = (\mathrm{id}_V\otimes(\zeta_g)_{W,F_h(U)})(\mathrm{id}_V\otimes\mathrm{id}_{F_g(W)}\otimes(\gamma^{-1}_{g,h})_U).$$

Lema 3.7.2. *Si $\mathcal{C}$ es rígida entonces $\mathcal{C}[G]$ es rígida. El dual de $[V, g]$ es $[F_{g^{-1}}(V^*), g^{-1}]$. Los morfismos de evaluación y coevaluación están dados por*

$$ev : [F_{g^{-1}}(V^*)\otimes F_{g^{-1}}(V), 1] \to [\mathbf{1}, 1], \quad coev : [\mathbf{1}, 1] \to [V\otimes F_g(F_{g^{-1}}(V^*)), 1],$$
$$ev = F_{g^{-1}}(ev_V)(\zeta_{g^{-1}})_{V^*,V}, \quad coev = (\mathrm{id}_V\otimes(\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{V^*})coev_V.$$

□

Ejercicio 3.7.3. Sea G un grupo finito actuando en dos categorías monoidales $\mathcal{C}, \mathcal{D}$. Si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor monoidal G-equivariante, demostrar que $H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ es un funtor monoidal.

Ejercicio 3.7.4. Sea G un grupo finito actuando en una categoría tensorial finita $\mathcal{C}$. Usando el ejercicio 3.1.9, demostrar que existe otra acción de G en $\mathcal{C}$, que dicha acción es unitaria y donde todos los funtores F_g son unitarios, y que además existe una equivalencia G-equivariante $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Ejercicio 3.7.5. Poner el ejemplo de G actuando en $\mathcal{C}(G, \omega)$.

3.8. Producto tensorial de categorías tensoriales finitas

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, \mathbf{1}_{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes, a^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, \mathbf{1}_{\mathcal{D}})$ categorías tensoriales finitas sobre un cuerpo $\Bbbk$. En esta sección nos dedicaremos a describir una estructura tensorial en la categoría $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$.

Como el producto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es exacto, existe un único funtor exacto $\otimes_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[dl, "\boxtimes_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\otimes"] & \\ \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C} \arrow[rr, "\otimes_{\mathcal{C}}"] & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. La asociatividad $a^{\mathcal{C}} : \otimes\circ(\otimes\times\mathrm{Id}) \to \otimes\circ(\mathrm{Id}\times\otimes)$ induce un isomorfismo natural $\widetilde{a}^{\mathcal{C}} : \otimes_{\mathcal{C}} \circ (\otimes_{\mathcal{C}} \boxtimes \mathrm{Id}) \to \otimes_{\mathcal{C}} \circ (\mathrm{Id} \boxtimes \otimes_{\mathcal{C}})$ tal que verifica el axioma del pentágono.

Denotaremos por $\widetilde{t} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$ al funtor

$$\widetilde{t} = (Y, X), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}.$$

Sea $t : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$ el funtor dado por $t = \boxtimes_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \circ \widetilde{t}$. Como el funtor t es exacto, pues $\boxtimes_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $\widetilde{t}$ son exactos, entonces existe un único funtor exacto $\tau : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \times \mathcal{D} \arrow[dl, "\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"'] \arrow[dr, "t"] & \\ \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \arrow[rr, "\tau"] & & \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si se requiere enfatizar el orden de las categorías, a veces, denotaremos al funtor $\tau : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$ como $\tau_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.

Teorema 3.8.1. *Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías tensoriales finitas entonces $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es una categoría tensorial finita tal que el funtor $\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es monoidal estricto.*

Demostración. Sea $\tau_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C}$ el funtor tal que $\tau_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(X \boxtimes Y) = Y \boxtimes X$ para todo $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$.

Definimos el funtor $\Gamma : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ por $\Gamma = (\otimes_{\mathcal{C}} \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \boxtimes \tau_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}})$. Denotemos por $p : (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \times (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ al funtor $\boxtimes_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D},\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}$, y sea

$$P : (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \times (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \quad P = \Gamma \circ p.$$

Definimos los funtores $A_l, A_r : (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D})^{\boxtimes 3} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ por

$$A_l = \Gamma \circ (\Gamma \boxtimes \mathrm{Id}), \quad A_r = \Gamma \circ (\mathrm{Id} \boxtimes \Gamma).$$

Afirmación 3.8.1. *Se tiene que $A_l = \otimes_{\mathcal{C}}(\otimes_{\mathcal{C}} \boxtimes \mathrm{Id}) \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}}(\otimes_{\mathcal{D}} \boxtimes \mathrm{Id})$ y $A_r = \otimes_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id} \boxtimes \otimes_{\mathcal{C}}) \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}}(\mathrm{Id} \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}})$.*

Prueba de la afirmación. Por un lado se tiene que

$$A_l = (\otimes_{\mathcal{C}} \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}})(\mathrm{Id} \boxtimes \tau_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \boxtimes \mathrm{Id})(\otimes_{\mathcal{C}} \boxtimes \otimes_{\mathcal{D}} \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}})(\mathrm{Id} \boxtimes \tau_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \boxtimes \mathrm{Id} \boxtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}).$$

Como los funtores $(\otimes_{\mathcal{C}} \times \mathrm{Id} \times \otimes_{\mathcal{D}} \times \mathrm{Id})$, $(\mathrm{Id} \times \tau_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \times \mathrm{Id})(\otimes_{\mathcal{C}} \times \otimes_{\mathcal{D}} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}})(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \times \tau_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{D}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D}})$ coinciden, se tiene la igualdad requerida. Para A_r la demostración es similar. $\square$

Entonces las asociatividades de las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ inducen

$$\widetilde{a}^{\mathcal{C}} \boxtimes \widetilde{a}^{\mathcal{D}} : A_l \to A_r.$$

Este isomorfismo natural induce un isomorfismo $a : P(P \times \mathrm{Id}) \to P(\mathrm{Id} \times P)$. Queda como ejercicio verificar que este isomorfismo satisface el axioma del pentágono. Notar que para todo $X, X' \in \mathcal{C}, Y, Y' \in \mathcal{D}$ se satisface que

$$P(X \boxtimes Y, X' \boxtimes Y') = (X \otimes X') \boxtimes (Y \otimes Y').$$

Esto implica que el funtor $\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es monoidal estricto ya que satisface

$$P \circ (\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \times \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}}) = \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \circ (\otimes \times \otimes)(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \times \tau_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}).$$

□

Proposición 3.8.2. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}, \mathcal{A}$ categorías tensoriales finitas y $(H, \xi) : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor tensorial exacto a derecha en cada variable. Entonces existe un único funtor tensorial $(\overline{H}, \overline{\xi}) : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ tal que $\overline{H} \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = H$.*

Demostración. Como $H : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es exacto a derecha en cada variable entonces existe un único funtor $\overline{H} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ tal que $\overline{H} \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = H$. Demostremos que este funtor posee estructura de funtor monoidal. Tenemos un isomorfismo natural

$$\xi : H \circ (\otimes^1 \times \otimes^2)(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \widetilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \to \otimes_{\mathcal{A}} \circ (H \times H).$$

Donde $\otimes^1$, respectivamente $\otimes^2$, es el producto tensorial de $\mathcal{C}$, respectivamente $\mathcal{D}$ y $\otimes_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es el producto tensorial de $\mathcal{A}$. Recordar que $(\otimes^1 \times \otimes^2)(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \widetilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}})$ es el producto tensorial de la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Sabemos que para cualquier categoría Abeliana $\mathcal{E}$ el funtor

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \times \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \xrightarrow{G \mapsto G(\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \times \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}})} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E})$$

es obvio esta equivalencia?establece una equivalencia de categorías. Recordemos que

$$P : (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \times (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \quad P = \Gamma \circ p,$$

es el producto tensorial de la categoría $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$. Por un lado, como $\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ es un funtor monoidal estricto, se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{H} \circ P \circ (\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \times \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}}) &= \overline{H} \circ \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \circ (\otimes^1 \times \otimes^2)(\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \widetilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \\ &= H \circ (\otimes^1 \times \otimes^2)(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \times \widetilde{\tau} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\otimes_{\mathcal{A}} \circ (\overline{H} \times \overline{H}) \circ (\boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \times \boxtimes_{\mathcal{C},\mathcal{D}}) = \otimes_{\mathcal{A}} \circ (H \times H).$$

Entonces existe un único isomorfismo natural

$$\overline{\xi} : \overline{H} \circ P \to \otimes_{\mathcal{A}} \circ (\overline{H} \times \overline{H})$$

tal que $\overline{\xi}_{X \boxtimes X', Y \boxtimes Y'} = \xi_{(X,X'),(Y,Y')}$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $X', Y' \in \mathcal{D}$. □

necesitamos que producto de deligne de funtores monoidales sea monoidal?

Ejercicio 3.8.3. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{C}', \mathcal{D}'$ categorías tensoriales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ funtores monoidales exactos a derecha. Entonces el funtor $F \boxtimes G : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{C}' \boxtimes \mathcal{D}'$, descripto en el Lema 2.9.5, es monoidal.

Ejercicio 3.8.4. Sean A, B álgebras de Hopf de dimensión finita. Demostrar que existe una equivalencia monoidal $\mathrm{Rep}\,(A) \boxtimes \mathrm{Rep}\,(B) \simeq \mathrm{Rep}\,(A \otimes_{\Bbbk} B)$.

3.9. La dimensión de Frobenius-Perron

En esta sección presentaremos un invariante muy importante de una categoría tensorial finita, la llamada *dimensión de Frobenius-Perron*. Para más detalles sobre este tema el lector es referido a [**28**], [**32**], [**36**], [**26**].

3.9.1. $\mathbb{Z}_+$-anillos y $\mathbb{Z}_+$-módulos. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los enteros no negativos. Las siguientes notaciones y resultados son extraídas de [**62**]. Según el autor, aparecieron por primera vez en [**50**] y [**29**].

Definición 3.9.1.
- Sea A una $\mathbb{Z}$-álgebra que es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $\mathcal{B} = \{b_i\}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una $\mathbb{Z}_+$-base si $b_i b_j = \sum_k N_{ij}^k \, b_k$ con $N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$. En tal caso decimos que A es una $\mathbb{Z}_+$-álgebra.
- Un $\mathbb{Z}_+$-módulo sobre una $\mathbb{Z}_+$-álgebra A es un A-módulo M que es $\mathbb{Z}$-libre con una base fija $\{m_i\}$ tal que $b_i \cdot m_j = \sum_k d_{ij}^k \, m_k$ con $d_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$.
- Dos $\mathbb{Z}_+$-módulo M_1, M_2 con bases fijas $\{m_i^1\}_{i\in I}$, $\{m_j^2\}_{j\in J}$ son equivalentes si existe una biyección $\phi : I \to J$ tal que el morfismo $\mathbb{Z}$-lineal inducido $\widetilde{\phi} : M_1 \to M_2$ definido por $\widetilde{\phi}(m_i) = m_{\phi(i)}$ es un isomorfismo de A-módulos.
- La suma directa de dos $\mathbb{Z}_+$-módulos M_1, M_2 es el módulo $M_1 \oplus M_2$ con base distinguida dada por la unión de las bases de M_1 y M_2. Un $\mathbb{Z}_+$-módulo se dice indescomponible si no es equivalente a la suma directa de dos $\mathbb{Z}_+$-módulos no triviales.
- Un $\mathbb{Z}_+$-submódulo de un $\mathbb{Z}_+$-módulo M con base distinguida $\{m_i^1\}_{i\in I}$ es un subconjunto J tal que el subgrupo Abeliano generado por $\{m_j^2\}_{j\in J}$ es un A-submódulo de M.
- Una $\mathbb{Z}_+$-álgebra A con base distinguida $\{b_i\}_{i\in I}$ es llamada un *anillo base* si
  (i) Existe un subconjunto $I_0 \subseteq I$ tal que $1 = \sum_{i\in I_0} b_i$. Si I_0 posee un solo objeto decimos que A es *unitario*.
  (ii) Sea $\tau : A \to \mathbb{Z}$ el morfismo de grupos definido por
  $$\tau(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in I_0 \\ 0 & \text{si} \quad i \notin I_0. \end{cases}$$
  Existe una involución $I \to I$, $i \mapsto \bar{i}$ tal que la aplicación inducida $a = \sum_{i\in I} a_i b_i \mapsto \overline{a} = \sum_{i\in I} a_i b_{\bar{i}}$ es una anti-involución del anillo A y se cumple que
  $$\tau(b_i b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = \bar{j} \\ 0 & \text{si} \quad i \neq \bar{j}. \end{cases}$$
- Sea A un anillo con base distinguida I. Se dice que A es *transitiva* si para todo $i, j \in I$ existen $k, l \in I$ tales que j aparece en la descomposición de ik y li.
- Un *módulo base* sobre un anillo base A con base distinguida $\{b_i\}_{i\in I}$ es un $\mathbb{Z}_+$-módulo M con base distinguida $\{m_j\}_{j\in J}$ tal que $d_{ij}^k = d_{\bar{i}k}^j$.

Proposición 3.9.2. *Sea M un módulo base sobre un anillo base A. Si M es indescomponible como $\mathbb{Z}_+$-módulo entonces es irreducible como $\mathbb{Z}_+$-módulo sobre A.*

Demostración. Sea $\{m_j\}_{j\in J}$ la base distinguida de M y $\{b_i\}_{i\in I}$ la base distinguida de A. Se tiene un producto escalar en M definido por $\langle m_i, m_j\rangle = \delta_{i,j}$ para todo $i, j \in J$ tal que para todo $l \in I$ se tiene que $\langle b_l \cdot m_i, m_j\rangle = \langle m_i, b_{\bar{l}} \cdot m_j\rangle$. Entonces el complemento ortogonal de un submódulo (base) es un submódulo (base). $\square$

La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [**38**], [**28**].

Teorema 3.9.3. *Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz tal que $A_{ij} \geq 0$. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. *A posee un autovalor real no negativo. Sea $\lambda(A)$ el mayor autovalor real de A. Entonces $|\mu| \leq \lambda(A)$ para todo autovalor μ de A.*
2. *A posee un autovector v de autovalor $\lambda(A)$ tal que $v_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$*
3. *Si $A_{ij} > 0$ para todo i, j entonces $0 < \lambda(A)$ y es simple. Su correspondiente autovector puede ser normalizado para que sus entradas sean todas positivas. Más aun $|\mu| < \lambda(A)$ para todo autovalor μ de A distinto de $\lambda(A)$.*
4. *Si w es un autovector de A con entradas positivas entonces su correspondiente autovalor es $\lambda(A)$.*

$\square$

Para la demostración del siguiente lema, ver [**28**, Prop. 1.45.2].

Lema 3.9.4. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial, entonces el anillo de Grothendieck $G_0(\mathcal{C})$ es un anillo base transitivo.* $\square$

Sea A un anillo base unitario transitivo con base distinguida I. Para cada $i \in I$ denotamos por $\operatorname{FPdim}(i)$ al autovalor máximo no negativo de la matriz que resulta de multiplicar por i. Como la matriz de multiplicar por i posee coeficientes enteros no negativos, por el teorema 3.9.3, dicho autovalor existe. Extendiendo por aditividad se define un morfismo de grupos $\operatorname{FPdim} : A \to \mathbb{C}$. Esta función se llama la *dimensión de Frobenius-Perron*.

Proposición 3.9.5. *Sea A un anillo unitario transitivo con base finita distinguida I. Las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

1. *Si $i \in I$ entonces $\operatorname{FPdim}(i)$ es un entero algebraico y si z es un conjugado de $\operatorname{FPdim}(i)$ entonces $\operatorname{FPdim}(i) \geq | z |$.*
2. *Si $i \in I$ entonces $\operatorname{FPdim}(i) \geq 1$.*
3. *La función $\operatorname{FPdim} : A \to \mathbb{C}$ es un morfismo de anillos.*
4. *Existe un elemento $R \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, único salvo escalar, tal que $aR = \operatorname{FPdim}(a)R$ para todo $a \in A$. Con una normalización apropiada este elemento posee coeficientes positivos y satisface que $Ra = \operatorname{FPdim}(a)R$ para todo $a \in A$.*
5. *La función $\operatorname{FPdim} : A \to \mathbb{C}$ es el único caracter que toma valores positivos en los elementos de la base I.*
6. *Si $a \in A$ tiene coeficientes no negativos con respecto a la base I entonces el escalar $\operatorname{FPdim}(a)$ es el autovalor más grande no negativo de la matriz que resulta de multiplicar por a.*

7. *La función* FPdim $: A \to \mathbb{C}$ *es deja invariante la involución* $I \to I$.

Demostración. Para las partes (1) y (2) ver [**28**, Prop. 1.45.4]. Para las demostraciones de las partes (3), (4), (5) y (6) ver [**28**, Prop. 1.45.5]. Para la parte (7) ver [**28**, Prop. 1.45.8].

□

chequear si se necesita que A sea base. No se cumple para finitas?

Al elemento $R \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ se lo llama el *elemento regular* de A.

3.9.2. La dimensión de Frobenius-Perron de una categoría tensorial finita. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$.

Definición 3.9.6. Como anillo de Grothendieck $G_0(\mathcal{C})$ es un anillo transitivo, tenemos bien definida la dimensión de Frobenius-Perron. Si X es un objeto de $\mathcal{C}$ la dimensión de Frobenius-Perron de X será la dimensión de Frobenius-Perron de $\langle X \rangle$ como objeto de $G_0(\mathcal{C})$.

Denotemos por $\{S_i : i \in I\}$ al conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de $\mathcal{C}$. Denotemos por $P_i = P(S_i)$ al cubrimiento proyectivo de S_i.

Definición 3.9.7. El *objeto regular* de $\mathcal{C}$ es el objeto

$$R_{\mathcal{C}} = \sum_{i \in I} \operatorname{FPdim}(S_i) \ < P_i > \in K_0(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

La *dimensión de Frobenius-Perron* de $\mathcal{C}$ es

$$\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) = \operatorname{FPdim}(R_{\mathcal{C}}) = \sum_{i \in I} \operatorname{FPdim}(S_i) \operatorname{FPdim}(P_i).$$

Proposición 3.9.8. *Las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

(a) $X \in \mathcal{C}$ *es invertible si y sólo si* $\operatorname{FPdim}(X) = 1$.
(b) $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) \geq |I| \operatorname{FPdim}(P(\mathbf{1}))$.
(c) *Para todo* $X \in \mathcal{C}$ *se tiene que*

$$\operatorname{FPdim}(X) = \sum_{i \in I} \operatorname{FPdim}(S_i) \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P(S_i), X). \tag{3.9.1}$$

Demostración. Para la demostración de la parte (a) ver [**28**, Corollary 1.45.9.]. Para la parte (b) ver [**28**, Remark 1.47.8.] La parte (c) se deduce inmediatamente de (2.8.3). □

Ejemplo 3.9.9. Si H es una álgebra cuasi-Hopf de dimensión finita entonces

$$\operatorname{FPdim}(\operatorname{Rep}(H)) = \dim H.$$

La afirmación sigue de que para cualquier objeto $X \in \operatorname{Rep}(H)$ se tiene que $\operatorname{FPdim}(X) = \dim X$.

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [**28**, Theorem 1.50.1.].

Teorema 3.9.10. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ cateogrías tensoriales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor cuasi-tensorial dominante. Entonces*

$$F(R_{\mathcal{C}}) = \frac{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{D})}\, R_{\mathcal{D}}. \tag{3.9.2}$$

□

Capítulo 4

Categorías monoidales trenzadas

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal. Denotaremos $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ el funtor $\tau(X, Y) = (Y, X)$.

Definición 4.0.1. Una *trenza* para $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural $\sigma : \otimes \to \otimes \circ \tau$ que satisface

$$a_{V,W,U}\, \sigma_{U,V\otimes W}\, a_{U,V,W} = (\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{U,W})\, a_{V,U,W} (\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W), \tag{4.0.1}$$

$$a^{-1}_{W,U,V}\, \sigma_{U\otimes V,W}\, a^{-1}_{U,V,W} = (\sigma_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)\, a^{-1}_{U,W,V}\, (\mathrm{id}_U \otimes \sigma_{V,W}), \tag{4.0.2}$$

para todo $U, V, W \in \mathcal{C}$. Una *categoría monoidal trenzada* es un par $(\mathcal{C}, \sigma)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal y σ es una trenza para $\mathcal{C}$.

Explícitamente, el hecho de que $\sigma : \otimes \to \otimes \circ \tau$ sea una transformación natural dice que es una colección de morfismos $\sigma_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ tal que para todo morfismo $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} V\otimes W \arrow[r, "\sigma_{V,W}"] \arrow[d, "f\otimes g"] & W\otimes V \arrow[d, "g\otimes f"'] \\ V'\otimes W' \arrow[r, "\sigma_{V',W'}"] & W'\otimes V' \end{tikzcd} \tag{4.0.3}$$

es conmutativo.

Observación 4.0.2. Si $(\mathcal{C}, \sigma)$ es trenzada y estricta entonces $\sigma_{V,\mathbf{1}} = \mathrm{id}_V = \sigma_{\mathbf{1},V}$ para todo $V \in \mathcal{C}$.

Definición 4.0.3. Una categoría trenzada $(\mathcal{C}, \sigma)$ se dice *simétrica* si $\sigma_{V,W}\sigma_{W,V} = \mathrm{id}_{W\otimes V}$ para todo $V, W \in \mathcal{C}$.

Ejercicio 4.0.4. Si $(\mathcal{C}, \sigma)$ es una categoría monoidal trenzada entonces $(\mathcal{C}, \widetilde{\sigma})$ es trenzada, donde $\widetilde{\sigma}_{W,V} = \sigma^{-1}_{V,W}$. De ahora en más denotaremos esta categoría trenzada por $\overline{\mathcal{C}}$. ¿ Son $\mathcal{C}^{rev}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ trenzadas ?

Teorema 4.0.5. *Sea $(\mathcal{C}, \sigma)$ una categoría monoidal trenzada. Entonces*

$$a_{W,U,V}(\sigma_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U) a^{-1}_{V,W,U} (\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{U,W}) a_{V,U,W} (\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) = \tag{4.0.4}$$

$$= (\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{U,V}) a_{W,U,V} (\sigma_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V) a^{-1}_{U,W,V} (\mathrm{id}_U \otimes \sigma_{V,W}) a_{U,V,W}, \tag{4.0.5}$$

para todo $U, V, W \in \mathcal{C}$

La igualdad anterior es llamada la *ecuación de Yang-Baxter*.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\mathcal{C}$ es estricta. Por la igualdad (4.0.2) tenemos que

$$(\sigma_{V,W}\otimes \mathrm{id}_U)(\mathrm{id}_V\otimes\sigma_{U,W})(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W) = \sigma_{V\otimes W,U}(\sigma_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W),$$

y

$$(\mathrm{id}_W\otimes\sigma_{U,V})(\sigma_{U,W}\otimes\mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U\otimes\sigma_{V,W}) = (\mathrm{id}_W\otimes\sigma_{U,V})\sigma_{U\otimes V,W}.$$

Ambas expresiones son iguales por la naturalidad de σ, ver el diagrama (4.0.3).

□

Definición 4.0.6. Sean $(\mathcal{C},\sigma)$, $(\mathcal{D},\tau)$ dos categorías monoidales trenzadas. Un funtor monoidal $(F,\xi):\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ se dice *trenzado* si para todo $X,Y\in\mathcal{C}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\xi_{X,Y}"] \arrow[d, "\tau_{F(X),F(Y)}"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(\sigma_{X,Y})"] \\ F(Y)\otimes F(X) \arrow[r, "\xi_{Y,X}"] & F(Y\otimes X) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Dos categorías monoidales trenzadas se dicen *trenzadamente equivalentes* si existe un funtor monoidal trenzado que es una equivalencia de categorías monoidales.

Definición 4.0.7. Una *categoría tensorial finita trenzada* es una categoría tensorial finita sobre un cuerpo $\Bbbk$ munida de una trenza $\Bbbk$-lineal aditiva.

Ejemplo 4.0.8.

- La categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es trenzada. La trenza es
$$\tau_{V,W}: V\otimes_{\Bbbk}W\to W\otimes_{\Bbbk}V,\quad \tau_{V,W}(v\otimes w)=w\otimes v,$$
para todo $v\in V, w\in W$.
- Si G es un grupo finito, la categoría $\mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)$ es trenzada. La trenza es la misma que en el ejemplo anterior de la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Más generalmente, si H es un álgebra de Hopf coconmutativa entonces $\mathrm{Rep}\,(H)$ es trenzada, y la trenza es la misma que en la categoría de espacios vectoriales.
- Si (H,R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular entonces $\mathrm{Rep}\,(H)$ es trenzada. La trenza está determinada por
$$\sigma_{V,W}: V\otimes_{\Bbbk}W\to W\otimes_{\Bbbk}V,\quad \sigma_{V,W}(v\otimes w)=R^2\cdot w\otimes R^1\cdot v,$$
$V,W\in\mathrm{Rep}\,(H)$, $v\in V, w\in W$.
- La categoría de super-espacios vectoriales $\mathrm{Supervect}_{\Bbbk}$ es trenzada. La trenza es
$$\sigma_{V,W}: V\otimes_{\Bbbk}W\to W\otimes_{\Bbbk}V,\quad \sigma_{V,W}(v\otimes w)=(-1)^{p(v)p(w)}\,w\otimes v,$$
para todo $V,W\in\mathrm{Supervect}_{\Bbbk}$, $v\in V, w\in W$. Aquí, si $v\in V_i$ es un elemento homogéneo $p(v)=i$.

- Más generalmente, sea G un grupo finito y $u \in G$ un elemento central de orden 2. Definimos $\operatorname{Rep}(G,u)$ a la categoría tensorial de super-espacios vectoriales equipados de una acción de G, tal que u actua por paridad. La trenza es la misma que la trenza de $\operatorname{Supervect}_{\Bbbk}$. La categorías $\operatorname{Rep}(G,u)$ resultan ser de fusión simétrica. Se sabe que toda categoría de fusión simétrica es equivalente a una de estas. Ver [**21**].
- Sea G un grupo finito abeliano y $\beta: G\times G \to \Bbbk^\times$ un bicaracter. Sea $\mathcal{C}(G,\beta)$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados. Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}(G,\beta)$ la trenza está dada por
$$\sigma_{X,Y}: X\otimes Y \to Y\otimes X, \quad \sigma_{X,Y}(x\otimes y) = \beta(g,h)\, y\otimes x,$$
si $x \in X_g, y \in Y_h$, $g, h \in G$.
- Sea R un anillo conmutativo. La categoría $\mathfrak{C}hain(R)$ es trenzada. Si $C, D \in \mathfrak{C}hain(R)$ son dos objetos y $x \in C_r, y \in D_s$ entonces la trenza está determinada por
$$\sigma_{C,D}(x\otimes y) = (-1)^{rs} y\otimes x.$$
- La categoría de trenzas $\mathbb{B}$ es trenzada. Dados dos objetos $m, n \in \mathbb{N}_0$ definimos la trenza $\sigma_{n,m}: n+m \to n+m$ falta!!!!!!!!!!

El siguiente resultado fue obtenido en [**46**].

Proposición 4.0.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. El funtor $\otimes_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ posee estructura de funtor monoidal si y sólo si la categoría $\mathcal{C}$ es trenzada. La estructura monoidal de $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$ es la dada en el Teorema 3.8.1.*

Demostración. Asumiremos que $\mathcal{C}$ es estricta. Por la Proposición 3.8.2 es suficiente con demostrar que el funtor $\otimes: \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ posee estructura de funtor monoidal si y sólo si la categoría $\mathcal{C}$ es trenzada.

Asumamos que $(\mathcal{C}, \sigma)$ es trenzada. Definimos
$$\xi_{(X,X'),(Y,Y')}: X\otimes X'\otimes Y\otimes Y' \to X\otimes Y\otimes X'\otimes Y',$$
$$\xi_{(X,X'),(Y,Y')} = \operatorname{id}_X\otimes\sigma_{X',Y}\otimes\operatorname{id}_{Y'},$$
para todo $X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}$. Demostremos que $(\otimes, \xi)$ es un funtor tensorial. El lado izquierdo de la ecuación (3.1.3) es igual a
$$\begin{aligned}&\xi_{(X,X'),(Y,Y')\otimes(Z,Z')}(\operatorname{id}_{X\otimes X'}\otimes\xi_{(Y,Y'),(Z,Z')})\\ &= (\operatorname{id}_X\otimes\sigma_{X',Y\otimes Z}\otimes\operatorname{id}_{Y'\otimes Z'})(\operatorname{id}_{X\otimes X'\otimes Y}\otimes\sigma_{Y',Z}\otimes\operatorname{id}_{Z'}).\end{aligned}$$
El lado derecho de la ecuación (3.1.3) es igual a
$$\begin{aligned}&\xi_{(X,X')\otimes(Y,Y'),(Z,Z')}(\xi_{(X,X'),(Y,Y')}\otimes\operatorname{id}_{Z\otimes Z'})\\ &= (\operatorname{id}_{X\otimes Y}\otimes\sigma_{X'\otimes Y',Z}\otimes\operatorname{id}_{Z'})(\operatorname{id}_X\otimes\sigma_{X',Y}\otimes\operatorname{id}_{Y'\otimes Z\otimes Z'}).\end{aligned}$$

Usando (4.0.1) y (4.0.2) obtenemos que ambas expresiones son iguales. Ahora supongamos que el funtor $(\otimes, \xi) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es monoidal. Definimos

$$\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X, \quad \sigma_{X,Y} = \xi^{-1}_{(\mathbf{1},Y),(X,\mathbf{1})} \xi_{(X,\mathbf{1}),(\mathbf{1},Y)},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Como $(\otimes, \xi)$ es monoidal, se debe satisfacer las siguientes igualdades:

$$\xi_{(\mathbf{1},X\otimes Y),(Z,\mathbf{1})}(\xi_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)} \otimes \mathrm{id}\,) = \xi_{(\mathbf{1},X),(Z,Y)}(\mathrm{id}\, \otimes \xi_{(\mathbf{1},Y),(Z,\mathbf{1})}), \tag{4.0.6}$$

$$\xi_{(Z,X),(\mathbf{1},Y)}(\xi_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},X)} \otimes \mathrm{id}\,) = \xi_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},X\otimes Y)}(\mathrm{id}\, \otimes \xi_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)}), \tag{4.0.7}$$

$$\xi_{(Z,X),(\mathbf{1},Y)}(\xi_{(\mathbf{1},X),(Z,\mathbf{1})} \otimes \mathrm{id}\,) = \xi_{(\mathbf{1},X),(Z,Y)}(\mathrm{id}\, \otimes \xi_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},Y)}), \tag{4.0.8}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Usando estas igualdades demostremos que σ satisface (4.0.2). Usando la definición de σ se tiene que

$$(\mathrm{id}\, \otimes \xi^{-1}_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)})\sigma_{X\otimes Y,Z}(\xi_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)} \otimes \mathrm{id}\,)$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}\, \otimes \xi^{-1}_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)})\xi^{-1}_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},X\otimes Y)} \xi_{(\mathbf{1},X\otimes Y),(Z,\mathbf{1})}(\xi_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)} \otimes \mathrm{id}\,)\\
&= (\xi^{-1}_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},X)} \otimes \mathrm{id}\,)\xi^{-1}_{(Z,X),(\mathbf{1},Y)} \xi_{(\mathbf{1},X),(Z,Y)}(\mathrm{id}\, \otimes \xi_{(\mathbf{1},Y),(Z,\mathbf{1})})\\
&= (\xi^{-1}_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},X)} \otimes \mathrm{id}\,)(\xi_{(\mathbf{1},X),(Z,\mathbf{1})} \otimes \mathrm{id}\,)(\mathrm{id}\, \otimes \xi^{-1}_{(Z,\mathbf{1}),(\mathbf{1},Y)})(\mathrm{id}\, \otimes \xi_{(\mathbf{1},Y),(Z,\mathbf{1})})\\
&= (\sigma_{X,Z} \otimes \mathrm{id}\,)(\mathrm{id}\, \otimes \sigma_{Y,Z}).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad por (4.0.7) y (4.0.6), la tercera por (4.0.8). Por la naturalidad de σ se tiene que

$$(\mathrm{id}\, \otimes \xi^{-1}_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)})\sigma_{X\otimes Y,Z}(\xi_{(\mathbf{1},X),(\mathbf{1},Y)} \otimes \mathrm{id}\,) = \sigma_{X\otimes Y,Z},$$

con lo cual queda demostrada (4.0.2). La demostración de la ecuación (4.0.1) es similar. $\square$

Ejercicio 4.0.10. Sea $\Bbbk$ cuerpo de característica cero. Demostrar que $\mathrm{Supervect}_{\Bbbk}$ es trenzadamente equivalente a $\mathrm{Rep}\,(\Bbbk\mathbb{Z}_2)$ donde la trenza está dada por la R-matriz

$$R = \frac{1}{2}\big(1\otimes 1 + 1\otimes u + u\otimes 1 - u\otimes u\big),$$

donde u es el generador de $\mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 4.0.11. Sean G, G' grupos finitos abelianos y $\beta : G\times G \to \Bbbk^\times$, $\beta' : G'\times G' \to \Bbbk^\times$ bicaracteres. Dar condiciones necesarias y suficientes para que las categorías $\mathcal{C}(G,\beta)$, $\mathcal{C}(G',\beta')$ sean trenzadamente equivalentes.

Ejercicio 4.0.12. Sea $(\mathcal{C}, \sigma)$ una categoría monoidal trenzada. Demostrar que el funtor identidad $\mathrm{Id}\, : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{rev}$ da una equivalencia de categorías monoidales.

Ejercicio 4.0.13. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías monoidales trenzadas entonces $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es trenzada.

4.1. Álgebras conmutativas y módulos disléxicos

En esta sección $\mathcal{C}$ va a ser una categoría monoidal tal que el producto monoidal $\otimes$ es un funtor exacto a derecha en cada variable.

Definición 4.1.1. Un álgebra (A, m, u) en una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \sigma)$ se dice *conmutativa* si $m \circ \sigma_{A,A} = m$.

Lema 4.1.2. *Sea A un álgebra conmutativa en una categoría trenzada $(\mathcal{C}, \sigma)$. La categoría $\mathcal{C}_A$ posee una estructura de categoría monoidal. Existe un funtor monoidal fiel y pleno $F : \mathcal{C}_A \to {}_A\mathcal{C}_A$.*

Demostración. Vamos a suponer, sin perder generalidad, que la categoría $\mathcal{C}$ es estricta. Si $X \in \mathcal{C}_A$ entonces X posee una acción a izquierda de A. Si $\rho_X : X \otimes A \to X$ es la acción a derecha entonces definimos la acción a izquierda por

$$\lambda_X : A \otimes X \xrightarrow{\sigma_{A,X}} X \otimes A \xrightarrow{\rho_X} X.$$

Demostremos que λ_X define una acción a izquierda. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda_X(m \otimes \mathrm{id}_X) &= \rho_X \sigma_{A,X}(m \otimes \mathrm{id}_X) = \rho_X(\mathrm{id}_X \otimes m)\sigma_{A\otimes A,X} \\
&= \rho_X(\mathrm{id}_X \otimes m)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma_{A,A})\sigma_{A\otimes A,X} \\
&= \rho_X(\rho_X \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma_{A,A})(\sigma_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A \otimes \sigma_{A,X}) \\
&= \rho_X(\rho_X \otimes \mathrm{id}_A)(\sigma_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A \otimes \sigma_{A,X})(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{id}_X) \\
&= \rho_X(\rho_X \sigma_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A)\sigma_{A,A\otimes X} \\
&= \rho_X \sigma_{A,X}(\mathrm{id}_A \otimes \rho_X \sigma_{A,X}) = \lambda_X(\mathrm{id}_A \otimes \lambda_X).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad por la naturalidad de σ, la tercera por la conmutatividad de A, la cuarta por (4.0.2), la quinta por la ecuación de Yang-Baxter (4.0.4), la sexta por (4.0.1) y la séptima por la naturalidad de σ.

Afirmamos que X con estas dos acciones es un objeto en ${}_A\mathcal{C}_A$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\rho_X(\lambda_X \otimes \mathrm{id}_A) &= \rho_X(\rho_X \otimes \mathrm{id}_A)(\sigma_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A) = \rho_X(\mathrm{id}_X \otimes m)(\sigma_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A) \\
&= \rho_X(\mathrm{id}_X \otimes m)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma^{-1}_{A,A})\sigma_{A,X\otimes A} \\
&= \rho_X(\mathrm{id}_X \otimes m)\sigma_{A,X\otimes A} = \rho_X(\rho_X \otimes \mathrm{id}_A)\sigma_{A,X\otimes A} \\
&= \rho_X \sigma_{A,X}(\mathrm{id}_A \otimes \rho_X) = \lambda_X(\mathrm{id}_A \otimes \rho_X).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad por la asociatividad de la acción a derecha, la tercera por (4.0.1), la cuarta por la conmutatividad de A y la sexta por la naturalidad de σ. La estructura monoidal de $\mathcal{C}_A$ es la restricción de la estructura monoidal de ${}_A\mathcal{C}_A$. □

Sea $I : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ el funtor de olvido y sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ el funtor $F(X) = X \otimes A$ para todo $X \in \mathcal{C}$. La acción de A en $F(X)$ está concentrada en el segundo tensorando. Recordemos la definición de funtor dominante dada en 2.6.10. La demostración del siguiente lema queda como ejericio.

Lema 4.1.3. *El funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ es monoidal dominante y el funtor I es un adjunto a derecha de F.* □

La siguiente definición fue introducida por B. Pareigis [**63**].

Definición 4.1.4. Si $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra conmutativa, un A-módulo a derecha (M, ρ) es *disléxico* si

$$\rho\, \sigma_{AM} \sigma_{MA} = \rho.$$

La subcategoría plena de A-módulos disléxicos se denota por $\mathcal{C}_A^0$.

Teorema 4.1.5. [**63**] *Sea $A \in \mathcal{C}$ un álgebra conmutativa. La categoría $\mathcal{C}_A^0$ es una subcategoría monoidal trenzada de $\mathcal{C}_A$.*

Demostración. Demostremos que si V, W son A-módulos disléxicos entonces $V \otimes_A W$ es también disléxico. Sea $g : V \otimes_A W \otimes A \to V \otimes_A W$ la acción a derecha y $\pi_{V,W} : V \otimes W \to$ la proyección canónica (Ver sección 3.3.1 para su definición). Recordemos que por la definición de $\pi_{V,W}$ se satisface que

$$\pi_{V,W}(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W) = \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W \sigma_{A,W}). \tag{4.1.1}$$

Debemos demostrar que $g = g\sigma_{A,V\otimes_A W}\sigma_{V\otimes_A W,A}$. Como el producto tensorial $\otimes$ es exacto a derecha y $\pi_{V,W}$ es suryectivo entonces $\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A$ es suryectivo. Entonces alcanza con demostrar que

$$g(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A) = g\sigma_{A,V\otimes_A W}\sigma_{V\otimes_A W,A}(\pi_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A).$$

Por la definición de g y la naturalidad de σ, esta igualdad es equivalente a

$$\pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W) = \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W)\sigma_{A,V\otimes W}\sigma_{V\otimes W,A}.$$

El lado derecho de esta ecuación es igual a

$$\begin{aligned}
&= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{A,W})(\sigma_{A,V}\sigma_{V,A} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{W,A}) \\
&= \pi_{V,W}(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W)(\sigma_{A,V}\sigma_{V,A} \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{W,A}) \\
&= \pi_{V,W}(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{W,A}) \\
&= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W \sigma_{A,W}\sigma_{W,A}) \\
&= \pi_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W).
\end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a (4.0.1) y (4.0.2), la segunda se debe a (4.1.1), la tercera pues V es disléxico, la cuarta nuevamente por (4.1.1) y la última igualdad porque W es disléxico.

Resta definir la trenza en la categoría $\mathcal{C}_A^0$. Sean $V, W \in \mathcal{C}_A^0$. Definimos $\phi : V \otimes W \to W \otimes_A V$, $\phi = \pi_{W,V}\sigma_{V,W}$. Verifiquemos que se satisface

$$\phi(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W) = \phi(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W \sigma_{A,W}).$$

Por un lado

$$\begin{aligned}\phi(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W) &= \pi_{W,V}\sigma_{V,W}(\rho_V \otimes \mathrm{id}_W) = \pi_{W,V}(\mathrm{id}_W \otimes \rho_V)\sigma_{V\otimes A,W}\\ &= \pi_{W,V}(\mathrm{id}_W \otimes \rho_V)(\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{A,V}\sigma_{V,A})\sigma_{V\otimes A,W}\\ &= \pi_{W,V}(\rho_W \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{V,A})\sigma_{V\otimes A,W}\\ &= \pi_{W,V}(\rho_W \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{V,A})(\sigma_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{A,W}).\end{aligned}$$

La segunda igualdad por la naturalidad de σ, la tercera se debe a que V es disléxico, la cuarta por (4.1.1) y la quinta igualdad por (4.0.2). Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W\sigma_{A,W}) &= \pi_{W,V}\sigma_{V,W}(\mathrm{id}_V \otimes \rho_W\sigma_{A,W})\\ &= \pi_{W,V}(\rho_W \otimes \mathrm{id}_V)\sigma_{V,W\otimes A}(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{A,W})\\ &= \pi_{W,V}(\rho_W \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{V,A})(\sigma_{V,W} \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{A,W})\end{aligned}$$

La segunda igualdad por la naturalidad de σ y la tercera por (4.0.1). Esto implica que existe un morfismo $\widetilde{\sigma}_{V,W} : V\otimes_A W \to W\otimes_A V$ tal que

$$\widetilde{\sigma}_{V,W}\pi_{V,W} = \phi = \pi_{W,V}\sigma_{V,W}.$$

$\square$

4.2. El centro de una categoría monoidal

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta.

Definición 4.2.1. El *centro* de la categoría $\mathcal{C}$ es la categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ que consiste de objetos $(V, c_{-,V})$ donde V es un objeto de $\mathcal{C}$ y $c_{X,V} : X\otimes V \to V\otimes X$ es una familia de isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

$$c_{\mathbf{1},V} = \mathrm{id}_V, \quad c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V}). \tag{4.2.1}$$

Si $(V, c_{-,V})$, $(W, c_{-,W})$ son objetos de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ un morfismo $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que para todo $X \in \mathcal{C}$

$$(f \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V} = c_{X,W}(\mathrm{id}_X \otimes f).$$

Teorema 4.2.2. *Sea* $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ *una categoría monoidal.*

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es una categoría. Si* $\mathcal{C}$ *es Abeliana (*$\Bbbk$*-lineal) entonces* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es Abeliana (*$\Bbbk$*-lineal).*
2. $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es una categoría monoidal con unidad* $(\mathbf{1}, l_- \circ r_-)$ *y si* $(V, c_{-,V})$, $(W, c_{-,W})$ *son objetos de* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *el producto tensorial*

$$(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) = (V\otimes W, c_{-,V\otimes W}) \tag{4.2.2}$$

   donde $c_{X,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)$ *para todo* $X \in \mathcal{C}$.
3. *La categoría* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es trenzada. La trenza de esta dada por*

$$\sigma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \to (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V}),$$

$$\sigma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})} = c_{V,W}.$$

Demostración. La parte (1) es un ejercicio. Veamos (2). Demostremos primero que el funtor dado por (4.2.2) está bien definido. Debemos demostrar que se satisface (4.2.1), es decir, que se verifica

$$c_{X\otimes Y,V\otimes W} = (c_{X,V\otimes W}\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V\otimes W})$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. Se tiene que $c_{X\otimes Y,V\otimes W}$ es igual a

$$\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_V\otimes c_{X\otimes Y,W})(c_{X\otimes Y,V}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (\mathrm{id}_V\otimes c_{X,W}\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_V\otimes \mathrm{id}_X\otimes c_{Y,W})(c_{X,V}\otimes \mathrm{id}_Y\otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (\mathrm{id}_V\otimes c_{X,W}\otimes \mathrm{id}_Y)(c_{X,V}\otimes \mathrm{id}_W\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X\otimes \mathrm{id}_V\otimes c_{Y,W})(\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V}\otimes \mathrm{id}_W)\\
&= (c_{X,V\otimes W}\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V\otimes W}).
\end{aligned}$$

La primera y la cuarta igualdad se deben a la definición de $c_{-,V\otimes W}$, la segunda igualdad se debe a (4.2.1), la tercera por la naturalidad de $\otimes$. Queda como ejercicio demostrar que si $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$, $g : (X, c_{-,X}) \to (Y, c_{-,Y})$ son morfismos en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ entonces $f\otimes g$ es un morfismo en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Además queda como ejercicio definir la asociatividad y demostrar los axiomas de categoría monoidal.

(3) La demostración de que $\sigma_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})}$ satisface los axiomas (4.0.1) y (4.0.2) sale inmediatamente de (4.2.1). $\square$

Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal, el funtor $P : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, $P(V, c_{-,Y}) = V$, para todo $(V, c_{-,Y}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un funtor monoidal estricto.

Lema 4.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor monoidal estricto pleno que es biyectivo a nivel de objetos. Entonces existe un único funtor monoidal estricto trenzado $\mathcal{Z}(F) : \mathcal{C} \to \mathcal{Z}(\mathcal{D})$ tal que $P \circ \mathcal{Z}(F) = F$.*

Demostración. Para cada $V \in \mathcal{C}$ definamos

$$\mathcal{Z}(F)(V) = (F(V), c_{-,F(V)}),$$

donde para todo $W \in \mathcal{D}$ se define

$$c_{W,F(V)} : W\otimes F(V) \to F(V)\otimes W, \quad c_{W,F(V)} = F(c_{F^{-1}(X),V}).$$

Si $f : V \to W$ es un morfismo entonces $\mathcal{Z}(F)(f) = F(f)$. Queda como ejercicio completar la demostración. $\square$

Corolario 4.2.4. *Para toda categoría monoidal trenzada $\mathcal{C}$ existe un único funtor monoidal trenzado $Z : \mathcal{C} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ tal que $P \circ Z = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.* $\square$

Ejercicio 4.2.5. Sea H un álgebra de Hopf. Demostrar que existe una equivalencia monoidal trenzada $\mathcal{Z}(\mathrm{Rep}\,(H)) \simeq \mathrm{Rep}\,(D(H))$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal donde el producto tensorial es exacto a derecha en cada variable. Sea $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ un álgebra conmutativa. En este caso, se puede equipar a la categoría $\mathcal{C}_A$ de un producto monoidal, de la misma forma que fue hecho en la sección 4.1.

Proposición 4.2.6. [**64**, Corollary 4.5] *Existe una equivalencia de categorías monoidales trenzadas* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})_A^0 \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{C}_A)$. $\square$

Ejercicio 4.2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita. Si $\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C}) = 1$ entonces $\mathcal{C} \simeq vect_{\Bbbk}$. Demostrar que $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \simeq vect_{\Bbbk}$ si y sólo si $\mathcal{C} \simeq vect_{\Bbbk}$.

Ejercicio 4.2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y G un grupo finito actuando monoidalmente sobre $\mathcal{C}$. Recordemos de la proposición 2.9.10, que existe un funtor biexacto $\overline{\otimes} : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Definimos $H : \mathrm{vect}_{\Bbbk} \to \mathcal{C}$ de la siguiente manera

$$H(V) = V\overline{\otimes}\mathbf{1},$$

para todo $V \in \mathrm{vect}_{\Bbbk}$. Si consideramos a $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ equipada con la acción trivial de G, entonces H resulta G-equivariante. Demostrar que $H^G : \mathrm{Rep}\,(G) \to \mathcal{C}^G$ define un funtor tensorial fiel que se factoriza a través de $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^G)$.

4.2.1. Categorías tensoriales factorizables. Sea $(\mathcal{C}, \sigma)$ una categoría monoidal trenzada. Se definen los funtores

$$I_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C}), \quad I_2 : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$$
$$I_1(X) = (X, \sigma_{-,X}), \quad I_2(X) = (X, \sigma^{-1}_{X,-}), \quad X \in \mathcal{C}.$$

Los funtores I_1, I_2 son exactos a derecha.

Lema 4.2.9. *Los funtores* I_1, I_2 *son funtores monoidales trenzados. En particular tenemos un funtor trenzado* $I : \mathcal{C} \boxtimes \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *que es la composición*

$$\mathcal{C} \boxtimes \overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{I_1 \boxtimes I_2} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \boxtimes \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}} \mathcal{Z}(\mathcal{C}).$$

Demostración. La demostración de que ambos funtores I_1, I_2 son monoidales trenzados es inmediata. Por la proposición 4.0.9 el funtor $\otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \boxtimes \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es trenzado, y por lo tanto, la composición es un funtor monoidal trenzado. $\square$

Definición 4.2.10. [**35**] Una categoría tensorial trenzada se dice *factorizable* si el funtor $I : \mathcal{C} \boxtimes \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ del Lema 4.2.9 es una equivalencia de categorías monoidales. Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ se dice *modular* si es una categoría de fusión y factorizable.

Proposición 4.2.11. [**35**, Prop. 4.4] *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría tensorial finita. Entonces* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es una categoría tensorial factorizable. En particular, si* $\mathcal{C}$ *es de fusión entonces* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *es modular.* $\square$

Capítulo 5

Representaciones de categorías tensoriales

5.1. Módulos sobre una categoría tensorial

Vamos a fijar $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. En esta sección todos los funtores serán aditivos, $\Bbbk$-lineales.

Definición 5.1.1. Un $\mathcal{C}$-*módulo* a izquierda o una representación de $\mathcal{C}$, es una colección $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ donde

- $\mathcal{M}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal;
- $\overline{\otimes}$ es un funtor exacto en cada variable $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$;
- $\{m_{X,Y,M} : (X \otimes Y)\overline{\otimes}M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M) : X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}\}$, y $\{l_M : \mathbf{1}\overline{\otimes}M \to M : M \in \mathcal{M}\}$ son isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$

$$m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}\, m_{X\otimes Y,Z,M} = (\mathrm{id}_X \otimes m_{Y,Z,M})\, m_{X,Y\otimes Z,M}\, (a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M), \tag{5.1.1}$$

$$(\mathrm{id}_X\overline{\otimes}l_M)m_{X,\mathbf{1},M} = r_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M. \tag{5.1.2}$$

Es decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& ((X\otimes Y)\otimes Z)\overline{\otimes}M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}id"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\overline{\otimes}M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"] & & (X\otimes Y)\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}"'] \\
X\overline{\otimes}((Y\otimes Z)\overline{\otimes}M) \arrow[rr, "id\overline{\otimes}m_{Y,Z,M}"] & & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M))
\end{tikzcd} \tag{5.1.3}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbf{1})\overline{\otimes}M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\overline{\otimes}id"'] & & X\overline{\otimes}(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \arrow[dl, "id\overline{\otimes}l_M"] \\
& X\overline{\otimes}M. &
\end{tikzcd} \tag{5.1.4}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Observación 5.1.2. Al funtor $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ le llamaremos la *acción* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}$.

Definición 5.1.3. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ $\mathcal{C}$-módulos a izquierda. Un *funtor de $\mathcal{C}$-módulos* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es un par (F, c), donde $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor y $c_{X,M} : F(X\overline{\otimes}M) \to X\overline{\otimes}F(M)$ es una familia de isomorfismos naturales tales que

$$m_{X,Y,F(M)}c_{X\otimes Y,M} = (\mathrm{id}_X\overline{\otimes}c_{Y,M})c_{X,Y\overline{\otimes}M}F(m_{X,Y,M}), \tag{5.1.5}$$

$$l_{F(M)}c_{\mathbf{1},M} = F(l_M), \tag{5.1.6}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ y para todo $M \in \mathcal{M}$.

Definición 5.1.4. Sean $(F, c), (G, d) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dos funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Una *transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos* es una transformación natural $\theta : F \to G$ que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X\overline{\otimes}M) & \xrightarrow{\theta_{X\overline{\otimes}M}} & G(X\overline{\otimes}M) \\ {\scriptstyle c_{X,M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{X,M}} \\ X\overline{\otimes}F(M) & \xrightarrow[\mathrm{id}_X\overline{\otimes}\theta_M]{} & X\overline{\otimes}G(M), \end{array} \tag{5.1.7}$$

sea conmutativo para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. La categoría de los funtores de $\mathcal{C}$-módulos entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es denotada por $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Diremos que los funtores (F, c) y (G, d) son *equivalentes como funtores de $\mathcal{C}$-módulos*, y se denotará $(F, c) \simeq (G, d)$, si existe un isomorfismo natural $\theta : F \to G$ que es de $\mathcal{C}$-módulos.

Lema 5.1.5. *La composición horizontal y vertical de transformaciones naturales de $\mathcal{C}$-módulos es nuevamente una transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos.* □

Si $(F, c) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ y $(G, d) : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ son funtores de $\mathcal{C}$-módulos, entonces $(G \circ F, b) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos, donde $b_{X,M} := d_{X,F(M)}G(c_{X,M})$, para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}_1$.

Dos $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ son *equivalentes* si existen funtores $(F, c) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}, (G, d) : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$-módulos tales que $(F, c) \circ (G, d) \simeq \mathrm{Id}\,, (G, d) \circ (F, c) \simeq \mathrm{Id}\,.$

Observación 5.1.6. En la literatura los $\mathcal{C}$-módulos son llamados también *categorías módulo sobre $\mathcal{C}$*, o *representaciones de $\mathcal{C}$*.

Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ dos $\mathcal{C}$-módulos. La suma directa $\mathcal{M}_1 \bigoplus \mathcal{M}_2$ de categorías es nuevamente un $\mathcal{C}$-módulo donde la acción es

$$\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2, \quad X\overline{\otimes}(M, N) = (X\overline{\otimes}M, X\overline{\otimes}N).$$

Definición 5.1.7. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo.

- $\mathcal{M}$ se dice *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no nulas.
- Un *$\mathcal{C}$-submódulo* de $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{N}$ que es una subcategoría Serre de $\mathcal{M}$ tal que el funtor inclusión $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ es de $\mathcal{C}$-módulos.

- Una categoría módulo se dice *simple* si no es nula y no posee $\mathcal{C}$-submódulos no triviales.

Ejercicio 5.1.8. Demostrar que $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-módulo indescomponible. (Aquí se debe usar que el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple).

Ejercicio 5.1.9. Demostrar que toda categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ es equivalente a una *estricta*, es decir una categoría módulo donde

$$(X \otimes Y)\overline{\otimes}M = X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M), \quad \mathbf{1}\overline{\otimes}M = M$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$

Lema 5.1.10. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo. Sean $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$ y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Si X, M son objetos no nulos entonces $X\overline{\otimes}M$ es no nulo.*
2. *Si f es no nulo y $M \neq 0$ entonces $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ es un morfismo no nulo.*

Demostración. 1. Asumamos que $X\overline{\otimes}M = 0$. Entonces el morfismo

$$M \xrightarrow{l_M} \mathbf{1}\overline{\otimes}M \xrightarrow{coev_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} ({}^*X\otimes X)\overline{\otimes}M \xrightarrow{m_{{}^*X,X,M}} {}^* X\overline{\otimes}(X\overline{\otimes}M) = 0,$$

es el morfismo nulo. Como $coev_X$ es un monomorfismo y $\overline{\otimes}$ es un funtor biexacto, entonces $coev_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ es un monomorfismo y por lo tanto la composición anterior es un monomorfismo $M \to 0$. Esto implica que $M = 0$, lo cual es un absurdo.

2. Asumamos que $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M = 0$ y sea $k : K \to X$ es núcleo de f. Vamos a demostar que k es un isomorfismo, lo cual implicará que $f = 0$. Como $\overline{\otimes}$ es biexacto entonces $k\overline{\otimes}\mathrm{id}_M = \mathrm{Ker}\,(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$. Esto implica que $k\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ es un isomorfismo. Sea $q : X \to Q$ el conúcleo de k, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{q} Q \to 0.$$

Por la exactitud de $\overline{\otimes}$, la sucesión

$$0 \to K\overline{\otimes}M \xrightarrow{k\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} X\overline{\otimes}M \xrightarrow{q\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} Q\overline{\otimes}M \to 0$$

es exacta. Como $k\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ es un isomorfismo $\mathrm{Ker}\,(q\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = X\overline{\otimes}M$, luego $q\overline{\otimes}\mathrm{id}_M = 0$. Pero, nuevamente usando la exactitud de $\overline{\otimes}$, $q\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ es un epimorfismo, lo cual implica que $Q\overline{\otimes}M = 0$. Entonces $Q = 0$ y así k es un epimorfismo. $\square$

Lema 5.1.11. *Las siguientes nociones son equivalentes.*

(i) *Categorías módulo $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ sobre $\mathcal{C}$.*
(ii) *Funtores tensoriales $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathrm{End}_e(\mathcal{M})$ exactos y fieles.*

Demostración. Sea $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ un $\mathcal{C}$-módulo. Definamos $F : \mathcal{C} \to \mathrm{End}_e(\mathcal{M})$ por $F(X)(M) = X\overline{\otimes}M$ para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. El funtor $F(X)$ es exacto para todo $X \in \mathcal{C}$ debido a la exactitud de $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en el segundo argumento y F es exacto por la exactitud de $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en el primer argumento. Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ sea

$$\zeta_{X,Y} : F(X) \circ F(Y) \to F(X\otimes Y),$$

definida por $(\zeta_{X,Y})_M = m^{-1}_{X,Y,M}$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Definamos $\phi : \mathrm{Id} \to F(\mathbf{1})$ por $\phi_M = l_M^{-1}$. La identidad (3.1.3) es equivalente a (5.1.1) y la identidad (3.1.5) es equivalente a (5.1.2). Luego $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C} \to \mathrm{End}_e(\mathcal{M})$ es tensorial. Demostremos que F es fiel. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $F(f) = 0$. Tomemos $M \neq 0$, entonces $0 = F(f)(\mathrm{id}_M) = f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M$. Por el Lema 5.1.10 (2) debe ser que $f = 0$. La construcción recíproca queda como ejercicio para el lector. □

Coloquialmente, el resultado anterior, nos dice que los funtores de fibra para una categoría tensorial están en correspondencia biyectiva con representaciones de rango 1. El siguiente resultado será usado más adelante.

Lema 5.1.12. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo y $X \in \mathcal{C}$ un objeto no nulo. Si*

$$0 \to X\overline{\otimes}M \xrightarrow{id_X\overline{\otimes}f} X\overline{\otimes}N \xrightarrow{id_X\overline{\otimes}g} X\overline{\otimes}T \to 0$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \to 0$$

es exacta.

Demostración. Por ser la primer sucesión exacta, se tiene que $\ker(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} g) = \mathrm{id}_X \overline{\otimes} f$. Como la acción $\overline{\otimes}$ es un funtor exacto en cada variable, se tiene que

$$\mathrm{id}_X \overline{\otimes} f = \ker(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} g) = \mathrm{id}_X \overline{\otimes} \ker(g).$$

Por lo tanto $\mathrm{id}_X \overline{\otimes}(f - \ker(g)) = 0$. Por el Lema 5.1.10 (2) se tiene $\ker(g) = f$. Análogamente se tiene que $\mathrm{coKer}\,(f) = g$.

□

Ejercicio 5.1.13. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ $\mathcal{C}$-módulos y $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un funtor de módulos. Demostrar que si $G : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ es un adjunto a derecha o a izquierda de F entonces G posee estructura de funtor de módulos tal que la unidad y counidad de la adjunción son transformaciones naturales de módulos.

Ejemplo 5.1.14. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales finitas estrictas y $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial exacto. La categoría $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{C}$-módulo via F como sigue:

$$\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad X\overline{\otimes}M = F(X) \otimes M,$$

para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{D}$. Si $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in M$ los morfismos de asociatividad y unidad son

$$m_{X,Y,M} : F(X \otimes Y) \otimes M \to F(X) \otimes (F(Y) \otimes M), \quad m_{X,Y,M} = (\xi^{-1}_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_M),$$

$$l_M : F(\mathbf{1}) \otimes M \to M, \quad l_M = l^{\mathcal{D}}_M(\phi^{-1} \otimes \mathrm{id}_M).$$

Ejemplo 5.1.15. El siguiente ejemplo es una gerneralización del ejemplo 5.1.14. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales, $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial exacto y $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m)$

un $\mathcal{D}$-módulo. Denotaremos por $\mathcal{M}^F$ el $\mathcal{C}$-módulo $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F)$ cuya categoría Abeliana subyacente es $\mathcal{M}$ y con acción, morfismos de asociatividad y unidad dados por:

$$X\overline{\otimes}^F M = F(X)\overline{\otimes}M, \quad m^F_{X,Y,M} = m_{F(X),F(Y),M}(\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_M),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

Ejercicio 5.1.16. Mantengamos la misma notación del ejemplo 5.1.15. Demostrar que si $\mathcal{M}^F$ es un $\mathcal{C}$-módulo indescomponible entonces $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}$-módulo indescomponible.

Ejemplo 5.1.17. Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra entonces la categoría de A-módulos a derecha $\mathcal{C}_A$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. La acción $\overline{\otimes} : \mathcal{C}\times\mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_A$ es el producto tensorial de $\mathcal{C}$. Si $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{C}_A$ la acción a derecha de A en $X\otimes M$ es sobre el segundo tensorando.

Ejemplo 5.1.18. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y $(Z, \sigma_{Z,-})$ es un objeto en el centro $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ entonces el funtor $F_Z : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $F_Z(M) = Z\overline{\otimes}M$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos. La estructura de funtor de módulo está dada por

$$c_{X,M} : F_Z(X\overline{\otimes}M) \to X\overline{\otimes}F_Z(M), \quad c_{X,M} = m_{X,Z,M}(\sigma^{-1}_{Z,X}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)m^{-1}_{Z,X,M},$$

para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$.

Ejercicio 5.1.19. Toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita $\mathcal{C}$ es un $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$-módulo de una forma canónica. Aquí se debe usar la Proposición 2.9.10.

Lema 5.1.20. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo y $M, N \in \mathcal{M}$, $X, Y \in \mathcal{C}$. Existen isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, Y\overline{\otimes}N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Y^*\overline{\otimes}M, N).$$

$\square$

5.1.1. $\mathcal{C}$-módulos a derecha y bimódulos. La definición de $\mathcal{C}$-módulos a derecha es completamente similar a la de módulo a izquierda. Por completitud la repasaremos. También introduciremos la noción de bimódulo.

Una *categoría módulo a derecha* sobre $\mathcal{C}$, o un *$\mathcal{C}$-módulo a derecha* es una categoría Abeliana $\mathcal{M}$ equipada con un bifuntor exacto $\overline{\otimes} : \mathcal{M}\times\mathcal{C} \to \mathcal{M}$ e isomorfismos naturales $\widetilde{m}_{M,X,Y} : M\overline{\otimes}(X\otimes Y) \to (M\overline{\otimes}X)\overline{\otimes}Y$, $r_M : M\overline{\otimes}\mathbf{1} \to M$ tales que

$$\widetilde{m}_{M\overline{\otimes}X,Y,Z}\,\widetilde{m}_{M,X,Y\otimes Z}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}a_{X,Y,Z}) = (\widetilde{m}_{M,X,Y}\overline{\otimes}\mathrm{id}_Z)\,\widetilde{m}_{M,X\otimes Y,Z}, \tag{5.1.8}$$

$$(r_M\otimes\mathrm{id}_X)\widetilde{m}_{M,\mathbf{1},X} = \mathrm{id}_M\otimes l_X. \tag{5.1.9}$$

Lema 5.1.21. *Si $(\mathcal{M}, m, l)$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda entonces $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}^{rev}$-módulo a derecha. Además $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ es un $\mathcal{C}$-módulo a derecha.*

Demostración. Asumiremos que $\mathcal{C}$ es estricta. La acción a derecha de $\mathcal{C}^{rev}$ en $\mathcal{M}$ es $\overline{\otimes}^r : \mathcal{M}\times\mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $M\overline{\otimes}^r X = X\overline{\otimes}M$. Los isomorfismos de asociatividad están dados por

$$\widetilde{m}_{M,X,Y} = m_{Y,X,M},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. La acción a derecha de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}^{\rm op}$ es

$$\overline{\otimes}^{\rm op}: \mathcal{M}^{\rm op}\times\mathcal{C}\to\mathcal{M}^{\rm op}, \quad M\overline{\otimes}^{\rm op}X = X^*\overline{\otimes}M,$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Denotemos por $\alpha_{X,Y}: (X\otimes Y)^* \to Y^*\otimes X^*$ el isomorfismo del funtor monoidal de la Proposición 3.5.6 (1). Los isomorfismos de asociatividad están dados por

$$\widetilde{m}_{M,X,Y} = (\alpha_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_M) m^{-1}_{Y^*,X^*,M},$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Demostremos que la ecuación (5.1.8) se verifica. El lado izquierdo de (5.1.8) en este caso es igual a

$$\begin{aligned}&= \alpha_{X,Y\otimes Z} m^{-1}_{(Y\otimes Z)^*,X^*,M}(\alpha_{Y,Z}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{X^*\overline{\otimes}M}) m^{-1}_{Y^*,X^*,M}\\ &= \alpha_{X,Y\otimes Z}(\alpha_{Y,Z}\otimes \mathrm{id}_{X^*\overline{\otimes}M}) m^{-1}_{Z^*\otimes Y^*,X^*,M} m^{-1}_{Y^*,X^*,M}.\end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a la naturalidad de m. El lado derecho de (5.1.8) en este caso es igual a

$$\begin{aligned}&= (\alpha_{Y,Z}\otimes\mathrm{id}_M) m^{-1}_{Z^*,(X\otimes Y)^*,M}(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes\alpha_{X,Y}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes m^{-1}_{Y^*,X^*,M})\\ &= (\alpha_{Y,Z}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes\alpha_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_M) m^{-1}_{Z^*,Y^*\otimes X^*,M}(\mathrm{id}_{Z^*}\otimes m^{-1}_{Y^*,X^*,M}).\end{aligned}$$

La segunda igualdad, nuevamente, se debe a la naturalidad de m. Ambas expresiones son iguales usando que el funtor de dualidad es monoidal y usando (5.1.1). □

Sea $\mathcal{D}$ otra categoría tensorial. Una categoría $(\mathcal{C},\mathcal{D})-$*bimódulo* es una categoría Abeliana $\mathcal{M}$ que es una $\mathcal{C}$ categoría módulo a izquierda, una $\mathcal{D}$-categoría módulo a derecha, y está munida de isomorfismos naturales $\{\gamma_{X,M,Y}: (X\overline{\otimes}M)\overline{\otimes}Y :\to X\overline{\otimes}(M\overline{\otimes}Y), X\in\mathcal{C}, Y\in\mathcal{C}', M\in\mathcal{M}\}$ que satisfacen ciertos axiomas. Para más detalles nos referimos a [**43**, Prop. 2.12]. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías tensoriales finitas, un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo es lo mismo que una categoría $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{rev}$-módulo. Aquí $\boxtimes$ denota el producto tensorial de Deligne.

Lema 5.1.22. *Sea $(\mathcal{C},\sigma)$ una categoría tensorial trenzada y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. Entonces $\mathcal{M}$ posee una estructura de $\mathcal{C}$-módulo a derecha que lo hace un $(\mathcal{C},\mathcal{C})-$bimódulo.*

Demostración. La acción $\mathcal{M}\times\mathcal{C}\to\mathcal{M}$ está dada por $M\overline{\otimes}X = X\overline{\otimes}M$ para todo $X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}$. Los isomorfismos de asociatividad $\widetilde{m}_{M,X,Y}: M\overline{\otimes}(X\otimes Y)\to(M\overline{\otimes}X)\overline{\otimes}Y$, están dados por

$$\widetilde{m}_{M,X,Y} = m_{Y,X,M}(\sigma_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_M),$$

para todo $X, Y\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}$. Queda como ejercicio demostrar que con estas acciones $\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{C})-$bimódulo. □

5.1.2. Representaciones sobre álgebras de Hopf. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y (K, λ) un H-comódulo álgebra a izquierda. Entonces la categoría ${}_K\mathfrak{m}$, es una categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}\,(H)$ como sigue:

$$\otimes : \mathrm{Rep}\,(H) \times {}_K\mathfrak{m} \to {}_K\mathfrak{m},$$
$$(X, V) \mapsto X \otimes_{\Bbbk} V,$$

y la acción de K sobre $X \otimes_{\Bbbk} V$ es $k \cdot (x \otimes v) := k_{(-1)} \cdot x \otimes k_{(0)} \cdot v$. Los morfismos de asociatividad y unidad son los triviales.

Proposición 5.1.23. *${}_K\mathfrak{m}$ es una categoría módulo indescomponible si y sólo si no existen ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$.*

Demostración. Asumamos que K posee ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$. Como I, J son ideales H-subcomódulos, las álgebras cociente K/I y K/J son H-comódulos álgebras a izquierda. Las categorías módulo ${}_{K/I}\mathfrak{m}$ y ${}_{K/J}\mathfrak{m}$ son subcategorías módulo de ${}_K\mathfrak{m}$. Dado $M \in {}_K\mathfrak{m}$, sean $M_1 = \{m \in M : I.m = 0\}$, $M_2 = \{m \in M : J.m = 0\}$; claramente, $M_1 \in {}_{K/I}\mathfrak{m}$ y $M_2 \in {}_{K/J}\mathfrak{m}$. Descomponemos $1 = i + j$, $i \in I$, $j \in J$. Sea $m \in M$; entonces $m = im + jm$. Ya que $IJ \subset I \cap J = 0$, $jm \in M_1$, y similarmente $im \in M_2$, por lo tanto $M = M_1 + M_2$. También, si $m \in M_1 \cap M_2$, $m = 0$. Esto muestra que $M = M_1 \oplus M_2$, por lo tanto ${}_K\mathfrak{m} \simeq {}_{K/I}\mathfrak{m} \times {}_{K/J}\mathfrak{m}$.

Asumamos que ${}_K\mathfrak{m} \simeq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, donde $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son subcategorías módulo de ${}_K\mathcal{M}$. Para todo $M \in {}_K\mathfrak{m}$ existen $M_1 \in \mathcal{M}_1$ y $M_2 \in \mathcal{M}_2$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Si $\varphi : M \to N$ es un morfismo en ${}_K\mathfrak{m}$ entonces $\varphi(M_1) \subseteq N_1$, $\varphi(M_2) \subseteq N_2$.

Considerando $K \in {}_K\mathfrak{m}$, existen $J \in \mathcal{M}_1$, $I \in \mathcal{M}_2$ tales que $K = J \oplus I$. Claramente I y J son H-subcomódulo ideales a izquierda de K. Sea $j \in J$ y sea $\eta_j : K \to K$ la expansión de j, es decir $\eta_j(x) = xj$, $x \in K$. Como η_j es un morfismo de K-módulos, $\eta_j(I) \subseteq I$. Luego, $IJ \subseteq I$ y I son ideales biláteros. Similarmente, J es un ideal bilátero.

Notar que estas construcciones son una la inversa de la otra.

$\square$

Otra construcción de representaciones de $\mathrm{Rep}\,(H)$ provienen de twists. Sea $J \in H \otimes_{\Bbbk} H$ un twist para H. Por el Lema 3.2.2 existe un funtor tensorial $(F, \xi^J) : \mathrm{Rep}\,(H) \to vect_{\Bbbk}$. De acuerdo al ejemplo 5.1.14 existe una categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}\,(H)$, que denotaremos por $\mathcal{M}_J$, cuya categoría Abeliana subyacente es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, en particular es de rango 1.

Si J^x es un twist equivalente a J entonces las categorías módulos $\mathcal{M}_J, \mathcal{M}_{J^x}$ son equivalentes. La equivalencia la da el funtor $(G, c) : \mathcal{M}_J \to \mathcal{M}_{J^x}$, donde $G(M) = M$ y para todo $V \in \mathrm{Rep}\,(H), M \in \mathcal{M}_J$, los isomorfismos $c_{V,M} : V \otimes_{\Bbbk} M \to V \otimes_{\Bbbk} M$ están definidos por

$$c_{V,M}(v \otimes m) = x^{-1} \cdot v \otimes m,$$

$v \in V, m \in M$. En este caso la identidad (5.1.1) es equivalente a (6.3.5).

En lo que sigue estudiaremos los funtores de $\mathrm{Rep}\,(H)$-módulos entre las categorías módulo ${}_R\mathfrak{m}$ y ${}_S\mathfrak{m}$, donde R y S son dos H-comódulos álgebras a izquierda sobre H. Denotaremos las estructuras de comódulos en R y S por $\lambda_R : R \to H\otimes_{\Bbbk}R$ y $\lambda_S : S \to H\otimes_{\Bbbk}S$ respectivamente.

Definición 5.1.24. Sea P un (S,R)-bimódulo y también un H-comódulo a izquierda vía $\lambda : P \to H\otimes_{\Bbbk}P$. Diremos que P es un (S,R)-*bimódulo equivariante* si λ es un morfismo de R-módulos a derecha y de S-módulos a izquierda, donde la acción de R y S sobre $H\otimes_{\Bbbk}P$ vienen dadas vía λ_R y λ_S respectivamente. La categoría de bimódulos equivariantes se denotará por ${}^H_S\mathfrak{m}_R$.

Definamos el funtor $\mathcal{F} : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ por $\mathcal{F}(V) = P\otimes_R V$ con estructura de S-módulo sobre el primer tensorando. Además para cada $X \in \mathrm{Rep}\,(H)$, $V \in {}_R\mathfrak{m}$ sea $c_{X,V} : P\otimes_R(X\otimes_{\Bbbk}V) \to X\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R V)$ el isomorfismo dado por

$$c_{X,V}(m\otimes x\otimes v) = m_{(-1)}\cdot x\otimes m_{(0)}\otimes v, \tag{5.1.10}$$

para todo $m \in P, x \in X, v \in V$. Se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.1.25. *Si P es un bimódulo equivariante entonces el funtor $(\mathcal{F}, c)$ es un funtor de* $\mathrm{Rep}\,(H)$*-módulos.*

Demostración. La buena definición del isomorfismo natural c es consecuencia de que λ es de R-módulos a derecha. Además para todo $X \in \mathrm{Rep}\,(H), V \in {}_R\mathfrak{m}$ el morfismo $c_{X,V}$ es un morfismo en ${}_S\mathfrak{m}$ ya que λ es un morfismo de S-módulos a izquierda. Las identidades (5.1.5) y (5.1.6) son inmediatas. □

5.2. Twists dinámicos y categorías módulo

5.2.1. Extensiones dinámicas de categorías tensoriales. Dada una categoría tensorial $\mathcal{C}$ y un $\mathcal{C}$-módulo, en el trabajo [**24**] los autores introducen una nueva categoría tensorial que denotaremos por $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$. Esta categoría tensorial es llamada la *extensión dinámica* de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{M}$. Otra referencia es [**54**].

Los objetos de la categoría $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$ son los funtores $F_X : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $F_X(M) = X\overline{\otimes}M$, para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Los morfismos son las transformaciones naturales. Notar que para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ existe una transformación natural $\eta_f : F_X \to F_Y$, dada por

$$(\eta_f)_M : X\overline{\otimes}M \to Y\overline{\otimes}M, \quad (\eta_f)_M = f\otimes \mathrm{id}_M,$$

para todo $M \in \mathcal{M}$.

Lema 5.2.1. *La categoría $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$ es Abeliana $\Bbbk$-lineal finita.* □

Describamos la estructura monoidal de $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$. El producto tensorial es $F_X\otimes F_Y = F_{X\otimes Y}$, $X, Y \in \mathcal{C}$, y los isomorfismos de asociatividad son

$$\widetilde{a}_{X,Y,Z} : (F_X\otimes F_Y)\otimes F_Z \to F_X\otimes(F_Y\otimes F_Z), \quad (\widetilde{a}_{X,Y,Z})_M = (a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_M),$$

para todo $M \in \mathcal{M}$. Para todo $X \in \mathcal{C}$ los isomorfismos de unidad a izquierda y derecha están dados por

$$l_X : F_X \otimes F_{\mathbf{1}} \to F_X, \quad r_X : F_{\mathbf{1}} \otimes F_X \to F_X,$$

donde $l_{X,M} = l_X \otimes \mathrm{id}_M$ y $r_X = r_X \otimes \mathrm{id}_M$ para todo $M \in \mathcal{M}$.

Si $\eta : F_X \to F_Z$, $\phi : F_Y \to F_W$ son dos transformaciones naturales, su producto tensorial es $\eta \otimes \phi : F_{X \otimes Y} \to F_{Z \otimes W}$, el cual está dado por

$$(\eta \otimes \phi)_M = m^{-1}_{ZWM} \eta_{W \overline{\otimes} M} (\mathrm{id}_X \otimes \phi_M) m_{XYM}, \tag{5.2.1}$$

para todo $M \in \mathcal{M}$. El objeto unidad es $F_{\mathbf{1}}$.

Observación 5.2.2. Para todo $X, Y, U, V \in \mathcal{C}$ y $f : X \to Y, g : U \to V$,

$$(\eta_f \otimes \eta_g)_M = (f \otimes g) \overline{\otimes} \mathrm{id}_M, \tag{5.2.2}$$

para todo $M \in \mathcal{M}$.

Proposición 5.2.3. *Si existe una equivalencia de $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ entonces existe una equivalencia monoidal $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{N} \ltimes \mathcal{C}$.*

Demostración. Asumamos que $(\mathcal{F}, c) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y $(\mathcal{G}, d) : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ es un par de funtores de $\mathcal{C}$-módulos que dan la equivalencia. Sea $\theta : \mathrm{Id} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ una transformación natural de funtores de módulo, es decir que θ satisface

$$c_{X,\mathcal{G}(N)}\, \mathcal{F}(d_{X,N})\, \theta_{X \overline{\otimes} N} = \mathrm{id}_X \otimes \theta_N, \tag{5.2.3}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$, $N \in \mathcal{N}$.

Definamos $\Phi : \mathcal{M} \ltimes \mathcal{C} \to \mathcal{N} \ltimes \mathcal{C}$ al funtor $\Phi(F_X) = \widetilde{F}_X$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Aquí denotamos $\widetilde{F}_X : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ al funtor $\widetilde{F}_X(N) = X \overline{\otimes} N$, para todo $N \in \mathcal{N}$. Si $X, Y \in \mathcal{C}$ y $\eta : F_X \to F_Y$ es una transformación natural entonces $\Phi(\eta) : \widetilde{F}_X \to \widetilde{F}_Y$ está dada por la composición

$$\begin{aligned} X \overline{\otimes} N &\xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \theta_N} X \overline{\otimes} \mathcal{F}(\mathcal{G}(N)) \xrightarrow{c^{-1}_{X,\mathcal{G}(N)}} \mathcal{F}(X \overline{\otimes} \mathcal{G}(N)) \to \\ &\xrightarrow{\mathcal{F}(\eta_{\mathcal{G}(N)})} \mathcal{F}(Y \overline{\otimes} \mathcal{G}(N)) \xrightarrow{\mathcal{F}(d^{-1}_{Y,N})} \mathcal{F}\mathcal{G}(Y \overline{\otimes} N) \xrightarrow{\theta^{-1}_{Y \overline{\otimes} N}} Y \overline{\otimes} N, \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

for all $N \in \mathcal{N}$. El funtor monoidal Φ es estricto. Es decir que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ los isomorfismos naturales $\xi : \Phi(F_X \otimes F_Y) \to \Phi(F_X) \otimes \Phi(F_Y)$ vienen dados por

$$\xi_{X,Y,N} : \widetilde{F}_{X \otimes Y}(N) \to \widetilde{F}_{X \otimes Y}(N), \quad \xi_{X,Y,N} = \mathrm{id}_{X \otimes Y} \otimes \mathrm{id}_N,$$

para todo $N \in \mathcal{N}$. Debemos verificar que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $N \in \mathcal{N}$ la siguiente identidad se satisface:

$$(a_{XYZ} \otimes \mathrm{id}_N)(\xi_{XY} \mathrm{id}_Z)_N\, \xi_{X \otimes Y, Z, N} = (\mathrm{id}_X \otimes \xi_{YZ})_N \Phi(a_{XYZ} \otimes \mathrm{id}_N). \tag{5.2.5}$$

El lado izquierdo de (5.2.5) es igual a $(a_{XYZ}\otimes \mathrm{id}_N)$, y el lado derecho es igual a $\Phi(a_{XYZ}\otimes \mathrm{id}_N)$, y usando (5.2.4), es igual a

$$\begin{aligned}&\theta^{-1}_{(X\otimes(Y\otimes Z))\overline{\otimes}N}\ \mathcal{F}(d^{-1}_{X\otimes(Y\otimes Z),N})\ (a_{XYZ}\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\mathcal{G}(N))})c^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z,\mathcal{G}(N)}(\mathrm{id}\otimes\theta_N)\\ &= (a_{XYZ}\otimes \mathrm{id}_N)\theta^{-1}_{((X\otimes Y)\otimes Z)\overline{\otimes}N}\ \mathcal{F}(d^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z,N})c^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z,\mathcal{G}(N)}(\mathrm{id}\otimes\theta_N)\\ &= (a_{XYZ}\otimes \mathrm{id}_N).\end{aligned}$$

La última igualdad sigue de (5.2.3). □

Sea $(\mathcal{M}, m, l)$ un $\mathcal{C}$-módulo. La siguiente definición es atribuida a Donin y Mudrov, ver [**24**, Definition 5.2].

Definición 5.2.4. Un *twist dinámico* para la extensión $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$ es un cociclo J en $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$ (ver definición 3.6.1) tal que J conmuta con los morfismos en $\mathcal{C}$, es decir

$$J_{Z,W}(\eta_f\otimes \eta_g) = (\eta_f\otimes \eta_g)J_{X,Y}, \tag{5.2.6}$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$.

Más explícitamente, un twist dinámico es una familia de isomorfismos

$$J_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\overline{\otimes}M \to (X\otimes Y)\overline{\otimes}M,$$

$X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$ tal que

$$\begin{aligned}&(a_{XYZ}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)J_{X\otimes Y,Z,M}m^{-1}_{X\otimes Y,Z,M}J_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}m_{X\otimes Y,Z,M} =\\ &\quad= J_{X,Y\otimes Z,M}m^{-1}_{X,Y\otimes Z,M}(\mathrm{id}_X\otimes J_{Y,Z,M})m_{X,Y\otimes Z,M}(a_{XYZ}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M),\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

$$(l_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)J_{X,\mathbf{1},M} = (l_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M),\quad J_{\mathbf{1},X,M}(r_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = (r_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M), \tag{5.2.8}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

La ecuación (5.2.6) implica que

$$J_{Z,W,M}m^{-1}_{Z,W,M}(f\otimes(g\otimes \mathrm{id}_M))m_{X,Y,M} = m^{-1}_{Z,W,M}(f\otimes(g\otimes \mathrm{id}_M))m_{X,Y,M}J_{X,Y,M},$$

para cualquier morfismo $f : X \to Z$, $g : Y \to W$ en $\mathcal{C}$, y todo $M \in \mathcal{M}$.

Ejemplo 5.2.5. Si H es un álgebra de dimensión finita y $A \subseteq G(H)$ es un subgrupo Abeliano de los elementos de tipo grupo de H entonces un twist dinámico para la extensión ${}_A\mathfrak{m} \ltimes \mathrm{Rep}\,(H)$ coincide con la noción de twist dinámico presentada en la Definición 6.3.1.

5.2.2. Representaciones provienentes de twists dinámicos. Si J es un twist dinámico para la categoría $\mathcal{M}\ltimes\mathcal{C}$ denotaremos por $\mathcal{M}^{(J)}$ la categoría Abeliana subyacente $\mathcal{M}$ con la siguiente estructura de categoría módulo; la acción de $\mathcal{C}$ es la misma que la de $\mathcal{M}$ y los isomorfismos de asociatividad son

$$\widehat{m}_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\overline{\otimes}M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M),\quad \widehat{m}_{X,Y,M} = m_{X,Y,M}J^{-1}_{X,Y,M},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

La demostración del siguiente resultado es inmediata.

Proposición 5.2.6. *Sea J un twist dinámico para la categoría $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C}$.*
1. $\mathcal{M}^{(J)}$ *es un $\mathcal{C}$-módulo. Si $\mathcal{M}$ es indescomponible entonces también lo es $\mathcal{M}^{(J)}$.*
2. *Existe una equivalencia tensorial $\mathcal{M}^{(J)} \ltimes \mathcal{C} \simeq (\mathcal{M} \ltimes \mathcal{C})^J$.* □

La idea de usar el lenguaje de categorías módulo en el estudio de los twists dinámicos es debida a V. Ostrik, ver [**61**]. En *loc. cit.* el autor relaciona la clasificación de categorías módulo sobre $\mathrm{Rep}\,(G)$, donde G es un grupo finito, con los resultados obtenidos por Etingof y Nikshych sobre la clasificación de twists dinámicos sobre el álgebra de grupo $\Bbbk G$ [**30**]. Está idea fue usada luego en [**55**] para describir twists dinámicos sobre un álgebra de Hopf de dimensión finita arbitraria.

5.3. Categorías módulo exactas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. De ahora en adelante se asumirá que toda categoría módulo $\mathcal{M}$ sobre una categoría tensorial posee las siguientes propiedades:

- $\mathcal{M}$ posee una cantidad finita de clases de equivalencia de objetos simples;
- para todo $M, N \in \mathcal{M}$ las dimensiones de los espacios vectoriales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N)$ son finitas;
- todo objeto de $\mathcal{M}$ es de longitud finita.

Definición 5.3.1 ([**36**]). Una categoría módulo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$ se dice *exacta* si para todo objeto proyectivo $P \in \mathcal{C}$, el objeto $P \overline{\otimes} M \in \mathcal{M}$ es proyectivo para todo $M \in \mathcal{M}$.

Ejemplo 5.3.2.
- Toda categoría módulo semisimple es exacta.
- Toda categoría tensorial es una categoría módulo exacta sobre si misma.
- Suma directa de categorías módulo exactas es exacta.

Fijemos la siguiente notación. Si $(P(\mathbf{1}), f)$ es el cubrimiento proyectivo del objeto unidad y $M \in \mathcal{M}$, denotamos

$$p_M : P(\mathbf{1}) \overline{\otimes} M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} \mathbf{1} \overline{\otimes} M \xrightarrow{\simeq} M. \tag{5.3.1}$$

Notar que para todo M el morfismo p_M es suryectivo por la exactitud de la acción $\overline{\otimes}$.

Proposición 5.3.3. [**36**, Lemma 3.4, 3.5] *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) *La categoría $\mathcal{M}$ posee suficientes proyectivos, en particular es finita.*
(ii) *Todo objecto proyectivo de $\mathcal{M}$ es inyectivo y viceversa.*

Demostración. (i) Sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto arbitrario. Como $\mathcal{M}$ es exacta y $P(\mathbf{1})$ un objeto proyectivo, $P(\mathbf{1}) \overline{\otimes} M$ es proyectivo y la aplicación $p_M : P(\mathbf{1}) \overline{\otimes} M \to M$ es un epimorfismo.

(ii) Comencemos demostrando la siguiente afirmación.

Afirmación 5.3.1. *Si $P \in \mathcal{C}$ es proyectivo y $M \in \mathcal{M}$ entonces $P \overline{\otimes} M$ es inyectivo.*

Demostración de la afirmación. Sean $U, V \in \mathcal{M}$, $\iota : V \hookrightarrow U$ un monomorfismo y $f : V \to P\overline{\otimes}M$ un morfismo cualquiera. Por la Proposición 3.5.7 P^* es proyectivo y por lo tanto la sucesión exacta

$$0 \to P^*\overline{\otimes}V \overset{\mathrm{id}\otimes\iota}{\hookrightarrow} P^*\overline{\otimes}U \to P^*\overline{\otimes}Coker(\iota) \to 0$$

se escinde, ya que $\mathcal{M}$ es exacta. Entonces existe un epimorfismo $\pi : P^*\overline{\otimes}U \to P^*\overline{\otimes}V$ tal que $\pi \circ (\mathrm{id}\otimes\iota) = \mathrm{id}_{P^*\overline{\otimes}V}$. Sea $g : U \to P\overline{\otimes}M$ la aplicación definida como la composición

$$U \simeq \mathbf{1}\overline{\otimes}U \xrightarrow{coev_P\otimes\mathrm{id}_U} (P\otimes P^*)\overline{\otimes}U \xrightarrow{m_{P,P^*,U}} P\overline{\otimes}(P^*\overline{\otimes}U) \xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes\pi}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes\pi} P\overline{\otimes}(P^*\overline{\otimes}V) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} P\overline{\otimes}(P^*\overline{\otimes}(P\overline{\otimes}M)) \xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes m_{P^*,P,M}}$$
$$P\overline{\otimes}((P^*\otimes P)\overline{\otimes}M) \xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes ev_P\otimes\mathrm{id}_M} P\overline{\otimes}(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \simeq P\overline{\otimes}M$$

donde $ev_P : P^*\otimes P \to \mathbf{1}$ es la evaluación y $coev_P : \mathbf{1} \to P\otimes P^*$ la coevaluación. Es decir que

$$g = (\mathrm{id}_P\otimes l_M)(\mathrm{id}_P\otimes ev_P\otimes\mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_{P\otimes P^*}\otimes f)(\mathrm{id}_P\otimes\pi)a_{P,P^*,U}(coev_P\otimes\mathrm{id}_U)l_U^{-1}.$$

Es inmediato comprobar, usando los axiomas de rigidez y la naturalidad de l, que $g \circ \iota = f$. ☐

Ahora, sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto proyectivo entonces existe $\iota_M : M \to P(\mathbf{1})\overline{\otimes}M$ monomorfismo tal que $p_M \circ \iota_M = \mathrm{id}_M$. Por la afirmación 5.3.1 $P(\mathbf{1})\overline{\otimes}M$ es inyectivo y por lo tanto M lo es.

Ahora sea $Q \in \mathcal{M}$ un objeto inyectivo. Demostremos que es proyectivo. La transpuesta de $f : P(\mathbf{1}) \twoheadrightarrow \mathbf{1}$ es un morfismo inyectivo

$$\mathbf{1} \simeq \mathbf{1}^* \hookrightarrow P(\mathbf{1})^*,$$

pues el funtor de dualidad es exacto, ver Proposición 3.5.6 (1). Por lo tanto $Q \simeq \mathbf{1}\overline{\otimes}Q \hookrightarrow P(\mathbf{1})^*\overline{\otimes}Q$, y como Q es inyectivo Q es un sumando directo de $P(\mathbf{1})^*\overline{\otimes}Q$ que es proyectivo pues $\mathcal{M}$ es exacta. Luego Q es proyectivo, y esto concluye la prueba de la Proposición. ☐

Ejercicio 5.3.4. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales finitas y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial exacto. Demostrar que $\mathcal{M}^F$ es exacta sobre $\mathcal{C}$ si $\mathcal{M}$ es exacta sobre $\mathcal{D}$. Para la definición de $\mathcal{M}^F$ ver el ejemplo 5.1.15.

Ejercicio 5.3.5. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo exacto entonces $\mathcal{M}$ es semisimple.

Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ es una subcategoría tensorial y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo exacto, con la acción dada por restricción, queremos demostrar que $\mathcal{M}$ es exacto como $\mathcal{C}$-módulo. El siguiente resultado es [**27**, Lemma 2.4].

Lema 5.3.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo. Si existe un $X \in \mathcal{C}$ no nulo tal que $X\overline{\otimes}M$ es proyectivo para todo $M \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M}$ es exacta.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para todo proyectivo $P \in \mathcal{C}$, $P\overline{\otimes}M$ es proyectivo para todo $M \in \mathcal{M}$. Podemos asumir que P es proyectivo indescomponible, luego $P = P(Z)$ para algún objeto simple $Z \in \mathcal{C}$, donde $q : P(Z) \to Z$ es el cubrimiento proyectivo de Z.

Sea $Y \in \mathcal{C}$ un objeto simle que es un factor de composición de $Z\otimes X^*$ y $P(Y)$ su cubrimiento proyectivo. Sabemos, por la Proposicion 2.8.34, que

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P(Y), Z\otimes X^*).$$

Como

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P(Y), Z\otimes X^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P(Y)\otimes X, Z),$$

entonces existe un morfismo no nulo, y por lo tanto suryectivo $f : P(Y)\otimes X \to Z$. Como $P(Y)\otimes X$ es proyectivo, existe un morfismo $g : P(Y)\otimes X \to P(Z)$ tal que $q \circ g = f$. Por ser q esencial, se deduce que g es un morfismo suryectivo. Luego, existe un objeto $V \in \mathcal{C}$ tal que $P(Y)\otimes X = P(Z) \oplus V$. Sea $M \in \mathcal{M}$, entonces $X\overline{\otimes}M$ es proyectivo, y por lo tanto $(P(Y)\otimes X)\overline{\otimes}M$ es proyectivo. Como $P(Z)\overline{\otimes}M$ es un sumando directo de $(P(Y)\otimes X)\overline{\otimes}M$, deducimos que $P(Z)\overline{\otimes}M$ es proyectivo. □

Corolario 5.3.7. *Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ son categorías tensoriales finitas y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo tal que como $\mathcal{D}$-módulo es exacto, con la acción dada por la restricción, entonces es exacto como $\mathcal{C}$-módulo.* □

Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo exacta. En el conjunto $\mathrm{Irr}\,(\mathcal{M})$ de clases de isomorfismos de objetos simples introducimos la siguiente relación: dos objetos $U, V \in \mathrm{Irr}\,(\mathcal{M})$ están relacionados, y se denotará $U \sim V$ si existe una función no nula (y por lo tanto suryectiva) $X\overline{\otimes}U \twoheadrightarrow V$ para algún $X \in \mathcal{C}$. En [**36**] se introduce una relación de equivalencia distinta a la presentada en este trabajo. Sin embargo, la definida por los autores coincide con la nuestra, ambas son conciliadas en el siguiente Lema.

Lema 5.3.8. [**36**, Lemma 3.8] *$U \sim V$ si y solo sí V aparece como un subcociente de $X\overline{\otimes}U$ para algún $X \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Es claro que si $U \sim V$ entonces V aparece como un subcociente de $X\overline{\otimes}U$ para algún $X \in \mathcal{C}$. Veamos la recíproca. Si V aparece como un subcociente de $X\overline{\otimes}U$, donde $X \in \mathcal{C}$, entonces existe un monomorfismo $\iota : V \hookrightarrow Q$ y un epimorfismo $\pi : X\overline{\otimes}U \twoheadrightarrow Q$. El morfismo $\mathrm{id}_{P(\mathbf{1})}\overline{\otimes}\iota : P(\mathbf{1})\overline{\otimes}V \to P(\mathbf{1})\overline{\otimes}Q$ es inyectivo. Como $P(\mathbf{1})\overline{\otimes}V$ es un objeto proyectivo, debido a que $\mathcal{M}$ es exacta, y por lo tanto es un objeto inyectivo, por la Proposición 5.3.3. Entonces existe un epimorfismo $g : P(\mathbf{1})\overline{\otimes}Q \to P(\mathbf{1})\overline{\otimes}V$ tal que $g \circ (\mathrm{id}_{P(\mathbf{1})}\overline{\otimes}\iota) = \mathrm{id}_{P(\mathbf{1})\overline{\otimes}V}$.

La composición

$$(P(\mathbf{1})\otimes X)\overline{\otimes}U \xrightarrow{m_{P(\mathbf{1}),X,U}} P(\mathbf{1})\overline{\otimes}(X\overline{\otimes}U) \xrightarrow{\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\pi} P(\mathbf{1})\overline{\otimes}Q \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} P(\mathbf{1})\overline{\otimes}V \xrightarrow{p_V} V,$$

es un epimorfismo , y por lo tanto $U \sim V$. Recordar la definición de p_V dada en (5.3.1). □

Lema 5.3.9. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. *Reflexividad*: $\mathbf{1}\overline{\otimes}U \simeq U$.

Simetría: Asumamos que $U \sim V$, y sea $f : X\overline{\otimes}U \twoheadrightarrow V$ un morfismo no nulo. El morfismo f induce un morfismo $\hat{f} : U \hookrightarrow {}^*X\overline{\otimes}V$ el cual debe ser un monomorfismo ya que U es simple, y como $\overline{\otimes}$ es exacto en cada variable, el morfismo

$$\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\hat{f} : P(\mathbf{1})\overline{\otimes}U \to P(\mathbf{1})\overline{\otimes}({}^*X\overline{\otimes}V)$$

es inyectivo. Por la Proposición 5.3.3 (ii) $P(\mathbf{1})\overline{\otimes}U$ es inyectivo y por lo tanto existe un epimorfismo $\pi : P(\mathbf{1})\overline{\otimes}({}^*X\overline{\otimes}V) \to P(\mathbf{1})\overline{\otimes}U$ tal que $\pi\,(\mathrm{id}\otimes\hat{f}) = \mathrm{id}$. Esto implica que la aplicación

$$(P(\mathbf{1})^*\otimes P(\mathbf{1}))\overline{\otimes}({}^*X\otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{P(\mathbf{1})^*}\otimes\pi} (P(\mathbf{1})^*\otimes P(\mathbf{1}))\overline{\otimes}U \xrightarrow{ev_{P(\mathbf{1})}\otimes\mathrm{id}} U$$

es suryectiva y por lo tanto no nula. Luego $V \sim U$.

Transitividad: Asumamos que $U \sim V$, $V \sim W$, y sean $f : X\overline{\otimes}U \to V$, $g : Y\overline{\otimes}V \to W$ no nulas, entonces

$$(Y\otimes X)\overline{\otimes}U \xrightarrow{m_{Y,X,U}} Y\overline{\otimes}(X\overline{\otimes}U) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} Y\overline{\otimes}V \xrightarrow{g} W,$$

es no nula, pues es composición de epimorfismos por la exactitud de la acción. Luego $U \sim W$.

□

Entonces nos queda el conjunto $\mathrm{Irr}\,(\mathcal{M})$ particionado en calses de equivalencia:

$$\mathrm{Irr}\,(\mathcal{M}) = \bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i.$$

Para cada i definamos $\mathcal{M}_i$ como la subcategoría plena de $\mathcal{M}$ que consiste de objetos M cuyos subcocientes simples U pertenecen a $\mathcal{R}_i$. Claramente la clase de equivalencia de los objetos simples de $\mathcal{M}_i$ es $\mathcal{R}_i$.

Proposición 5.3.10. *Para todo i la categoría $\mathcal{M}_i$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo exacta indescomponible y $\mathcal{M} = \oplus_i\mathcal{M}_i$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.8.36 sabemos que $\mathcal{M} = \oplus_i\mathcal{M}_i$ como categorías Abelianas. Faltaría demostrar que para cada i la categoría $\mathcal{M}_i$ es estable por la acción de $\mathcal{C}$. Tomemos $i \in I$, $M \in \mathcal{M}_i$ y U un subcociente simple de M, es decir, un factor de composición de M. Sea $X \in \mathcal{C}$. Queremos ver que $X\overline{\otimes}M \in \mathcal{M}_i$, para ello debemos demostrar que cualquier factor de composición de $X\overline{\otimes}M$ está en la clase $\mathcal{R}_i$. Cualquier factor de composición de $X\overline{\otimes}M$ va a ser un subcociente simple de $X\overline{\otimes}U$ donde U es un factor de composición de M y por lo tanto $X\overline{\otimes}M \in \mathcal{M}_i$. Por definición, cada categoría $\mathcal{M}_i$ es indescomponible. □

Corolario 5.3.11. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta. Entonces $\mathcal{M}$ es indescomponible si y sólo si es simple.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ una subcategoría módulo. Entonces $\mathcal{M} = \oplus_i \mathcal{M}_i$ con $\mathcal{M}_i$ categorías módulo exactas indescomponibles. Como $\mathcal{N}$ es de Serre todo objeto simple de $\mathcal{N}$ es simple en $\mathcal{M}$ y por lo tanto $\operatorname{Irr}(\mathcal{N}) = \bigcup_{i \in J} \mathcal{R}_i$ donde $J \subseteq I$. Usando la misma demostración que la Proposición anterior se tiene que $\mathcal{N} \simeq \oplus_{i \in J} \mathcal{M}_i$. De aquí se deduce que si $\mathcal{M}$ es indescomponible entonces es simple. □

Proposición 5.3.12. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dos categorías módulos sobre $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{M}$ es exacta entonces todo funtor aditivo $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathcal{C}$-módulos es exacto.*

Demostración. Sea $0 \to M \to N \to U \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{M}$. Asumamos que la sucesión $0 \to F(M) \to F(N) \to F(U) \to 0$ no es exacta. Esto implica, por el Lema 5.1.12, que la sucesión $0 \to X \overline{\otimes} F(M) \to X \overline{\otimes} F(N) \to X \overline{\otimes} F(U) \to 0$ no es exacta para ningún $X \in \mathcal{C}$. En particular si tomamos $X \in \mathcal{C}$ proyectivo, la sucesión $0 \to X \overline{\otimes} M \to X \overline{\otimes} N \to X \overline{\otimes} U \to 0$ se escinde y por ser F aditivo, la sucesión $0 \to F(X \overline{\otimes} M) \to F(X \overline{\otimes} N) \to F(X \overline{\otimes} U) \to 0$ se escinde y por lo tanto la sucesión $0 \to X \overline{\otimes} F(M) \to X \overline{\otimes} F(N) \to X \overline{\otimes} F(U) \to 0$ es exacta. □

En la próxima sección veremos que esta propiedad caracteriza a las categorías módulo exactas.

Corolario 5.3.13. *Si $\mathcal{M}$ es exacta entonces todo funtor aditivo $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathcal{C}$-módulos preserva objetos proyectivos.* □

Corolario 5.3.14. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ $\mathcal{C}$-módulos donde $\mathcal{M}$ es exacta indescomponible. Si $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor de módulos no nulo entonces no existe $0 \neq M \in \mathcal{M}$ tal que $F(M) \simeq 0$.*

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{M}}$ la subcategoría plena de $\mathcal{M}$ que consiste de aquellos objetos M tales que $F(M) = 0$. Como $\mathcal{M}$ es exacta, el funtor F es exacto y por lo tanto $\widetilde{\mathcal{M}}$ es una subcategoría Serre de $\mathcal{M}$ y es un $\mathcal{C}$-módulo pues F es de $\mathcal{C}$-módulos. Entonces $\widetilde{\mathcal{M}}$ es una subcategoría módulo de $\mathcal{M}$ y como $\mathcal{M}$ es simple, $\widetilde{\mathcal{M}}$ debe ser la categoría nula. □

5.4. El Hom interno y el teorema de Etingof-Ostrik

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$ y $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$.

Definición 5.4.1. Para cada par de objectos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ el funtor

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(- \overline{\otimes} M_1, M_2) : \mathcal{C} \to \operatorname{vect}_{\Bbbk}$$

es exacto a izquierda y por el Teorema 2.8.16 es representable. Se define el *Hom interno* al objeto $\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)$ de $\mathcal{C}$ representando dicho funtor, es decir que para todo $X \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X \overline{\otimes} M_1, M_2).$$

Ejercicio 5.4.2. Demostrar que $\underline{\operatorname{Hom}}(-,-) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor, es decir para todo $M \in \mathcal{M}$, $\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)$ y $\underline{\operatorname{Hom}}(-,M)$ son funtores.

Lema 5.4.3. *Para todo $X \in \mathcal{C}, M, N \in \mathcal{M}$ existen isomorfismos canónicos*

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N))$,
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, X\overline{\otimes}N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(M, N))$,
3. $\underline{\mathrm{Hom}}(X\overline{\otimes}M, N) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)\otimes X^*$,
4. $\underline{\mathrm{Hom}}(M, X\overline{\otimes}N) \simeq X\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$. □

Lema 5.4.4. *Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. *Para todo $M \in \mathcal{M}$ los funtores $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -), \underline{\mathrm{Hom}}(-, M) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ son funtores de $\mathcal{C}$-módulos.*
2. *Si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(-, -) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor biexacto.*

Demostración. □

Ejemplo 5.4.5. Toda categoría tensorial $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-módulo. En este caso el Hom interno es $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = Y\otimes X^*$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. En particular si $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\,(H)$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf H entonces para todo $X, Y \in \mathrm{Rep}\,(H)$ $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, como H-módulos. Se puede verificar directamente que $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}$ satisface los axiomas de Hom interno.

Proposición 5.4.6. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dos categorías módulo no nulas sobre $\mathcal{C}$. Si todo funtor de módulos $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es exacto entonces $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo exacto.*

Demostración. Veamos que cualquier funtor de módulos de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{C}$ es exacto. Sea $G : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ un funtor de $\mathcal{C}$-módulos y sea $0 \neq N \in \mathcal{N}$. Como el funtor $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ definido por $\Phi(M) = G(M)\overline{\otimes}N$ es de $\mathcal{C}$-módulos entonces es exacto. Esto implica que el funtor G es exacto.

En particular, para cualquier $M \in \mathcal{M}$ el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ es exacto. Sea $P \in \mathcal{C}$ un objeto proyectivo y $M \in \mathcal{M}$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P\overline{\otimes}M, -) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(M, -))$, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P\overline{\otimes}M, -)$ es exacto y por lo tanto $P\overline{\otimes}M$ es proyectivo. □

5.4.1. El teorema de Etingof-Ostrik. Para cada par de objectos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ existe una *evaluación*:

$$e_{M_1M_2} : \underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2)\overline{\otimes}M_1 \to M_2, \tag{5.4.1}$$

que se obtiene como la imagen de la identidad bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2), \underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2)\overline{\otimes}M_1, M_2).$$

Gracias a esta evaluación, para tres objetos $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$ podemos definir una composición

$$\mu_{M_1,M_2,M_3} : \underline{\mathrm{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_3), \tag{5.4.2}$$

que se obtiene como imagen de la aplicación

$$e_{M_2M_3}(\mathrm{id}\otimes e_{M_1M_2})m_{\underline{\mathrm{Hom}}(M_2,M_3),\underline{\mathrm{Hom}}(M_1,M_2),M_1}$$

bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2), \underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_3)) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}((\underline{\mathrm{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(M_1, M_2))\overline{\otimes}M_1, M_3).$$

Lema 5.4.7. [**36**] *Para cada objeto $0 \neq M \in \mathcal{M}$ el Hom interno $A = \underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$ es un álgebra en $\mathcal{C}$ con producto dado por $\mu_{M,M,M}$. Si N es un subobjeto de M, entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ es un ideal a derecha de A. Además el funtor*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, -) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$$

posee una estructura natural de funtor de $\mathcal{C}$-módulos.

Demostración. La unidad $u : \mathbf{1} \to A$ es la imágen de l_M bajo el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathbf{1}\overline{\otimes}M, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, \underline{\mathrm{Hom}}(M, M)).$$

□

Laestructura de modulo sale como consecuencia que $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -)$ es el adjunto de $-\overline{\otimes}M$, q es de modulos. adjuntos de modulos es de modulos.

Observación 5.4.8. En particular, como consecuencia de la Proposición 5.3.12, si $\mathcal{M}$ es exacta entonces el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$ es exacto.

Ejemplo 5.4.9. Sea $J \in (H\otimes H)^{\times}$ un twist para H. Recordemos la estructura de categoría módulo de $\mathcal{M}_J$ sobre $\mathrm{Rep}\,(H)$ de la sección 5.1.2. Sobre el espacio vectorial H tenemos otra estructura de coálgebra, que denotaremos por $H_{(J)}$, con comultiplicación dada por

$$\Delta_J : H \to H\otimes H, \quad \Delta_J(h) = J^{-1}\Delta(h),$$

para todo $h \in H$ y con counidad dada por ε. Resulta además que $H_{(J)}$ es un H-módulo coálgebra con la acción regular a izquierda y por lo tanto $(H_{(J)})^*$ es un H-módulo álgebra a izquierda. La coálgebra $H_{(J)}$ fue considerada por Movshev [**57**] para clasificar twists en álgebras de grupo.

Afirmación 5.4.1. *Existe un isomorfismo*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Bbbk, \Bbbk) \simeq (H_{(J)})^* \tag{5.4.3}$$

como H-módulo álgebras.

Demostración de la afirmación. Para cada $X \in \mathrm{Rep}\,(H)$ definamos las funciones

$$\phi_X : \mathrm{Hom}_H(X, (H_{(J)})^*) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk),$$
$$\psi_X : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk) \to \mathrm{Hom}_H(X, H^*)$$

por

$$\phi_X(\alpha)(x) = \alpha(x)(1), \quad \psi_X(\beta)(x)(t) = \beta(t \cdot x),$$

$x \in X, t \in H$. Estas transformaciones lineales son una la inversa de la otra. Esto prueba que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Bbbk, \Bbbk) \simeq (H_{(J)})^*$ como H-módulos. Veamos que vía este isomorfismo la multiplicación μ de $(H_{(J)})^*$ del Lema 5.4.7 coincide con la dual de la coálgebra $H_{(J)}$.

En este caso la aplicación evaluación $ev : (H_{(J)})^* \to \Bbbk$ esta dada por $ev = \phi_{(H_{(J)})^*}(\mathrm{id}\,)$. Por lo tanto $ev(\alpha) = \alpha(1)$. Luego $\mu = \psi_{(H_{(J)})^* \otimes (H_{(J)})^*}(ev(\mathrm{id}\otimes ev))$. Entonces si $\alpha, \beta \in (H_{(J)})^*$, $t \in H$

$$\begin{aligned}\mu(\alpha\otimes\beta)(t) &= \psi_{(H_{(J)})^* \otimes (H_{(J)})^*}(ev(\mathrm{id}\otimes ev))(\alpha\otimes\beta)(t)\\ &= ev(\mathrm{id}\otimes ev)(J^{-1}t_{(1)} \rightharpoonup \alpha\otimes J^{-2}t_{(2)} \rightharpoonup \beta)\\ &= \alpha(J^{-1}t_{(1)})\beta(J^{-2}t_{(2)}),\end{aligned}$$

que es el producto dual de la estructura de coálgebra de $H_{(J)}$. □

El siguiente resultado fue demostrado por V. Ostrik en el caso semisimple y luego generalizado al caso arbitrario por P. Etingof y V. Ostrik.

Teorema 5.4.10. [**36**] *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo a izquierda exacta indescomponible sobre $\mathcal{C}$. Existe un álgebra $A \in \mathcal{C}$ tal que las categorías módulo $\mathcal{M}$ y $\mathcal{C}_A$ son equivalentes. Más aun, se puede elegir al álgebra A tal que no posea ideales a derecha no triviales y si asumimos que* $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(M) = \Bbbk$ *entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, A) = \Bbbk$.

Demostración. Sea $0 \neq M \in \mathcal{M}$ un objeto simple. Definamos $A = \underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$ y sea $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$ el funtor del Lema 5.4.7. Vamos a demostrar que el funtor F es fiel, pleno y denso; luego por el Teorema 2.6.12, F es una equivalencia.

Como F es un funtor de módulos es exacto. Como $\mathcal{M}$ es indescomponible no existe $0 \neq N \in \mathcal{M}$ tal que $F(N) = 0$, ver Corolario 5.3.14. Por la Proposición 2.8.15 F es fiel.

Veamos que F es pleno. Primero demostremos que para todo $N \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{C}$ la aplicación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M, N) \to \mathrm{Hom}_A(F(X\overline{\otimes}M), F(N))$$

es suryectiva. Aquí denotamos $\mathrm{Hom}_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}$. En efecto, $F(X\overline{\otimes}M) = \underline{\mathrm{Hom}}(M, X\overline{\otimes}M) \simeq X\otimes A$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(F(X\overline{\otimes}M), F(N)) &\simeq \mathrm{Hom}_A(X\otimes A, F(N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(N))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M, N).\end{aligned}$$

Afirmamos que para todo objeto $N \in \mathcal{M}$ existe un $X \in \mathcal{C}$ y un morfismo suryectivo $X\overline{\otimes}M \twoheadrightarrow N$. En efecto, la sucategoría plena que consiste de aquellos objetos $N \in \mathcal{M}$ munidos de un morfismo suryectivo $X\overline{\otimes}M \twoheadrightarrow N$ para algún $X \in \mathcal{C}$, es una subcategoría módulo no nula de $\mathcal{M}$ y por lo tanto igual a $\mathcal{M}$.

Sean $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ y $X \in \mathcal{C}$ munido de un morfismo suryectivo $p : X\overline{\otimes}M \to N_1$. Como el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-, N_2)$ es exacto a derecha, se tiene que los morfismos verticales del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M, N_2) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(p,N_2)"] & \mathrm{Hom}_A(F(X\overline{\otimes}M), F(N_2)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(F(p),F(N_2))"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(N_1, N_2) \arrow[r, "F"] & \mathrm{Hom}_A(F(N_1), F(N_2))
\end{tikzcd}$$

son suryectivos y el morfismo horizontal superior es suryectivo por lo demostrado anteriormente. De esta manera se demuestra que F es pleno.

Afirmación 5.4.2. *Para todo objeto $L \in \mathcal{C}_A$ existe una sucesión*

$$X \otimes A \xrightarrow{f} Y \otimes A \xrightarrow{h} L \to 0$$

tal que $h = \operatorname{coKer}(f)$, para ciertos objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

Demostración de la afirmación. La acción a derecha

$$\rho_L : L \otimes A \to L$$

es un morfismo suryectivo. El morfismo ρ_L es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}_A$, donde la acción sobre $L \otimes A$ es la dada sobre el segundo tensorando. Como $\mathcal{C}_A$ es Abeliana, $\rho_L = \operatorname{coKer}(t)$ donde $t : N \to L \otimes A$ es un morfismo en $\mathcal{C}_A$. Como $\rho_N : N \otimes A \to N$ es suryectivo, $\operatorname{coKer}(t \circ \rho_N) = \rho_L$. Basta con tomar $X = N, Y = L$. □

Sea $f' : X \overline{\otimes} M \to Y \overline{\otimes} M$ la imagen de f bajo el isomorfismo

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(X \otimes A, Y \otimes A) &\simeq \operatorname{Hom}_A(F(X \overline{\otimes} M), F(Y \overline{\otimes} M)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X \overline{\otimes} M, Y \overline{\otimes} M). \end{aligned}$$

Sea $N = \operatorname{coKer} f'$. Entonces, como F es exacto, $F(N) = F(\operatorname{coKer} f') = \operatorname{coKer} F(f') = L$. Por lo tanto F es denso y se sigue que F es una equivalencia de categorías.

Los ideales a derecha de A están en correspondencia con los subojetos de M vía el funtor F. Por lo tanto A no posee ideales a derecha no triviales. Además $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, A) = \operatorname{End}_{\mathcal{M}}(M) = \Bbbk$. □

5.5. Categorías módulo exactas sobre álgebras de Hopf

En esta sección desarrollaremos las herramientas necesarias para poder dar una clasificación de las categorías exactas indescomponibles sobre ciertas álgebras de Hopf. En particular mostraremos una técnica que sirve para dar una clasificación en el caso de que el álgebra de Hopf es punteada.

Sea H un álgebra de Hopf y (A, λ) un H-comódulo álgebra a izquierda. Un ideal (a derecha, izquierda o bilátero) se dice *coestable* si $\lambda(I) \subseteq H \otimes_{\Bbbk} I$. Decimos que A es *H-simple*, respectivamente a derecha, izquierda, si A no posee ideales biláteros, respectivamente a derecha, izquierda, no triviales coestables.

Lema 5.5.1 ([**5**]). *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y K un H-comódulo algebra. Si K es H-simple entonces la categoría ${}_K\mathfrak{m}$ es exacta. En particular si $A \subseteq H$ es un coideal subalgebra a izquierda de H entonces ${}_A\mathfrak{m}$ es un* $\operatorname{Rep}(H)$*-módulo exacto.*

Demostración. Sea $X \in \operatorname{Rep}(H)$ un objeto proyectivo y $M \in {}_K\mathfrak{m}$. Queremos demostrar que $X \otimes_{\Bbbk} M$ es proyectivo; y para esto basta con suponer que $X = H$. Pero el objeto $H \otimes_{\Bbbk} M \in {}^H_K\mathfrak{m}$, y por [**65**, Teorema 4.2] este objeto es proyectivo. La segunda afirmación sigue de [**65**, Theorem 6.1].

$\square$

Observación 5.5.2. El Lema anterior nos proporciona una familia de representaciones exactas sobre Rep (H). Sería interesante obtener un resultado similar para álgebras cuasi-Hopf y álgebras de Hopf débiles.

Lema 5.5.3. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y K un H-comódulo algebra. Asumamos que la categoría ${}_K\mathfrak{m}$ es exacta. Si además ${}_K\mathfrak{m}$ es indescomponible entonces K es H-simple.*

Demostración. Asumamos que existe $I \subseteq K$ un ideal H-coestable no trivial. Por el ejemplo 2.8.31 sabemos que la categoría ${}_{K/I}\mathfrak{m}$ es una subcategoría módulo. Como ${}_K\mathfrak{m}$ es indescomponible entonces es simple lo cual es una contradicción. $\square$

Ejercicio 5.5.4. Sea G un grupo finito. Si $F \subseteq G$ es un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo. Vamos a denotar por $\mathcal{M}(F, \psi)$ a la categoría ${}_{\Bbbk_\psi F}\mathfrak{m}$. Demostrar que:

(i) El álgebra de grupo torcida $\Bbbk_\psi F$ no posee ideales no triviales $\Bbbk G$-coestables. Entonces la categoría $\mathcal{M}(F, \psi)$ es una categoría Rep $(\Bbbk G)$-módulo exacta.
(ii) $\mathcal{M}(F, \psi)$ es indescomponible.
(iii) $\mathcal{M}(F, \psi) \simeq \mathcal{M}(F, \psi')$ como Rep $(\Bbbk G)$-módulos si y sólo si $\psi = \psi'$ en $H^2(F, \Bbbk^\times)$.

Proposición 5.5.5. [5] *Sean R, S H-comódulo algebras tales que las categorías ${}_R\mathfrak{m}$, ${}_S\mathfrak{m}$ son exactas. Sea $(F, c) : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ un funtor de módulos. Demostar que F es de la forma explicada en el Lema 5.1.25.*

Demostración. Como $(\mathcal{F}, c) : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ es un funtor de módulos entonces $\mathcal{F}$ es exacto. Por el Teorema 2.7.41 se tiene que existe un objeto $P \in {}_S\mathfrak{m}_R$ tal que $\mathcal{F}(V) = P \otimes_R V$ para todo $V \in {}_R\mathfrak{m}$. Definimos $\lambda : P \to H \otimes_\Bbbk P$ por

$$\lambda(p) = c_{H,R}(p \otimes 1 \otimes 1) := p_{(-1)} \otimes p_{(0)}, \qquad p \in P.$$

Afirmamos que P es un bimódulo equivariante, ver definición 5.1.24. Para esto, demostremos primero que (P, λ) es un H-comódulo a izquierda. Por la naturalidad de c en la primer variable, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_R (H \otimes_\Bbbk R) \arrow[r, "c_{H,R}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{P} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & H \otimes_\Bbbk (P \otimes_R R) \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"] \\
P \otimes_R (\Bbbk \otimes_\Bbbk R) \arrow[r, "c_{\Bbbk,R}"'] & \Bbbk \otimes_\Bbbk (P \otimes_R R).
\end{tikzcd}$$

El axioma (5.1.6) implica que $c_{\Bbbk,R} = \mathrm{id}_P$. Esto muestra que λ es counitaria.

Nuevamente por la naturalidad de c en la primer variable, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}R) & \xrightarrow{c_{H,R}} & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{P}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}} \\ P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}H\otimes_{\Bbbk}R) & \xrightarrow[c_{H\otimes H,R}]{} & (H\otimes_{\Bbbk}H)\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R). \end{array} \tag{5.5.1}$$

Si $p \in P$ entonces

$$\begin{aligned} (\Delta\otimes\mathrm{id}_P)\lambda(p) &= (\Delta\otimes\mathrm{id}_P)\, c_{H,R}(p\otimes 1\otimes 1) \\ &= c_{H\otimes H,R}(\mathrm{id}_P\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_R)(p\otimes 1\otimes 1) \\ &= (\mathrm{id}_H\otimes c_{H,R})c_{H,H\otimes R}(p\otimes 1\otimes 1\otimes 1) \\ &= (\mathrm{id}_H\otimes c_{H,R})(\lambda(p)\otimes 1\otimes 1) \\ &= (\mathrm{id}_H\otimes\lambda)\lambda(p). \end{aligned}$$

La primera igualdad por la definición de λ, la segunda por la conmutatividad del diagrama (5.5.1), la tercera por (5.1.5) y la cuarta por la naturalidad de c. Entonces λ es coasociativa.

Finalmente, demostremos que λ es un morfismo de (S,R)-módulos. Si $p \in P$, $s \in S$, $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda(s\cdot p) &= c_{H,R}(s\cdot(p\otimes 1\otimes 1)) = s\cdot c_{H,R}(p\otimes 1\otimes 1) = s_{(-1)}p_{(-1)}\otimes s_{(0)}\cdot p_{(-1)} \\ \lambda(p\cdot r) &= c_{H,R}(p\cdot r\otimes_R(1\otimes 1)) = c_{H,R}(p\otimes_R r_{(-1)}\otimes r_{(0)}) \\ &= p_{(-1)}r_{(-1)}\otimes p_{(0)}\otimes_R r_{(0)}. \end{aligned}$$

Aquí, en la primera linea usamos que $c_{H,R}$ es un morfismo de S-módulos; y la última linea sigue de la naturalidad de c.

$\square$

Corolario 5.5.6. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición anterior, se tiene una equivalencia de categorías*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\,(H)}({}_R\mathfrak{m}, {}_S\mathfrak{m}) \simeq {}^H_S\mathfrak{m}_R.$$

$\square$

Proposición 5.5.7. [**53**, Prop. 3.4] *Sean R, S H-comódulo algebras tales que las categorías ${}_R\mathfrak{m}$, ${}_S\mathfrak{m}$ son exactas. Existe una equivalencia ${}_R\mathfrak{m} \simeq {}_S\mathfrak{m}$ de categorías módulo si y sólo si existe un objeto $P \in {}^H\mathcal{M}_R$ tal que $S \simeq \mathrm{End}_R(P)$ como H-comódulo algebras. Si $S^{\mathrm{coH}} = \Bbbk$ entonces P es un objeto indescomponible en la categoría ${}^H\mathcal{M}_R$.* $\square$

La estructura de H-comódulo a izquierda sobre $\mathrm{End}_R(P)$ está dada por $\lambda : \mathrm{End}_R(P) \to H\otimes_{\Bbbk}\mathrm{End}_R(P)$, $\lambda(T) = T_{(-1)}\otimes T_{(0)}$ donde

$$\langle \alpha, T_{(-1)}\rangle\, T_0(p) = \langle \alpha, T(p_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)})\rangle\, T(p_{(0)})_{(0)}, \tag{5.5.2}$$

para todo $\alpha \in H^*$, $T \in \operatorname{End}_R(P)$, $p \in P$. Es inmediato demostrar que $\operatorname{End}_R(P)^{\mathrm{coH}} = \operatorname{End}^H_R(P)$. De aquí se deduce que P es un objeto indescomponible.

En el caso de tener una equivalencia ${}_R\mathfrak{m} \simeq {}_S\mathfrak{m}$ de categorías módulo se tiene un *contexto de Morita equivariante*, es decir que existen objetos $P \in {}^H_S\mathcal{M}_R, Q \in {}^H_R\mathcal{M}_S$ e isomorfismos

$$P\otimes_R Q \simeq S, \quad Q\otimes_S P \simeq R,$$

de S-bimódulos y R-bimódulos respectivamente. Además existe un isomorfismo de comódulo álgebras $S \simeq \operatorname{End}_R(P)$. La estructura de H-comódulo en $\operatorname{End}_R(P)$ es como en (5.5.2). Para más detalles ver [**5**, Proposition 1.24].

El siguiente resultado, que es una consecuencia del Teorema 5.4.10, puede encontrarse en [**5**]. Lo utilizaremos para dar una técnica de clasificación de las categorías módulo sobre ciertas álgebras de Hopf punteadas.

Teorema 5.5.8. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y $\mathcal{M}$ un* $\operatorname{Rep}(H)$*-módulo exacto indescomponible. Existe una equivalencia $\mathcal{M} \simeq {}_K\mathfrak{m}$ de categorías módulo, donde*

- *K un H-comódulo algebra H-simple a derecha,*
- $K^{\mathrm{coH}} = \Bbbk$.

$\square$

Dos comódulo álgebras isomorfas dan lugar a categorías módulo equivalentes. La recíproca no es cierta. El siguiente resultado nos permite distinguir cuándo dos categorías módulo sobre $\operatorname{Rep}(H)$ son equivalentes en el caso que H sea un álgebra de Hopf punteada.

Si K es un H-comódulo algebra y $g \in G(H)$ denotaremos por K^g al H-comódulo algebra cuya álgebra subyacente es K y con coacción

$$\lambda^g : K^g \to H\otimes_{\Bbbk} K^g, \quad \lambda^g(k) = g k_{(-1)} g^{-1} \otimes k_{(0)},$$

para todo $k \in K$. Queda como ejercicio para el lector demostrar que las categorías ${}_K\mathfrak{m}$, ${}_{K^g}\mathfrak{m}$ son equivalentes como $\operatorname{Rep}(H)$-módulos.

Teorema 5.5.9. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita punteada con coradical $\Bbbk G$, con G un grupo finito. Sean K, K' H-comódulo algebras H-simples a derecha con coinvariantes triviales tales que existe una equivalencia ${}_K\mathfrak{m} \simeq {}_{K'}\mathfrak{m}$ de* $\operatorname{Rep}(H)$*-módulos. Entonces existe $g \in G$ y un isomorfismo $K' \simeq K^g$ de H-comódulo algebras.*

Demostración. Bajo las presentes hipótesis tenemos un contexto de Morita equivariante, es decir que existen objetos $P \in {}^H_{K'}\mathcal{M}_K, Q \in {}^H_K\mathcal{M}_{K'}$ e isomorfismos

$$P\otimes_K Q \simeq K', \quad Q\otimes_S P \simeq K,$$

de K'-bimódulos y K-bimódulos respectivamente. Además, un isomorfismo de comódulo álgebras $K' \simeq \operatorname{End}_K(P)$. Denotemos por $\lambda : P \to H\otimes_{\Bbbk} P$ la estructura de comódulo de P.

Asumamos que $\Bbbk G = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_m$ es la filtración coradical de H. Para cada $i = 0, \ldots, m$ definamos

$$P(i) = P_i/P_{i-1},$$

donde $\{P_i\}_i$ es la filtración de Loewy de P. Definamos $\operatorname{gr} P = \oplus_{i=0}^{m} P(i)$. Las estructuras inducidas de P en $\operatorname{gr} P$ lo hacen un objeto en la categoría ${}^{\operatorname{gr} H}\mathcal{M}_{\operatorname{gr} K}$.

El Corolario (6.5.10) implica que existe un 2-cociclo de Hopf $\sigma : \operatorname{gr} H \otimes_{\Bbbk} \operatorname{gr} H \to \Bbbk$ tal que $(\operatorname{gr} K)_\sigma \simeq C$, donde C es una subálgebra coideal a izquierda de $(\operatorname{gr} H)^{[\sigma]}$. Luego, usando el Lema (6.5.2) se tiene una equivalencia de categorías

$${}^{\operatorname{gr} H}\mathcal{M}_{\operatorname{gr} K} \simeq {}^{(\operatorname{gr} H)^{[\sigma]}}\mathcal{M}_C$$

El Teorema 6.5.11 (2) implica que existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\operatorname{gr} P \simeq M \otimes_{\Bbbk} C$. En particular se tiene que

$$\dim P = \dim M \dim C = \dim M \dim K.$$

Análogamente, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\dim Q = s \dim K'$. Usando el Teorema 6.5.11 (1), existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que $P^t \simeq N \otimes_{\Bbbk} K$ como K-módulos a derecha. Aquí N es un espacio vectorial y la acción de K en $N \otimes_{\Bbbk} K$ es en el segundo tensorando. Esto implica que

$$P \otimes_K Q \simeq K'.$$

Luego, $N \otimes_{\Bbbk} Q \simeq K'$, lo cual implica que

$$\dim N \dim Q = \dim K'.$$

Se deduce entonces que $s \dim N = 1$ y por lo tanto $s = 1 = \dim N$. Luego $\dim Q = \dim K'$ y de forma similar se puede deducir que $\dim P = \dim K$.

Afirmación 5.5.1. *Existe un $0 \neq p \in P_0$ tal que $\lambda(p) = g \otimes p$ y $P = p \cdot K$.*

Demostración de la afirmación. Primero veamos que en efecto $P_0 \neq 0$. Asumamos que $P_0 = 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ el menor número tal que $P_n \neq 0$. Entonces

$$\lambda(P_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes_{\Bbbk} P_{n-i} = H_0 \otimes_{\Bbbk} P_n.$$

Lo cual no puede ser, esto implica que $P_0 \neq 0$. Tomemos $0 \neq p \in P_0$ tal que $\lambda(p) = g \otimes p$, donde $g \in G$. Sea $J = \{x \in K : p \cdot x = 0\}$. Entonces $J \subseteq K$ es un ideal a derecha. Sea $x \in K$, demostremos que $\lambda(x) \in H \otimes_{\Bbbk} J$. Escribamos

$$\lambda(x) = \sum_i x^i \otimes x_i,$$

donde $\{x^i\} \subseteq H$ sea linealmente independiente. Entonces el conjunto $\{gx^i\} \subseteq H$ es inealmente independiente y $\lambda(p \cdot x) = \sum_i gx^i \otimes p \cdot x_i = 0$, y por lo tanto $p \cdot x_i$ para todo i. Se deduce que $\lambda(x) \in H \otimes_{\Bbbk} J$ y asi J es un ideal a derecha H-coestable. Como K es H-simple a derecha, $J = 0$. Por lo tanto la restricción de la acción

$$< p >_{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} K \to P,$$

es inyectiva. Pero como $\dim P = \dim K$ dicho morfismo debe ser un isomorfismo, lo cual culimna la demostración de la afirmación. □

Se puede demostrar que el morfismo $\phi : K^g \to \mathrm{End}_K(P)$ dado por

$$\phi(y)(p \cdot x) = p \cdot yx,$$

para todo $x, y \in K$, es un isomorfismo de H-comódulo álgebras. □

chequear que las categorías ${}^H_{K'}\mathcal{M}_K$ estan definidas

5.5.1. Categorías módulo asociadas a twists dinámicos. En está sección especializamos los resultados de la sección 5.2 al caso donde la categoría tensorial es la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y $A \subseteq G(H)$ un subgrupo. Sea $J : \widehat{A} \to H \otimes H$ un twist dinámico. Ver Sección 6.3. Sea $\mathcal{M}^{(J)}$ la categoría Abeliana de $\Bbbk[A]$-módulos a izquierda con la siguiente estructura de $\mathrm{Rep}\,(H)$-módulo. Definamos $\overline{\otimes} : \mathrm{Rep}\,(H) \times \mathcal{M}^{(J)} \to \mathcal{M}^{(J)}$, $X \overline{\otimes} V := X \otimes_{\Bbbk} V$, $X, Y \in \mathrm{Rep}\,(H)$, $V \in \mathcal{M}^{(J)}$, donde la estructura de A-módulo sobre $X \otimes_{\Bbbk} V$ es la dada por la diagonal. Los isomorfismos de asociatividad $m_{X,Y,V} : (X \otimes_{\Bbbk} Y) \overline{\otimes} V \to X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} V)$ son

$$m_{X,Y,V}(x \otimes y \otimes n) = J^{-1}(\lambda) \cdot x \otimes J^{-2}(\lambda) \cdot y \otimes n, \tag{5.5.3}$$

para todo $x \in X, y \in Y, n \in V[\lambda^{-1}]$. Como J conmuta con los elementos de A entonces $m_{X,Y,V}$ es un morfismo de $\Bbbk[A]$-módulos.

Proposición 5.5.10. *$(\mathcal{M}^{(J)}, \overline{\otimes}, m, \mathrm{id}\,)$ es un $\mathrm{Rep}\,(H)$-módulo exacto indescomponible.* □

Lema 5.5.11. *Si $J, \widetilde{J}$ son twists dinámicos equivalentes entonces existe una equivalencia $\mathcal{M}^{(J)} \simeq \mathcal{M}^{(\widetilde{J})}$ de categorías $\mathrm{Rep}\,(H)$-módulo.*

Demostración. Sea $t : \widehat{A} \to H^{\times}$ el morfismo que da la equivalencia entre J y J'. Definamos el funtor $(F, c) : \mathcal{M}^{(J)} \to \mathcal{M}^{(\widetilde{J})}$ como sigue. Para todo $X \in \mathrm{Rep}\,(H), M \in \mathcal{M}^{(J)}$, $F(M) = M$ y los isomorfismos $c_{X,M} : X \otimes_{\Bbbk} M \to X \otimes_{\Bbbk} M$ se definen por

$$c_{X,M}(x \otimes m) = t(\lambda) \cdot x \otimes m,$$

para todo $x \in X, m \in M[\lambda^{-1}]$. Como $t(\lambda)$ conmuta con los elementos de A el morfismo $c_{X,M}$ es de A-módulos. La ecuación (5.1.5) se deduce de (6.3.6) y la ecuación (5.1.6) se deduce de (6.3.4). Claramente (F, c) es una equivalencia de categorías. □

- reconstruccion de un algebra

5.5.2. Representaciones de $\mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)$, donde G un grupo finito. Sea $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario. En esta sección se dará la clasificación de las representaciones de $\mathrm{Rep}\,(\Bbbk G)$. Este resultado fue obtenido por V. Ostrik [**61**] en el caso semisimple y por P. Etingof y V. Ostrik [**36**] en el caso general.

Sea $\Bbbk$ un cuerpo de característica arbitraria y G un grupo finito. Denotemos por H el álgebra de grupo $\Bbbk G$. Si $F \subseteq G$ es un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo normalizado consideremos la categoría módulo $\mathcal{M}(F,\psi)$ del ejercicio 5.5.4.

Recordemos que $\mathcal{M}(F,\psi)$ como categoría Abeliana es la categoría de $\Bbbk_\psi F$-módulos a izquierda y la estructura de categoría módulo sobre $\operatorname{Rep}(H)$ es la siguiente:

$$\overline{\otimes} : \operatorname{Rep}(H) \times \mathcal{M}(F,\psi) \to \mathcal{M}(F,\psi), \quad X\overline{\otimes}V = X\otimes_{\Bbbk}V,$$

$X \in \operatorname{Rep}(H)$, $V \in \mathcal{M}(F,\psi)$, donde la acción de F sobre $X\otimes_{\Bbbk}V$ está dada por $g\cdot(x\otimes v) = g\cdot x\otimes g\cdot v$; $g \in F, x \in X, v \in V$.

Lema 5.5.12. *Sea $V \neq 0$ un objeto en $\mathcal{M}(F,\psi)$ entonces el espacio vectorial $\Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)$ es un $\Bbbk G$-módulo álgebra y existe un isomorfismo*

$$\underline{\operatorname{Hom}}(V,V) \simeq \Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V),$$

donde la acción de F en $\operatorname{End}(V)$ esta dada como sigue: $(h\cdot T)(v) = h\cdot T(h^{-1}\cdot v)$, para todo $T \in \operatorname{End}(V), v \in V, h \in F$.

En particular si V es un objeto simple de $\mathcal{M}(F,\psi)$ existe una equivalencia de categorías módulo

$$\mathcal{M}(F,\psi) \simeq \operatorname{Rep}(H)_{\Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)}.$$

Demostración. Si $g \in G, T \in \operatorname{End}(V)$ vamos a denotar por $\overline{g\otimes T}$ a la clase de $g\otimes T$ en $\Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)$. Sea $\{x_i\}$ un conjunto de representantes de coclases a izquierda de F.

La estructura de $\Bbbk G$-módulo álgebra en $\Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)$ es como sigue; la acción de G es sobre el primer tensorando y el producto es

$$(\overline{x_i\otimes T})(\overline{x_j\otimes U}) = \delta_{i,j}\,(\overline{x_i\otimes T\circ U}),$$

donde $T, U \in \operatorname{End}(V)$.

Sean $X \in \operatorname{Rep}(H)$ y $V \in \mathcal{M}(F,\psi)$. Notemos que

$$\operatorname{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V) \simeq \operatorname{Hom}_F(X, \operatorname{End}(V)),$$

para esto basta comprobar que las aplicaciones definidas por

$$\phi : \operatorname{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V) \to \operatorname{Hom}_F(X, \operatorname{End}(V)), \quad \phi(\alpha)(x)(v) = \alpha(x\otimes v),$$
$$\zeta : \operatorname{Hom}_F(X, \operatorname{End}(V)) \to \operatorname{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V), \quad \zeta(\beta)(x\otimes v) = \beta(x)(v),$$

para todo $x \in X, v \in V$, están bien definidas y son una la inversa de la otra. Además la reciprocidad de Frobenius, [**19**, Prop. 10.21], nos dice que

$$\operatorname{Hom}_H(X, \Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)) \simeq \operatorname{Hom}_F(X, \operatorname{End}(V)),$$

por lo tanto obtenemos isomorfismos

$$\operatorname{Hom}_H(X, \Bbbk G\otimes_F \operatorname{End}(V)) \simeq \operatorname{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V)$$

para cualquier $X \in \operatorname{Rep}(H)$. Por definición del Hom interno y por el Lema de Yoneda se sigue que

$$\underline{\operatorname{Hom}}(V, V) \simeq \Bbbk G \otimes_F \operatorname{End}(V),$$

como $\Bbbk_\psi F$-módulos. El producto de $\Bbbk G \otimes_F \operatorname{End}(V)$ vía este isomorfismo, coincide con el producto de $\underline{\operatorname{Hom}}(V, V)$ dado en el Lema 5.4.7. □

El siguiente teorema es debido a Ostrik, ver [**62**, Thm.2]. Reproducimos la demostración por completitud.

Teorema 5.5.13. *Si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta indescomponible sobre* $\operatorname{Rep}(\Bbbk G)$ *entonces existe un subgrupo F de G y un 2-cociclo normalizado $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que*

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(F, \psi)$$

como categorías módulo. son equivalentes si y sólo si los pares (ψ, F), (ψ', F') son conjugados vía la acción adjunta de G.

Demostración. Por el Teorema 5.4.10 existe un $\Bbbk G$-módulo algebra A de dimensión finita tal que

$$\mathcal{M} \simeq \operatorname{Rep}(\Bbbk G)_A$$

como categorías módulo. Se puede elegir a A de tal manera que no posea ideales a derecha $\Bbbk G$-estables. Como $\Bbbk G$ es cosemisimple el radical de Jacobson $\mathcal{J}(A)$ es un ideal H-estable, [**49**, Theorem 3.1], entonces $\mathcal{J}(A) = 0$ o bien $\mathcal{J}(A) = A$. La segunda opción es imposible porque el radical de Jacobson es nilpotente, y por lo tanto A es semisimple.

Afirmación 5.5.2. *Toda $\Bbbk G$-módulo álgebra semisimple sin ideales a derecha $\Bbbk G$-estables es isomorfa a* $\Bbbk G \otimes_F \operatorname{End}(V)$ *para algún subgrupo F de G, algún 2-cociclo normalizado ψ y una representación V de $\Bbbk_\psi F$.*

Esta afirmación junto al Lema 5.5.12 concluyen la prueba de la primera afirmación del teorema. explicar mejor

Demostración de la afirmación. Sea A un $\Bbbk G$-módulo álgebra semisimple sin ideales $\Bbbk G$-estables. Sea I el conjunto de idempotentes centrales primitivos de A, entonces G actúa transitivamente en I ya que A no posee ideales $\Bbbk G$-estables.

Elijamos $e \in A$ un idempotente central primitivo. Sea $F = \{g \in G : g \cdot e = e\}$. Claramente F es un subgrupo de G. Entonces $\Bbbk G \otimes_F eA \simeq A$. Las aplicaciones

$$\psi : \Bbbk G \otimes_F eA \to A, \quad \phi : A \to \Bbbk G \otimes_F eA,$$

definidas por

$$\psi(g \otimes ea) = (g \cdot e)(g \cdot a), \quad \phi((g \cdot e)a) = g \otimes g^{-1} a,$$

están bien definidas, una la inversa de la otra.

Como eA es un álgebra de matrices, digamos $eA = \mathrm{End}\,(V)$ para cierto espacio vectorial V, invariante por la acción de F, por Skolem-Noether, esta acción es interior. Entonces existe una función $\pi : F \to \mathrm{End}\,(V)$ definida por

$$f \cdot T = \pi(f) \circ T \circ \pi(f^{-1}),$$

para todo $f \in F$, $T \in \mathrm{End}\,(V)$. Como la acción de F es asociativa se puede demostrar que $\pi(f)\pi(g)\pi(g^{-1}f^{-1})$ esta en el centro de $\mathrm{End}\,(V)$ para todo $f, g \in F$ y por lo tanto

$$\pi(f)\,\pi(g)\,\pi(g^{-1}f^{-1}) = \psi(f,g)\;\mathrm{id}_V$$

para cierta función $\psi : F \times F \to \Bbbk^\times$. Fácilmente se puede demostrar que ψ es un 2-cociclo normalizado. Lo cual termina la demostración de la afirmación. □

Asumamos que existe una equivalencia de categorías módulo

$$F : \mathcal{M}(F,\psi) \to \mathcal{M}(F',\psi').$$

Por la Proposición 5.5.7 existe un objeto indescomponible $P \in {}^{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk_\psi F}$ tal que $\Bbbk_{\psi'}F' \simeq \mathrm{End}_{\Bbbk_\psi F}(P)$ como $\Bbbk G$-comódulo álgebras. Vamos a denotar por S al conjunto de representantes de los elementos de G/F, es decir que $G = \cup_{s\in S} sF$. Existe una equivalencia de categorías ${}^{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk_\psi F} \simeq {}^{\Bbbk S}\mathcal{M}$. La equivalencia está dada por el par de funtores

$$\Phi : {}^{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk_\psi F} \to {}^{\Bbbk S}\mathcal{M}, \quad \Psi : {}^{\Bbbk S}\mathcal{M} \to {}^{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk_\psi F},$$

$$\Phi(V) = V/V\cdot(\Bbbk F)^+,\ \Psi(M) = \Bbbk F \otimes_\Bbbk M.$$

Si $\pi : G \to S$ es la proyección canónica entonces la coacción $\delta : \Phi(V) \to \Bbbk S \otimes_\Bbbk \Phi(V)$ es $\delta(\overline{v} = \pi(v_{(-1)})\otimes\overline{v_{(0)}}$ para todo $v \in V$. La coacción $\rho : \Psi(M) \to \Bbbk G \otimes_\Bbbk \Psi(M)$ es $\rho(f\otimes m) = m_{(-1)}f \otimes f \otimes m_{(0)}$, donde $m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$ es la coacción de M. La acción a derecha de $\Bbbk_\psi F$ en $\Psi(M)$ es

$$(f\otimes m)\cdot g = \psi(f,g)\ fg\otimes m,$$

para todo $f, g \in F, m \in M$. Como P es indescomponible entonces $\Phi(P)$ debe ser un objeto de dimensión 1. En consecuencia existe un elemento $t \in S$ tal que $P \simeq \Bbbk F \otimes_\Bbbk \Bbbk_t$ donde $\Bbbk_t \in {}^{\Bbbk S}\mathcal{M}$ via $\delta : \Bbbk_s \to \Bbbk S \otimes_\Bbbk \Bbbk_t, \delta(r) = t \otimes r$. No es difícil demostrar que $\mathrm{End}_{\Bbbk_\psi F}(P) \simeq \Bbbk_{\psi^t} F^t$, y como $\Bbbk_{\psi'}F' \simeq \mathrm{End}_{\Bbbk_\psi F}(P)$ debe ser que $F' = F^t$ y $\psi^t = \psi'$. □

5.5.3. $\mathrm{Rep}\,(H)$**-módulos para** H **un álgebra de supergrupo.** En la presente sección mostraremos una técnica desarrollada en [**53**] para la clasificación de $\mathrm{Rep}\,(H)$-módulos exactos, donde H es un álgebra de Hopf punteada. En principio esta técnica puede aplicarse a cualquier álgebra de Hopf punteda aunque en diversos ejemplos (tal es el caso de $u_q(\mathfrak{sl}_3)$) su implementación es bastante complicada. De hecho, la clasificación de los $\mathrm{Rep}\,(u_q(\mathfrak{sl}_3))$-módulos exactos es todavía un problema abierto.

La clasificación de las representaciones de $\mathrm{Rep}\,(H)$, donde H es un álgebra de supergrupo fue obtenida en [**36**]. Aquí presentamos una técnica diferente.

La estrategia es simple, sabemos que toda categoría $\operatorname{Rep}(H)$-módulo exacta proviene de una H-comódulo álgebra H-simple, ver Teorema 5.5.8. Para clasificar dichas comódulo álgebras primero clasificamos aquellas que son graduadas y luego calculamos todos los "levantes" de dichas álgebras. Para la clasificación de las H-comódulo álgebra H-simples Loewy-graduadas se usa el Corolario 6.5.10.

Sea G un grupo Abeliano finito, $u \in G$ un elemento de orden 2 y V un G-módulo de dimensión finita tal que $u \cdot v = -v$ si $v \in V$. El espacio V tiene estructura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ como sigue:

$$\delta : V \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} V, \qquad \delta(v) = u \otimes_{\Bbbk} v, \quad \text{para todo } v \in V.$$

El álgebra de Nichols de V, ver [**7**], es el álgebra exterior $\mathfrak{B}(V) = \wedge(V)$. La bosonización $\wedge(V)\#\Bbbk G$ es llamada en [**3**] un *álgebra de super-grupo finita* y es denotada por $\mathcal{A}(V, u, G)$. Denotar el elemento $v\#g$ simplemente por vg, si $v \in V, g \in G$.

El álgebra $\mathcal{A}(V, u, G)$ está generada por los elementos $v \in V, g \in G$ sujetos a las relaciones

$$vw + wv = 0, \quad gv = (g \cdot v)g, \text{ si } v, w \in V, g \in G.$$

El coproducto está determinado por

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + u \otimes v, \qquad \text{para todo } v \in V.$$

El álgebra de Hopf $\mathcal{A}(V, u, G)$ es coradicalmente graduada, con graduación dada por $\mathcal{A}(V, u, G) = \oplus_n \mathcal{A}(V, u, G)(n)$, donde $\mathcal{A}(V, u, G)(n)$ es igual al espacio vectorial

$$< \{g v_1^{r_1} \dots v_s^{r_s} : r_i = 0, 1 : 1 \leq i \leq s, r_1 + \dots + r_s = n, r_i = 0, 1, g \in G\} >_{\Bbbk},$$

y $\{v_1, \dots, v_s\}$ es una base de V.

De acuerdo con el Corolario 6.5.10 se deben estudiar las subálgebras coideales de las deformaciones por 2-cociclos de $\mathcal{A}(V, u, G)$. Esto se hará en lo que sigue.

Sea $\psi \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo y $\sigma_\psi : \mathcal{A}(V, u, G) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{A}(V, u, G) \to \Bbbk$ el 2-cociclo de Hopf definido en el Lema 6.5.9. La demostración del siguiente resultado es inmediata.

Lema 5.5.14. *Existe un isomorfismo de álgebras de Hopf*

$$\mathcal{A}(V, u, G)^{[\sigma_\psi]} \simeq \mathcal{A}(V, u, G).$$

□

En lo que sigue introduciremos $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulo álgebras simples que clasificaran las categorías módulo sobre $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}(V, u, G))$. Sea F un subgrupo de G y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$, W un subespacio no nulo de V F-invariante y $\beta : W \times W \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica F-invariante. Definimos el álgebra $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ generada por elementos de W y $\{e_f : f \in F\}$ sujetos a las relaciones

$$w_1 w_2 + w_2 w_1 = \beta(w_1, w_2)1, \quad e_f w_1 = (f \cdot w_1) e_f, \quad e_f e_g = \psi(f, g)\, e_{fg},$$

para todo $w_1, w_2 \in W, f, g \in F$. Alternativamente, uno podría definir al álgebra $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ como el producto semidirecto $Cl(W, \beta)\#\Bbbk_\psi F$, donde $Cl(W, \beta)$ es el álgebra de Clifford de la forma bilineal β. En particular se tiene que $\dim \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) = 2^{\dim W}|F|$.

Definimos el morfismo de álgebras

$$\lambda : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{A}(V, u, G)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$$

determinado por

$$\lambda(w) = w\otimes 1 + u\otimes w, \quad \lambda(e_f) = f\otimes e_f, \quad w \in W, f \in F.$$

Es inmediato comprobar que λ está bien definida y por lo tanto los espacios $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ son $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulo álgebras. Sea $\{w_1, \dots, w_\theta\}$ una base del espacio W.

Proposición 5.5.15. *Las siguientes afirmaciones se verifican:*

1. $\mathcal{L}(W, 0, F, 1)$ *es isomorfa a una subálgebra coideal a izquierda homogenea de* $\mathcal{A}(V, u, G)$.
2. *La filtración de Loewy de* $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ *está dada como sigue. Para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *el término* $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)_n$ *es*
$$< \{e_f w_1^{r_1} \dots w_\theta^{r_\theta} : r_i = 0, 1 : 1 \le i \le \theta, r_1 + \dots + r_\theta \le n, f \in F\} >_{\Bbbk} .$$
En particular $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)_0 = \Bbbk_\psi F$ *y* $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ *es un comódulo* $\mathcal{A}(V, u, G)$-*simple a derecha.*
3. *Existe un isomorfismo de* $\mathcal{A}(V, u, G)$-*comódulo álgebras*
$$\operatorname{gr} \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \simeq \mathcal{L}(W, 0, F, \psi).$$
4. *Existe un isomorfismo de* $\mathcal{A}(V, u, G)$-*comódulo álgebras*
$$\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \simeq \mathcal{L}(W', \beta', F', \psi')$$
si y sólo si $F = F'$, $W = W'$ *y* $\psi = \psi'$ *en* $H^2(F, \Bbbk^\times)$.

Demostración. La demostración de (1) y (2) es inmediata. La parte (3) sigue de (2). Veamos (4). Sea

$$\theta : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{L}(W', \beta', F', \psi')$$

un isomorfismo de comódulo álgebras. Como θ es morfismo de comódulos se tiene que

$$\lambda(\theta(e_f)) = f\otimes\theta(e_f),$$

para todo $f \in F$. Esto implica que $\theta(e_f) = \xi_f\, e_f$ para $\xi_f \in \Bbbk$ y para todo $f \in F$. Por lo tanto $F = F'$. Como θ es morfismo de álgebras se deduce que $\psi = \psi'$ en $H^2(F, \Bbbk^\times)$. Además como θ es morfismo de comódulos debe ocurrir también que $\theta(w) = w$ para todo $w \in W$. Luego $W = W'$. Como θ es un morfismo de álgebras se deduce que $\beta = \beta'$. □

Proposición 5.5.16. *Sea* $K = \oplus_i K(i) \subseteq \mathcal{A}(V, u, G)$ *una subálgebra coideal a izquierda homogenea. Entonces existe un subgrupo* F *de* G, W *un subespacio* F-*invariante (posiblemente nulo) de* V *tal que*

$$K \simeq \mathcal{L}(W, 0, F, 1)$$

como $\mathcal{A}(V, u, G)$-*comódulo álgebras a izquierda.* □

La demostración de la Proposición anterior es un ejercicio. Lo que hay que comprobar es que K está generada como álgebra por $K(0)$ y $K(1)$. Este hecho dependen fuertemente de la estructura de $\mathcal{A}(V,u,G)$ y no es válido para cualquier álgebra de Hopf punteada, como por ejemplo, no es válido para $u_q(\mathfrak{sl}_3)$.

El siguiente resultado puede demostrarse si se reemplaza $\mathcal{A}(V,u,G)$ por cualquier álgebra de Hopf que proviene de la bosonización de un espacio cuántico lineal.

Proposición 5.5.17. *Sea A un $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo álgebra tal que* $\operatorname{gr} A \simeq \mathcal{L}(W,0,F,\psi)$. *Entonces existe una forma bilineal simétrica F-invariante β tal que A es isomorfa a $\mathcal{L}(W,\beta,F,\psi)$ como comódulo álgebras.*

Demostración. Denotemos $A(n) = A_n/A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $\operatorname{gr} A = \oplus_{n=0} A(n)$. Notar que $A \simeq \oplus_{n=0} A(n)$ como espacios vectoriales, en particular se tiene que $A(1) = W \otimes_{\Bbbk} \Bbbk F$. Sea $\lambda : A \to \mathcal{A}(V,u,G) \otimes_{\Bbbk} A$ la coacción. Entonces $\lambda = \sum_{s=0} \lambda_s$, donde

$$\lambda_s : A \to \mathcal{A}(V,u,G) \otimes_{\Bbbk} A$$

son morfismos homogéneos de grado $-s$ donde λ_0 es la coacción de $\operatorname{gr} A$, es decir que coincide con la restricción del coproducto del álgebra de Hopf. Ver [**53**, Sección 5.2]. Observar que

$$\lambda_1(A(1)) \subseteq \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk F.$$

Sea $\{w_1, \dots, w_\theta\}$ una base de W tal que existen caracteres $\chi_i : G \to \Bbbk^\times$ tales que

$$g \cdot w_i = \chi_i(g)\, w_i, \ \text{ para todo } \ \ i = 1, \dots, \theta.$$

Afirmación 5.5.3. *Para cada $i = 1, \dots, \theta$ existen elementos $v_i \in A_1$ tales que la clase de v_i en $A_1/A_0 = A(1)$ es $\overline{v}_i = w_i$ y*

$$\lambda(v_i) = w_i \otimes 1 + u \otimes v_i, \quad e_f v_i = \chi_i(f)\, v_i e_f, \tag{5.5.4}$$

para todo $i = 1, \dots, \theta$, $f \in F$.

Demostración de la afirmación. Para cada $i = 1, \dots, \theta$ se tiene que $\lambda(v_i) = \lambda_0(v_i) + \lambda_1(v_i) = w_i \otimes 1 + u \otimes v_i + \lambda_1(v_i)$, donde $\lambda_1(v_i) \in \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} A_0$. Entonces $\lambda_1(v_i) = \sum_{h \in G, f \in F} \alpha_{h,f}\ h \otimes e_f$, donde $\alpha_{h,f} \in \Bbbk$. Por la coasociatividad se tiene que $(\operatorname{id} \otimes \lambda)\lambda = (\Delta \otimes \operatorname{id})\lambda$, entonces

$$\sum_{h \in G, f \in F} \alpha_{h,f}\ h \otimes h \otimes e_f = \sum_{h \in G, f \in F} \alpha_{h,f}\ h \otimes f \otimes e_f,$$

de lo cual deducimos que $\alpha_{h,f} = 0$ si $h \neq f$, por lo tanto $\lambda_1(v_i) = \sum_{f \in G} \alpha_{f,f}\ f \otimes e_f$. Como tenemos que $(\varepsilon \otimes \operatorname{id})\lambda(v_i) = v_i$, entonces

$$(\varepsilon \otimes \operatorname{id})\lambda_1(v_i) = 0,$$

y por lo tanto

$$\sum_{f \in F} \alpha_{f,f}\ (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(f \otimes e_f) = \sum_{f \in F} \alpha_{f,f}\ e_f = 0.$$

De lo cual deducimos que $\lambda_1(v_i) = 0$ y asi $\lambda(v_i) = w_i \otimes 1 + u \otimes v_i$.

Para cada $i = 1, \dots, \theta,\ f \in F$ definamos

$$\mathcal{P}_{i,f} = \{y \in A_1 : \lambda(y) = \mu\ f w_i \otimes e_f + uf \otimes y,\ \ \mu \in \Bbbk\}.$$

Los conjuntos $\mathcal{P}_{i,f}$ son espacios vectoriales no nulos, ya que $e_f v_i \in \mathcal{P}_{i,f}$, por lo tanto $\dim \mathcal{P}_{i,f} \geq 1$. Es evidente que si $(i,f) \neq (i',f')$ entonces $\mathcal{P}_{i,f} \cap \mathcal{P}_{i',f'} = \{0\}$. Como $\dim A_1 = \dim A(0) + \dim A(1) = \mid F \mid (1+\theta)$, esto implica que $\dim \mathcal{P}_{i,f} = 1$. Luego, como $e_f v_i e_{f^{-1}}, v_i \in \mathcal{P}_{i,1}$ existe un $\nu \in \Bbbk$ tal que $e_f v_i e_{f^{-1}} = \nu\ v_i$, pero este escalar debe ser igual a $\chi_i(f)$. □

Para cada $i = 1, \dots, \theta$ sean $v_i \in A_1$ tales que verifican (5.5.4). Entonces

$$\begin{aligned}\lambda(v_i v_j + v_j v_i) &= (w_i w_j + w_j w_i) \otimes 1 + 1 \otimes (v_i v_j + v_j v_i) \\ &= 1 \otimes (v_i v_j + v_j v_i).\end{aligned}$$

Por lo tanto $v_i v_j + v_j v_i \in A(0)$. Se puede demostrar que existe un escalar $\beta(v_i, v_j) \in \Bbbk$ tal que $v_i v_j + v_j v_i = \beta(v_i, v_j)1$. De esta manera β determina una forma bilineal simétrica en W. Se puede comprobar que además es F-invariante. Es decir que para todo $v, w \in W$ se tiene la siguiente relación en A

$$vw + wv = \beta(v,w)1.$$

Como $\operatorname{gr} A$ está generada por los elementos w_i, e_f entonces A está generada por los v_i, e_f, esto implica que existe un morfismo suryectivo $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \twoheadrightarrow A$. Como la dimensión de ambas algebras es igual dicho morfismo es un isomorfismo. □

Teorema 5.5.18. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}(V,u,G))$*-módulo exacta indescomponible. Entonces $\mathcal{M}$ es equivalente, como categoría módulo, a una de las siguientes categorías:*

1. ${}_{\Bbbk_\psi F}\mathfrak{m}$,
2. ${}_{\mathcal{L}(W,\beta,F,\psi)}\mathfrak{m}$,

para algún subgrupo F de G, $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$, W un subespacio no nulo F-invariante de V y $\beta : W \times W \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica F-invariante.

Demostración. Por el Teorema 5.5.8 sabemos que existe una $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo álgebra $\mathcal{A}(V,u,G)$-simple a derecha A tal que $A^{\mathrm{co}\mathcal{A}(\mathrm{V,u,G})} = \Bbbk$ y $\mathcal{M} \simeq {}_A\mathcal{M}$ como $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}(V,u,G))$-módulos. Como $\mathcal{A}(V,u,G)$ es coradicalmente graduada, por el Corolario 6.5.6, se tiene que $\operatorname{gr} A$ es una $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo álgebra $\mathcal{A}(V,u,G)$-simple a derecha. Como el coradical $\mathcal{A}(V,u,G)(0) = \Bbbk G$, entonces existe un subgrupo $F \subseteq G$ y un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que $\operatorname{gr} A(0) = \Bbbk_\psi F$. Por el Corolario 6.5.10 se tiene que $(\operatorname{gr} A)_{\sigma_\psi}$ es isomorfa, como $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo álgebra, a una subálgebra coideal a izquierda de $\mathcal{A}(V,u,G)$. Por la Proposición 5.5.15 existe un subgrupo F de G, W un subespacio (posiblemente nulo) de V F-invariante tal que $(\operatorname{gr} A)_{\sigma_\psi} \simeq \mathcal{L}(W,0,F,1)$. Si $W = 0$ entonces es inmediato comprobar que $A \simeq \Bbbk_\psi F$. Por lo tanto, asumamos que $W \neq 0$. Existe un isomorfismo de $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo álgebras

$$\operatorname{gr} A \simeq \mathcal{L}(W, 0, F, \psi).$$

El teorema sigue de la Proposición 5.5.17. □

Resta indicar cuales de las categorías módulo descriptas en el Teorema anterior son equivalentes.

Proposición 5.5.19. *Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. *Existe una equivalencia de* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}(V,u,G))$*-módulos*
$$_{\Bbbk_\psi F}\mathfrak{m} \simeq {}_{\Bbbk_{\psi'} F'}\mathfrak{m}$$
si y sólo si $F = F'$ *y* $\psi = \psi'$ *en* $H^2(F, \Bbbk^\times)$.
2. *Existe una equivalencia de* $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}(V,u,G))$*-módulos*
$$_{\mathcal{L}(W,\beta,F,\psi)}\mathfrak{m} \simeq {}_{\mathcal{L}(W',\beta',F',\psi')}\mathfrak{m}$$
si y sólo si existe un $g \in G$ *tal que* $W' = g \cdot W$, $\beta' = g \cdot \beta$, $F = F'$ *y* $\psi = \psi'$ *en* $H^2(F, \Bbbk^\times)$
3. *Las categorías módulo* $_{\Bbbk_{\psi'} F'}\mathfrak{m}$, $_{\mathcal{L}(W,\beta,F,\psi)}\mathfrak{m}$ *no son equivalentes.*

Demostración. La demostración sigue del Teorema 5.5.9 y la Proposición 5.5.15 (4). $\square$

5.6. La categoría tensorial dual

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita.

Proposición 5.6.1. *Sean* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ $\mathcal{C}$*-módulos exactos.*

(i) *La composición de funtores* $\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \times \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_1) \to \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_2)$ *es exacto en cada variable.*

(ii) *Cualquier funtor* $F \in \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *posee adjuntos a derecha e izquierda que son funtores en* $\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$.

Demostración. Ambas partes se deducen inmediatamente de la Proposición 5.3.12. $\square$

Vamos a denotar por $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} = \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ con la estructura monoidal dada por la composición de funtores.

Proposición 5.6.2. *Si* $\mathcal{M}$ *es un* $\mathcal{C}$*-módulo exacto entonces la categoría* $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ *es una categoría multitensorial. Si* $\mathcal{M}$ *es indescomponible entonces* $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ *es tensorial.*

Demostración. La rigidez de $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ se deduce de la Proposición 5.6.1 (ii) ya que los duales a derecha e izquierda de un funtor son los adjuntos a derecha e izquierda. Estos nuevamente son funtores de módulos por el ejercicio 5.1.13.

Asumamos que $\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ es una descomposición en categorías módulos exactas indescomponibles. Para $i = 1, \ldots, n$ sea $P_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ la proyección canónica. Entonces $\operatorname{Id}_{\mathcal{M}} = \oplus_{i=1}^n P_i$. Para finalizar la demostración basta con probar que P_i es un objeto simple en $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$. Sea $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_i$ un funtor de módulos que es un subobjeto de P_i. En particular $F|_{\mathcal{M}_j} = 0$ si $i \neq j$. Entonces para cada $0 \neq X \in \mathcal{M}_i$ se tiene que $F(X) \neq 0$. En particular si X es un objeto simple de $\mathcal{M}_i$ debe ser que $F(X)$ es un subobjeto de X y por lo tanto $F(X) = X$. Entonces $F = P_i$. $\square$

Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo exacto entonces $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-módulo via la acción

$$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, F\overline{\otimes}M = F(M),$$

para todo $F \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$, $M \in \mathcal{M}$. Además, si $\mathcal{N}$ es un $\mathcal{C}$-módulo entonces, por la Proposición 5.6.1 (i) la categoría $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ con acción dada por la composición de funtores.

En el siguiente Teorema se recopilan los resultados de [**36**, Lemma 3.25, Thm. 3.27, Thm. 3.31].

Teorema 5.6.3. *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo exacto indescomponible. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. *$\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$-módulo exacto indescomponible.*
2. *Existe una equivalencia de categorías tensoriales $(\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}})^*_{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{C}$.*
3. *Existe una correspondencia biyectiva entre módulos exactos indescomponibles sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$.* $\square$

Definición 5.6.4. Dos categorías tensoriales finitas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen *Morita equivalentes* si existe un $\mathcal{C}$-módulo indescomponible $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{D}^{rev}$.

Ejercicio 5.6.5. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial entonces existe una equivalencia tensorial $\mathcal{C}^*_{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{C}^{rev}$.

Ejemplo 5.6.6. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita entonces existe una equivalencia de categorías tensoriales

$$\mathrm{Rep}\,(H)^*_{vect_{\Bbbk}} \simeq \mathrm{Rep}\,(H^*).$$

Ejemplo 5.6.7. Sea G un grupo finito actuando sobre una categoría tensorial finita estricta $\mathcal{C}$. La categoría $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}[G]$-módulo de la siguiente manera. La acción

$$\overline{\otimes} : \mathcal{C}[G] \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad [X, g]\overline{\otimes}Y = X\otimes F_g(Y),$$

para todo $[X, g] \in \mathcal{C}[G]$, $Y \in \mathcal{C}$. Los isomorfismos de asociatividad están dados por

$$m_{[X,g],[Y,h],Z} : X\otimes F_g(Y\otimes F_h(Z)) \to X\otimes F_g(Y)\otimes F_{gh}(Z),$$

$$m_{[X,g],[Y,h],Z} = \mathrm{id}_{\,X}\otimes(\mathrm{id}_{\,F_g(Y)}\otimes(\gamma_{g,h})_Z)(\zeta_g)^{-1}_{Y,F_h(Z)}.$$

Afirmación 5.6.1. *$\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}[G]$-módulo exacto indescomponible. Además, existe una equivalencia monoidal $(\mathcal{C}^G)^{\mathrm{op}} \simeq (\mathcal{C}[G])^*_{\mathcal{C}}$. o es rev?*

Demostración de la afirmación. Que $\mathcal{C}$ es exacta sigue de que si un objeto $[X, g] \in \mathcal{C}[G]$ es proyectivo entonces $X \in \mathcal{C}$ es proyectivo. Que $\mathcal{C}$ es indescomponible sigue de que el objeto unidad $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ es simple. Ahora, definamos los funtores $\Phi : (\mathcal{C}^G)^{\mathrm{op}} \to$

$(\mathcal{C}[G])^*_{\mathcal{C}}$, $\Psi : (\mathcal{C}[G])^*_{\mathcal{C}} \to (\mathcal{C}^G)^{\mathrm{op}}$ de la siguiente manera. Para $(X, s) \in \mathcal{C}^G$, $Y \in \mathcal{C}$ definamos $\Phi(X, s)(Y) = Y \otimes X$. La estructura de funtor de módulos está dada por

$$c^{(X,s)}_{[Z,g],Y} : \Phi(X, s)([Z, g]\overline{\otimes} Y) \to [Z, g]\overline{\otimes}\Phi(X, s)(Y),$$

$$c^{(X,s)}_{[Z,g],Y} = \big(\mathrm{id}\,_Z \otimes (\zeta_g)_{Y,X}(\mathrm{id}\,_{F_g(Y)} \otimes s_g^{-1})\big).$$

Para todo funtor de módulos $(F, c^F) \in (\mathcal{C}[G])^*_{\mathcal{C}}$ definimos

$$\Psi(F, c^F) = (F(\mathbf{1}), s^F), \quad s^F_g = \big(c^F_{[\mathbf{1},g],\mathbf{1}}\big)^{-1}$$

□

Resultados: $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}})$ y $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \simeq (\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{rev})^*_{\mathcal{C}}$

5.7. Representaciones de las equivariantizaciones

5.8. La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}_A$

Asumamos que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial finita trenzada y $A \in \mathcal{C}$ un álgebra tal que

- A es conmutativa,
- A es un objeto simple en $\mathcal{C}_A$,
- la categoría módulo $\mathcal{C}_A$ es exacta.

En particular, esto implica que la categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ es una categoría tensorial finita. Por lo tanto la categoría $\mathcal{C}_A$ hereda una estructura de categoría tensorial finita y el funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$, dado por $F(X) = X \otimes A$ es un funtor tensorial. El funtor de olvido $I : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ es adjunto a derecha de F.

Teorema 5.8.1. *Bajo las anteriores hipótesis, se tiene que*

$$\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C}_A)\mathrm{FPdim}\,_{\mathcal{C}}(I(A)) = \mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C})$$

Demostración. El functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$, $F(X) = X \otimes A$ es un funtor tensorial dominante, Lema 4.1.3, por lo tanto por el Teorema 3.9.10 se tiene que

$$F(R_{\mathcal{C}}) = \frac{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C}_A)}\, R_{\mathcal{C}_A}.$$

Denotemos por I (respectivamente J) el conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de $\mathcal{C}$ (respectivamente $\mathcal{C}_A$). Por la definición del objeto regular $R_{\mathcal{C}}$ se tiene que:

$$\sum_{S \in I} \mathrm{FPdim}\,_{\mathcal{C}}(S)\, F(P(S)) = \frac{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}\,(\mathcal{C}_A)} \sum_{\widetilde{S} \in J} \mathrm{FPdim}\,_{\mathcal{C}_A}(\widetilde{S})\, P(\widetilde{S}).$$

Recordemos que $P(S)$ denota el cubrimiento proyectivo de un objeto. De esta igualdad se deduce que

$$\sum_{S \in I} \mathrm{FPdim}\,_{\mathcal{C}}(S)\, [F(P(S)), A] \tag{5.8.1}$$

es igual a

$$\frac{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})}{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}_A)} \sum_{\widetilde{S}\in J} \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}_A}(\widetilde{S})\,[P(\widetilde{S}), A] =$$
$$= \frac{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})}{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}_A)} \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}_A}(A) = \frac{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})}{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}_A)}.$$

Como el funtor $I : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ es adjunto a derecha de F, usando la ecuación (3.9.1) obtenemos que (5.8.1) es igual a

$$\sum_{S\in I} \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}}(S)\ \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(P(S), I(A) = \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}}(I(A))$$

□

Corolario 5.8.2. *Sea $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ un álgebra conmutativa tal que $A \in \mathcal{C}_A$ es simple. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una equivalencia monoidal $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^0_A \simeq vect_{\Bbbk}$.*
2. $\operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}}(I(A)) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$*.*

Demostración. Por [**64**, Corollary 4.5] existe una equivalencia de categorías tensoriales trenzadas $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^0_A \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{C}_A)$, por lo tanto, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})^0_A \simeq vect_{\Bbbk}$ si y sólo sí $\mathcal{Z}(\mathcal{C}_A) \simeq vect_{\Bbbk}$ si y sólo sí $\mathcal{C}_A \simeq vect_{\Bbbk}$. Usando el Teorema 5.8.1 obtenemos que esto último equivale a $\operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}}(I(A)) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$. □

5.9. La dimensión de Frobenius-Perron de una categoría módulo

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado y de característica cero. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo exacto. En esta sección recordaremos la definición de dimensión de Frobenius-Perron de objetos simples en $\mathcal{M}$. Dicha definición fue definida en [**34**].

Sea $\{M_i : i \in I\}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{M}$. Para cada $X \in \mathcal{C}$ escribamos

$$X\overline{\otimes}M_i \simeq \oplus_{j\in I}\, N^X_{i,j}\, M_j.$$

Proposición 5.9.1. *Para cada $i \in I$, existen $d_i \in \Bbbk$ tales que, para todo $X \in \mathcal{C}$, se tiene que*

$$\operatorname{FPdim}(X) d_i = \sum_{j\in I} N^X_{i,j}\, d_j. \tag{5.9.1}$$

Demostración. Sea A el álgebra de endomorfismos $\Bbbk$-lineales de $G_0(\mathcal{M})\otimes_{\mathbb{Z}}\Bbbk$. Para cada $X \in \mathcal{C}$ denotamos H_X el elemento en A tal que para todo $M \in \mathcal{M}$

$$H_X(\langle M\rangle) = \langle X\overline{\otimes}M\rangle.$$

Sea $\widetilde{A}$ la subálgebra de A generada por las transformaciones H_X para $X \in \mathcal{C}$. El álgebra $\widetilde{A}$ es un álgebra transitiva con base distinguida $\{H_S : S \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})\}$. Sea $T = \sum_{X\in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})} H_X \in$

A. Definamos $\mathcal{T}:\widetilde{A}\to\widetilde{A}$, $\mathcal{T}(a)=aT$ para todo $a\in\widetilde{A}$. Es claro que la matriz de $\mathcal{T}$ en la base distinguida posee coeficientes estrictamentes positivos. Por el Teorema de Frobenius-Perron 3.9.3 se tiene un autovector simple $R\in\widetilde{A}$ de autovalor λ. Es decir, $RT=\lambda\, R$. Si $X\in\mathcal{C}$ entonces

$$\mathcal{T}(H_X R)=H_X RT=\lambda\, H_X R,$$

por la unicidad del autovector, se tiene que existe un escalar $\xi_X\in\Bbbk$ tal que $H_X R=\xi_X\, R$. Si $Y\in\mathcal{C}$, se tiene

$$\xi_{X\otimes Y}\, R=H_{X\otimes Y}R=H_X H_Y R=\xi_Y\xi_X\, R,$$

por lo tanto $\xi_{X\otimes Y}=\xi_Y\xi_X$. Por la unicidad de la dimensión de Frobenius-Perron, ver Proposición 3.9.5, se tiene que $\xi_X=\operatorname{FPdim}(X)$, para todo $X\in\mathcal{C}$.

Asumamos que para todo $i\in I$ se tiene que $R(M_i)=\sum_j r_{i,j}M_j$. Como $H_X R=\operatorname{FPdim}(X)R$, entonces

$$\sum_{j,k} r_{i,j}N_{k,j}^{X}\, M_k=\operatorname{FPdim}(X)\sum_j r_{i,j}M_j.$$

Por lo tanto $\sum_k r_{i,j}N_{k,j}^{X}=\operatorname{FPdim}(X)r_{i,j}$. Tomando $d_j=r_{i,j}$ se tiene la igualdad (5.9.1). $\square$

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Álgebras de Hopf débiles

En esta sección repasaremos la noción de *álgebra de Hopf débil* o *grupoide cuántico*. Además mostraremos que la categorías de representaciones de un álgebra de Hopf débil es una categoría monoidal rígida. La mayor parte de las demostraciones son tomadas de [**60**].

Una *biálgebra débil* sobre $\Bbbk$ es una colección (H, m, Δ), donde (H, m) es una $\Bbbk$-álgebra asociativa con unidad y (H, Δ) es una $\Bbbk$-coálgebra coasociativa con counidad ε, tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \tag{6.1.1}$$

$$\Delta^{(2)}(1) = (\Delta(1) \otimes 1)\,(1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))\,(\Delta(1) \otimes 1)\,. \tag{6.1.2}$$

$$\varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c) = \varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c), \tag{6.1.3}$$

para todo $a, b, c \in H$.

Una bialgebra débil H es un *álgebra de Hopf débil* o un *grupoide cuántico* si existe un operador lineal $\mathcal{S} : H \to H$ que verifica

$$m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta(h) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}\,)\,(\Delta(1)(h \otimes 1)) =: \varepsilon_t(h), \tag{6.1.4}$$

$$m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\,((1 \otimes h)\Delta(1)) =: \varepsilon_s(h), \tag{6.1.5}$$

$$m^{(2)}(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta^{(2)} = \mathcal{S}, \tag{6.1.6}$$

para todo $h \in H$. Las aplicaciones ε_s, ε_t son llamadas, respectivamente, la fuente y el final; sus imágenes son llamadas las subálgebras fuente y final, y se denotan respectivamente por H_s y H_t.

Observación 6.1.1. Un grupoide cuántico es un álgebra de Hopf en el sentido usual si y sólo si $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, si y sólo si ε es un morfismo de álgebras. En tal caso las subalgebras fuente y final coinciden con $\Bbbk 1$.

Ejemplo 6.1.2. Sea $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide. El álgebra de grupoide $\Bbbk\mathcal{G}$ posee una estructura de álgebra de Hopf débil vía: $\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. La subálgebra final de esta álgebra de Hopf débil coincide con la subálgebra fuente y es $\Bbbk\mathcal{P} := \oplus_{P \in \mathcal{P}} \Bbbk \,\mathrm{id}_{\,P}$.

Ejemplo 6.1.3. Sea R una $\Bbbk$-álgebra separable y sea $e \in R \otimes_{\Bbbk} R$ el elemento de separabilidad simétrico de R. Sea $\omega \in R^*$ el elemento definido unívocamente por

$$(\omega \otimes \mathrm{id}\,)e = (\mathrm{id} \otimes \omega)e = 1.$$

Se puede chequear que ω es la traza de la representación regular a izquierda de R. Para el elemento e usaremos la notación estándar $e = e^1 \otimes e^2$.

Sea $H = R^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} R$. La estructura de álgebra sobre H es la del producto tensorial de álgebras, la comultiplicación, counidad y antípoda están dadas por

$$\Delta(x \otimes y) = (x \otimes e^1) \otimes (e^2 \otimes y), \tag{6.1.7}$$

$$\varepsilon(x \otimes y) = \omega(xy), \tag{6.1.8}$$

$$\mathcal{S}(x \otimes y) = y \otimes x, \tag{6.1.9}$$

para todo $x, y \in R$. Con esta estructura resulta que H es un álgebra de Hopf débil.

Lema 6.1.4. *Sea H un álgebra de Hopf débil de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

(i) *Para todo $z \in H_t$, $w \in H_s$ se tiene que*

$$\varepsilon_t(z) = z, \quad \varepsilon_s(w) = w; \tag{6.1.10}$$

$$\Delta(z) = 1_{(1)} z \otimes 1_{(2)}, \quad \Delta(w) = 1_{(1)} \otimes w 1_{(2)}; \tag{6.1.11}$$

(ii) *todo elemento de H_t conmuta con los elementos de H_s;*
(iii) $\Delta(1) \in H_s \otimes H_t$.
(iv) *para todo $x, y \in H$ se tiene que*

$$x \epsilon_t(y) = \epsilon(x_{(1)} y) x_{(2)}, \quad \epsilon_s(x) y = x_{(1)} \epsilon(y x_{(2)}).$$

(v) *La subálgebra final H_t es un H-módulo a izquierda con acción:*

$$h \cdot z = \epsilon_t(hz), \qquad \textit{para todo } h \in H,\ z \in H_t.$$

Demostración. Ver [**60**]. □

Remark 6.1.5. Por [**60**, Prop. 2.3.4] la subálgebra final es separable con elemento de separabilidad dado por

$$e_t = \mathcal{S}(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}.$$

Por lo tanto H_t es semisimple y luego todo H_t-módulo es proyectivo. En este caso, si H_t es conmutativa H es un *álgebra de faz* en el sentido de Hayashi [**45**].

Definición 6.1.6. [**32**] Un álgebra de Hopf débil H se dice *regular* si el cuadrado de la antipoda S^2 es la identidad en las subalgebras final y fuente de H.

6.1.1. La categoría de representaciones de un álgebra de Hopf débil. Si H es un grupoide cuántico, denotaremos por $\mathrm{Rep}\,(H)$ a la categoría de H-módulos a izquierda de dimensión finita.

Si $X, Y \in \mathrm{Rep}\,(H)$ definimos el producto tensorial:

$$X \otimes Y = \Delta(1) \cdot (X \otimes_{\Bbbk} Y) = \{z \in X \otimes_{\Bbbk} Y, \mid x = \Delta(1) \cdot z\},$$

La acción a izquierda de H en $X \otimes Y$ está dada por:

$$h \cdot z = \Delta(h)z,$$

para todo $h \in H, z \in X \otimes Y$. Si $X, Y, Z \in \mathrm{Rep}\,(H)$, el isomorfismo de asociatividad $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y,) \otimes Z \to X \otimes (Y, \otimes Z)$ es la restricción de la asociatividad de espacios vectoriales. Como Δ es coasociativa, la asociatividad es un morfismo en la categoría.

La subálgebra final H_t es la unidad de la categoría $\mathrm{Rep}\,(H)$. Si $V \in \mathrm{Rep}\,(H)$, los morfismos de unidad a izquierda y derecha están dados por

$$l_V : H_t \otimes V \to V, \quad r_V : V \otimes H_t \to V,$$

$$l_V(1_{(1)} \cdot z \otimes 1_{(2)} \cdot v) = z \cdot v, \quad r_V(1_{(1)} \cdot v \otimes 1_{(2)} \cdot z) = \mathcal{S}(z) \cdot v,$$

para todo $z \in H_t$, $v \in V$. Se puede comprobar que estos morfismos son invertibles, con inversos

$$l_V^{-1}(v) = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} \cdot v, \quad r_V^{-1}(v) = 1_{(1)} \cdot v \otimes 1_{(2)},$$

para todo $z \in H_t$, $v \in V$. Verifiquemos que l_V es un morfismo de H-módulos.

$$\begin{aligned}
l_V(h \cdot (1_{(1)} \cdot z \otimes 1_{(2)} \cdot v)) &= l_V(h_{(1)} \cdot z \otimes h_{(2)} \cdot v) \\
&= l_V(1_{(1)} \cdot (h_{(1)} \cdot z) \otimes 1_{(2)} \cdot (h_{(2)} \cdot v)) \\
&= (h_{(1)} \cdot z) \cdot (h_{(2)} \cdot v) = \epsilon_t(h_{(1)}z)h_{(2)} \cdot v \\
&= \epsilon(1_{(1)}h_{(1)}z)1_{(2)}h_{(2)} \cdot v \\
&= \epsilon(h_{(1)}z)h_{(2)} \cdot v = h\epsilon_t(z) \cdot v \\
&= h \cdot l_V(1_{(1)} \cdot z \otimes 1_{(2)} \cdot v).
\end{aligned}$$

La quinta igualdad se debe a la definición de ϵ_t, la séptima igualdad por el Lema 6.1.4 (iv).

La categoría $\mathrm{Rep}\,(H)$ es rígida. Si $V \in \mathrm{Rep}\,(H)$ definimos el dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$. La acción de H en V^* está dada por

$$(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v), \quad h \in H, v \in V, f \in V^*.$$

La evaluación y coevaluación son

$$ev_V : V^* \otimes V \to H_t, \qquad e_V(\sum f \otimes v) = \sum f(1_{(1)} \cdot v)1_{(2)},$$

$$coev_V : H_t \to V \otimes V^*, \qquad coev_V(z) = z \cdot \sum_i v_i \otimes v^i.$$

para $\sum f \otimes v \in V^* \otimes V$ y donde $\{v_i\}$, $\{v^i\}$ son bases duales de V y V^* respectivamente.

6.1.2. Funtores de fibra para álgebras de Hopf débiles. Si H es un álgebra de Hopf débil, entonces todo H-módulo M es un $H_t \otimes H_s$-módulo, ya que por el Lema 6.1.4 (ii) H_t conmuta con H_s. Como la antípoda $\mathcal{S}^{-1} : H_t \to H_s$ es un anti-isomorfismo de álgebras todo H-módulo M es un H_t-bimódulo. Más explícitamente la estructura de H_t-bimodulo esta dada por

$$x \cdot m \cdot y := x\mathcal{S}(y) \cdot m,$$

para todo $x, y \in H_t$, $m \in M$. Entonces tenemos definido un funtor *de olvido*

$$\mathcal{F} : \mathrm{Rep}\,(H) \longrightarrow {}_{H_t}\mathfrak{m}_{H_t}.$$

Lema 6.1.7. *Si H es un álgebra de Hopf débil regular el funtor $\mathcal{F}$ definido anteriormente posee una estructura de funtor tensorial.*

Demostración. A lo largo de la demostración se usará que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ en H_t (regularidad). Primero probemos que la identidad $\mathcal{F}(H_t) \to H_t$ es un morfismo de H_t-bimódulos. Esto ocurre si y sólo si

$$\epsilon_t(S(y)x) = xy, \tag{6.1.12}$$

para todo $x, y \in H_t$. Observar que (6.1.12) sigue de $\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)$ para todo $x \in H_t$, ya que:

$$\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)\epsilon_s(y) = \epsilon_s(\epsilon_s(x)y). \tag{6.1.13}$$

La segunda igualdad por [**15**, eq. 2.5b]. Por lo tanto, aplicando la antípoda en ambos miembros de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} xy &= \mathcal{S}(\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x)) = (\mathcal{S} \circ \epsilon_s)(\epsilon_s(x)y) = (\epsilon_t \circ \mathcal{S})(\epsilon_s(x)y) \\ &= \epsilon_t(\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(\epsilon_s(x))) = \epsilon_t(\mathcal{S}(y)\epsilon_t(x)) = \epsilon_t(\mathcal{S}(y)x). \end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a que $\mathcal{S}$ es un antimorfismo de algebras [**15**, Thm. 2.10] y a que $\mathcal{S}^2 \mid_{H_t} = \mathrm{id}_{H_t}$, la segunda a (6.1.13) y la tercera igualdad se debe a que $S \circ \epsilon_s = \epsilon_t \circ S$ [**15**, Lemma 2.9]. Ahora probemos que $\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)$ para todo $x \in H_t$. Por [**15**, eq. 2.7a] si $x \in H_t$ entonces $\Delta(x) = 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)}$ luego

$$\begin{aligned} \epsilon_s(x) &= \mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)} = \mathcal{S}(1_{(1)}x)1_{(2)} \\ &= \mathcal{S}(x)\mathcal{S}(1_{(1)})1_{(2)} = \mathcal{S}(x). \end{aligned}$$

Sean $V, W \in \mathrm{Rep}\,(H)$. Para cada $m \in V, n \in W$ denotaremos por $\overline{m \otimes n}$ la clase de $m \otimes n$ en $V \otimes_{H_t} W$. Los isomorfismos naturales

$$\zeta_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes_{H_t} W, \quad \zeta(\Delta(1) m \otimes n) = \overline{m \otimes n}$$

proveen a $\mathcal{F}$ de una estructura tensorial. Las aplicaciones $\zeta_{V,W}$ son biyecciones cuyas inversas están dadas por $\zeta_{V,W}^{-1}(\overline{m \otimes n}) = 1_{(1)} \cdot m \otimes 1_{(2)} \cdot n$, para todo $m \in V, n \in W$. Estas aplicaciones están bien definidas, es decir que no dependen de los representantes de la clase $\overline{m\otimes n}$. Sea $x \in H_t$ entonces

$$\begin{aligned}\zeta^{-1}_{V,W}(\overline{m\cdot x\otimes n}) &= 1_{(1)}\mathcal{S}(x)\cdot m\otimes 1_{(2)}\cdot n = 1_{(1)}\mathcal{S}^{-1}(x)\cdot m\otimes 1_{(2)}\cdot n\\ &= (\mathcal{S}^{-1}\otimes \mathrm{id}\,)((x\otimes 1)e_t).(m\otimes n) = (\mathcal{S}^{-1}\otimes \mathrm{id}\,)(e_t(1\otimes x)).(m\otimes n)\\ &= 1_{(1)}\cdot m\otimes 1_{(2)}x\cdot n = \zeta^{-1}_{V,W}(\overline{m\otimes x\cdot n}).\end{aligned}$$

La cuarta igualdad se debe a que e_t es el elemento de separabilidad de H_t, ver Observación 6.1.5.

Las funciones $\zeta_{V,W}$ son morfismos de H_t-bimódulos. De hecho si $x \in H_t$ y $m \in V, n \in W$, entonces

$$\begin{aligned}\zeta_{V,W}(x\cdot \Delta(1)m\otimes n) &= \zeta_{V,W}(\Delta(x)\cdot(m\otimes n))\\ &= \zeta_{V,W}(1_{(1)}x\cdot m\otimes 1_{(2)}\cdot n)\\ &= \overline{x\cdot m\otimes n} = x\cdot\zeta_{V,W}(\Delta(1)m\otimes n).\end{aligned}$$

La segunda igualdad por (6.1.11). Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\zeta_{V,W}((\Delta(1)m\otimes n)\cdot x) &= \zeta_{V,W}(\Delta(\mathcal{S}(x))(m\otimes n))\\ &= \zeta_{V,W}(1_{(1)}\cdot m\otimes \mathcal{S}(x)1_{(2)}\cdot n)\\ &= \zeta_{V,W}(\Delta(1)(m\otimes n\cdot x)) = \overline{m\otimes n\cdot x}\\ &= \zeta_{V,W}((\Delta(1)m\otimes n))\cdot x.\end{aligned}$$

La segunda igualdad usando, nuevamente (6.1.11). Es fácil comprobar que (3.1.3), (3.1.4) y (3.1.5) se verifican.

□

6.1.3. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf débiles. Sea H un álgebra de Hopf débil.

Definición 6.1.8. Una *H-comodulo álgebra a izquierda* es un H-comódulo a izquierda K con coacción $\lambda : K \to H\otimes_{\Bbbk} K$ tal que para todo $x, y \in K$

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y), \tag{6.1.14}$$

$$\lambda(1) = (\epsilon_s\otimes \mathrm{id}\,_K)\lambda(1), \tag{6.1.15}$$

We shall use the notation $\lambda(x) = x_{(-1)}\otimes x_{(0)}$ and $\lambda(1) = 1_{(-1)}\otimes 1_{(0)} = 1'_{(-1)}\otimes 1'_{(0)}$.

Ejemplo 6.1.9. H y H_t son H-comódulo álgebras a izquierda vía Δ.

El siguiente resultado técnico se usará más adelante.

Lema 6.1.10. *Sea K un H-comodulo álgebra a izquierda, entonces*

$$1_{(-1)(1)}\otimes 1_{(-1)(2)}\otimes 1_{(0)} = 1_{(1)}\otimes 1_{(-1)}1_{(2)}\otimes 1_{(0)} = 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}1_{(-1)}\otimes 1_{(0)}.$$

Demostración. Sigue de (6.1.15) y (6.1.11). □

Lema 6.1.11. *Sea K un H-comodulo álgebra a izquierda. Para todo $x \in K$ y para todo $z \in H_t$ las siguientes identidades en $H \otimes_{\Bbbk} K$ se satisfacen:*

$$\epsilon_s(x_{(-1)}) \otimes x_{(0)} = 1_{(-1)} \otimes x 1_{(0)}; \tag{6.1.16}$$

$$S(z) 1_{(-1)} \otimes 1_{(0)} = 1'_{(-1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z) 1_{(0)} 1'_{(0)}. \tag{6.1.17}$$

Demostración. Por definición de la aplicación fuente tenemos que

$$\begin{aligned}
\epsilon_s(x_{(-1)}) \otimes x_{(0)} &= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(1)} \otimes x_{(0)} \\
&= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(1)} \otimes x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(-1)(2)}) 1_{(-1)(1)} \otimes x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= 1_{(-1)} \otimes \epsilon(x_{(-1)} 1_{(0)(-1)}) x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= 1_{(-1)} \otimes x 1_{(0)}.
\end{aligned}$$

La segunda ecuación se debe a que $\lambda(x) = \lambda(x)\lambda(1)$ y la tercera por el Lema 6.1.10.

Afirmamos que la siguiente igualdad se verifica:

$$1_{(1)} \otimes \epsilon(z 1_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(0)} = 1'_{(-1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z) 1_{(0)} 1'_{(0)}. \tag{6.1.18}$$

La igualdad (6.1.16) implica que

$$1_{(-1)} z \otimes \epsilon_s(1_{(0)(-1)}) \otimes 1_{(0)(0)} = 1_{(-1)} z \otimes 1'_{(-1)} \otimes 1_{(0)} 1'_{(0)}.$$

Aplicando $\epsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ en ambos lados de esta igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
1'_{(-1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z) 1_{(0)} 1'_{(0)} &= \epsilon(1_{(-1)} z) \epsilon_s(1_{(0)(-1)}) \otimes 1_{(0)(0)} \\
&= \epsilon(1_{(1)} z) \epsilon_s(1_{(-1)} 1_{(2)}) \otimes 1_{(0)} \\
&= \epsilon(1_{(-1)} 1_{(2)} 1'_{(2)}) 1'_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1)} z) 1_{(0)} \\
&= 1'_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1)} z) \epsilon(1_{(-1)} 1_{(2)} 1'_{(2)}) 1_{(0)} \\
&= 1'_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z 1'_{(2)}) 1_{(0)}.
\end{aligned}$$

Con esto demostramos (6.1.18). Por la ecuación [**18**, 2.31b] se tiene que $1_{(1)} \otimes z 1_{(2)} = S(z) 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}$ para todo $z \in H_t$. Esto implica que para todo $z \in H_t$

$$1_{(1)} \otimes 1_{(-1)} z 1_{(2)} \otimes 1_{(0)} = S(z) 1_{(1)} \otimes 1_{(-1)} 1_{(2)} \otimes 1_{(0)}.$$

Aplicando $\mathrm{id}_H \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id}_K$ tenemos que

$$\begin{aligned}
1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z 1_{(2)}) 1_{(0)} &= \epsilon(1_{(-1)} 1_{(2)}) S(z) 1_{(1)} \otimes 1_{(0)} \\
&= S(z) 1_{(-1)} \otimes 1_{(0)}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad por el Lema 6.1.10. Usando la ecuación (6.1.18) demostramos (6.1.17).

$\square$

6.1.4. Categorías módulo sobre álgebras de Hopf débiles. Sea H un álgebra de Hopf débil de dimensión finita. En lo siguiente, si K es una H-comódulo álgebra a izquierda, X un H-módulo a izquierda y M es un K-módulo a izquierda, denotaremos por

$$X\overline{\otimes}M := \lambda(1)(X\otimes_{\Bbbk}M) = \{w \in X\otimes_{\Bbbk}M : \lambda(1)w = w\}.$$

Sea K una H-comódulo álgebra a izquierda. Entonces tenemos un funtor $\overline{\otimes} : \operatorname{Rep}(H)\times {}_K\mathfrak{m} \to {}_K\mathfrak{m}$, donde la acción de K en $X\overline{\otimes}M$ es

$$k.(x\otimes m) = k_{(-1)} \cdot x\otimes k_{(0)} \cdot m,$$

para todo $k \in K, x \in X, m \in M$. Definamos $m_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\overline{\otimes}M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M)$, $u_M : H_t\overline{\otimes}M \to M$, $X, Y \in \operatorname{Rep}(H), M \in {}_K\mathcal{M}$ por

$$m_{X,Y,M}((x\otimes y)\otimes m) = x\otimes(y\otimes m),$$
$$u_M(z\otimes m) = \epsilon(1_{(-1)}z)1_{(0)} \cdot m,$$

para todo $x, y \in H$, $z \in H_t$, $m \in M$.

Proposición 6.1.12. *Con la notación anterior la categoría ${}_K\mathfrak{m}$ es una categoría módulo sobre* $\operatorname{Rep}(H)$.

Demostración. Verificaremos solamente que (5.1.6) se cumple. Los otros axiomas son inmediatos. Demostraremos que para todo $X \in \operatorname{Rep}(H), M \in {}_K\mathfrak{m}$ la ecuación

$$r_X\otimes\mathrm{id}_M = (\mathrm{id}_x\otimes u_M)m_{X,H_t,M}$$

se verifica, donde $r_X : X\otimes H_t \to X$ está definido por $r_X(x\otimes z) = \mathcal{S}(z) \cdot x$ para todo $x \in X, z \in H_t$.

Sean $z \in H_t, x \in X, m \in M$ entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_x\otimes u_M)m_{X,H_t,M}((x\otimes z)\otimes m) &= x\otimes\epsilon(1_{(-1)}z)1_{(0)} \cdot m\\ &= 1'_{(-1)} \cdot x\otimes\epsilon(1_{(-1)}z)1'_{(0)}1_{(0)} \cdot m\\ &= \mathcal{S}(z)1_{(-1)} \cdot x\otimes 1_{(0)} \cdot m\\ &= (r_X\otimes\mathrm{id}_M)(x\otimes z\otimes m).\end{aligned}$$

La tercera igualdad por (6.1.17). □

6.2. Álgebras cuasi-Hopf

Una *cuasi-biálgebra* [**22**] es una colección $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ donde A es un álgebra asociativa con unidad, $\Phi \in (A\otimes_{\Bbbk}A\otimes_{\Bbbk}A)^{\times}$ es un elemento invertible llamado el *asociador*, y $\Delta : A \to A\otimes_{\Bbbk}A$, $\varepsilon : A \to \Bbbk$ son morfismos de álgebras que satisfacen

$$\Phi(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(h)) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(h))\Phi, \tag{6.2.1}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\Delta(h)) = h = (\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Delta(h)), \tag{6.2.2}$$

para todo $h \in A$. El asociador Φ debe ser un 3-cociclo, es decir que

$$(1\otimes\Phi)(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Phi)(\Phi\otimes 1) = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi)(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Phi), \tag{6.2.3}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Phi) = 1\otimes 1\otimes 1. \tag{6.2.4}$$

Decimos que A es un *álgebra cuasi-Hopf* si existe un antimorfismo de álgebras $S : A \to A$ y elementos $a, b \in A$ tales que para todo $h \in A$, se tiene:

$$S(h_{(1)})ah_{(2)} = \varepsilon(h)a \quad \text{y} \quad h_{(1)}bS(h_{(2)}) = \varepsilon(h)b, \tag{6.2.5}$$

$$\Phi^1 \mathrm{S}(\Phi^2)a\Phi^3 = 1 \quad \text{y} \quad S(\Phi^{-1})a\Phi^{-2}bS(\Phi^{-3}) = 1. \tag{6.2.6}$$

Usamos la notación $\Phi = \Phi^1\otimes\Phi^2\otimes\Phi^3$, $\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\otimes\Phi^{-3}\otimes\Phi^{-3}$.

Un elemento invertible $J \in A\otimes_{\Bbbk} A$ es llamado un *twist* si $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(J) = 1 = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(J)$. Si A es un álgebra cuasi-Hopf y $J = J^1\otimes J^2 \in A\otimes_{\Bbbk} A$ es un twist con inverso $J^{-1} = J^{-1}\otimes J^{-2}$, entonces podemos definir un álgebra cuasi-Hopf sobre la misma álgebra A manteniendo la counidad y la antípoda, y reemplazando el coproducto, asociador y los elementos a, b por

$$\Delta_J(h) = J\Delta(h)J^{-1}, \tag{6.2.7}$$

$$\Phi_J = (1\otimes J)(\mathrm{id}\otimes\Delta)(J)\Phi(\Delta\otimes\mathrm{id})(J^{-1})(J^{-1}\otimes 1), \tag{6.2.8}$$

$$a_J = S(J^{-1})aJ^{-2}, \quad b_J = J^1 bS(J^2). \tag{6.2.9}$$

Esta es una nueva álgebra cuasi-Hopf que denotaremos por (A_J, Φ_J). Si $\Phi = 1$ entonces $\Phi_J = dJ$.

Ejemplo 6.2.1. Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo. Sea $A = \Bbbk^G$ el álgebra de funciones sobre el grupo G. Definimos

$$\Phi_\omega = \sum_{g,h,f\in G} \omega(g, h, f)\ \delta_g\otimes\delta_h\otimes\delta_f.$$

Entonces (A, Φ_ω) es un álgebra cuasi-Hopf.

6.2.1. La categoría de representaciones de un álgebra cuasi-Hopf. Fijemos un álgebra cuasi-Hopf $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ de dimensión finita. Vamos a denotar por $\mathrm{Rep}\,(A, \Phi)$ la categoría de A-módulos de dimensión finita. Esta categoría posee una estructura monoidal como sigue. El producto tensorial está dado por $\otimes_{\Bbbk}$ y la unidad es el cuerpo $\Bbbk$ con acción de A dada por la counidad. La acción sobre el producto tensorial está dada por la coacción de A.

Si $X, Y, Z \in \mathrm{Rep}\,(A, \Phi)$ los isomorfismos de asociatividad

$$a_{X,Y,Z} : (X\otimes_{\Bbbk} Y)\otimes_{\Bbbk} Z \to X\otimes_{\Bbbk}(Y\otimes_{\Bbbk} Z),$$

$$a_{X,Y,Z}(x\otimes y\otimes z) = \Phi^1 \cdot x\otimes\Phi^2 \cdot y\otimes\Phi^3 \cdot z,$$

para todo $x \in X, y \in Y, z \in Z$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda son los triviales.

6.2.2. Comódulo álgebras sobre álgebras cuasi-Hopf. Sea (A, Φ) un álgebra cuasi-Hopf.

Definición 6.2.2. Un A-comódulo álgebra es una colección $(K, \lambda, \Phi_\lambda)$ donde:

- K es un álgebra,
- $\lambda : K \to A \otimes_{\Bbbk} K$ es un morfismo de álgebras
- $\Phi_\lambda \in A \otimes_{\Bbbk} A \otimes_{\Bbbk} K$ es un elemento invertible tal que

$$(1 \otimes \Phi_\lambda)(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi_\lambda)(\Phi \otimes 1) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \lambda)(\Phi_\lambda)(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi_\lambda), \tag{6.2.10}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi_\lambda) = 1, \tag{6.2.11}$$

$$\Phi_\lambda(\Delta \otimes \mathrm{id})\lambda(x) = \big((\mathrm{id} \otimes \lambda)\lambda(x)\big)\Phi_\lambda, \quad \text{para todo } \ x \in K. \tag{6.2.12}$$

Observación 6.2.3. La noción de comódulo álgebra para álgebras cuasi-Hopf no coincide con la noción de comódulo álgebra para álgebras de Hopf usuales ya que la coacción no es coasociativa.

6.2.3. Categorías módulo sobre álgebras cuasi-Hopf. Sea (A, Φ) un álgebra cuasi-Hopf y $(K, \lambda, \Phi_\lambda)$ un A-comódulo álgebra a izquierda. La categoría ${}_K\mathfrak{m}$ es un $\mathrm{Rep}\,(A, \Phi)$-módulo como sigue. La acción

$$\overline{\otimes} : \mathrm{Rep}\,(A, \Phi) \times {}_K\mathfrak{m} \to {}_K\mathfrak{m}, \quad X \overline{\otimes} M = X \otimes_{\Bbbk} M.$$

La acción de K en el espacio vectorial $X \otimes_{\Bbbk} M$ es vía la coacción λ. Para todo $X, Y \in \mathrm{Rep}\,(A, \Phi)$, $M \in {}_K\mathfrak{m}$ los isomorfismos de asociatividad y unidad son

$$m_{X,Y,M} : (X \otimes_{\Bbbk} Y) \otimes_{\Bbbk} M \to X \otimes_{\Bbbk} (Y \otimes_{\Bbbk} M),$$

$$m_{X,Y,M}(x \otimes y \otimes m) = \Phi^1_\lambda \cdot x \otimes \Phi^2_\lambda \cdot y \otimes \Phi^3_\lambda \cdot m,$$

para todo $x \in X, y \in Y, m \in M$.

6.3. Twists dinámicos para álgebras de Hopf

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y $A \subseteq G(H)$ un subgrupo Abeliano del grupo de elementos de tipo grupo de H.

Definición 6.3.1. Sea $J : \widehat{A} \to (H \otimes H)^\times$ una transformación lineal. Decimos que J es un *twist dinámico* para H si para todo $\lambda \in \widehat{A}$ y $a \in A$ se satisface

$$J(\lambda)(a \otimes a) = (a \otimes a)J(\lambda), \tag{6.3.1}$$

$$\sum_{\mu \in \widehat{A}} (\Delta \otimes \mathrm{id})J(\lambda)\,\big(J(\lambda\mu^{-1}) \otimes P_\mu\big) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)J(\lambda)\,(1 \otimes J(\lambda)), \tag{6.3.2}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})J(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)J(\lambda) = 1. \tag{6.3.3}$$

Aquí para todo $\mu \in \widehat{A}$, $P_\mu = \dfrac{1}{|A|}\displaystyle\sum_{a\in A} \mu(a^{-1})\, a \in \Bbbk A$, es el idempotente minimal correspondiente al caracter μ.

Usaremos la notación $J(\lambda) = J^1(\lambda)\otimes J^2(\lambda) = j^1(\lambda)\otimes j^2(\lambda)$, $J(\lambda)^{-1} = J^{-1}(\lambda)\otimes J^{-2}(\lambda)$, $\lambda \in \widehat{A}$.

Definición 6.3.2. Dos twist dinámicos $J, J' : \widehat{A} \to H\otimes H$ son *equivalentes* si existe un morfismo de grupos $t : \widehat{A} \to H^\times$, tal que para todo $a \in A$, $\lambda \in \widehat{A}$

$$\varepsilon(t(\lambda)) = 1, \tag{6.3.4}$$

$$t(\lambda)\, a \;=\; a\, t(\lambda), \tag{6.3.5}$$

$$J'(\lambda) = \Delta(t(\lambda)^{-1})\, J(\lambda) \sum_{\mu\in\widehat{A}} \left(t(\lambda\mu^{-1})\otimes P_\mu t(\lambda)\right). \tag{6.3.6}$$

Para todo $\lambda \in \widehat{A}$ y V un A-módulo vamos a denotar por $V[\lambda]$ a la componente isotípica de tipo λ, es decir

$$V[\lambda] = \{v \in V : a\cdot v = \lambda(a)\, v \ \text{ para todo } a \in A\}.$$

En particular si $X \in \operatorname{Rep}(H)$, entonces $X[\lambda]$ tiene sentido al tomar la restricción de la acción a $\Bbbk[A]$.

6.4. Álgebras de Hopf cuasitriagulares y factorizables

6.5. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf

El propósito de esta sección es describir comódulo álgebras sin ideales a derecha coestables sobre álgebras de Hopf coradicalmente graduadas punteadas. Dichas comódulo álgebras son, esencialmente, *levantes* de subálgebras coideales homogeneas torcidas por un 2-cociclo de Hopf.

6.5.1. Deformaciones de álgebras de Hopf. Sea H un álgebra de Hopf. recordemos que un 2-cociclo de Hopf para H es una aplicación lineal $\sigma : H\otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$, invertible con respecto a la convolución, tal que

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)}), \tag{6.5.1}$$

$$\sigma(x, 1) = \varepsilon(x) = \sigma(1, x), \tag{6.5.2}$$

para todo $x, y, z \in H$. Usando este 2-cocilo existe una nueva álgebra de Hopf construida sobre la misma coálgebra H con producto descripto por

$$x\cdot_{[\sigma]} y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)})\; x_{(2)}y_{(2)}, \qquad x, y \in H. \tag{6.5.3}$$

Esta nueva álgebra de Hopf se denotará por $H^{[\sigma]}$. Si $\sigma : H \otimes H \to \Bbbk$ es un 2-cociclo de Hopf y A es un H-comódulo álgebra a izquierda, definimos un nuevo producto en A de la siguiente manera:

$$a._{\sigma}b = \sigma(a_{(-1)}, b_{(-1)})\, a_{(0)}.b_{(0)}, \tag{6.5.4}$$

$a, b \in A$. Denotaremos por A_σ esta nueva álgebra con la misma estructura de H-comódulo

Lema 6.5.1. *El álgebra A_σ es un $H^{[\sigma]}$-comódulo álgebra a izquierda.* □

Lema 6.5.2. *Sea $\sigma : H \otimes H \to \Bbbk$ un 2-cociclo de Hopf y K un H-comódulo álgebra a izquierda. Existe una equivalencia de categorías ${}^{H}\mathcal{M}_K \simeq {}^{H^\sigma}\mathcal{M}_{K_\sigma}$.*

Demostración. Si $M \in {}^{H}\mathcal{M}_K$ definamos una estructura de K_σ-módulo a derecha como sigue:

$$m \cdot_\sigma k = \sigma(m_{(-1)}, k_{(-1)})\, m_{(0)} \cdot k_{(0)},$$

para todo $k \in K$, $m \in M$. Denotaremos por M_σ el espacio vectorial M con esta nueva acción y la misma estructura de H-comódulo a izquierda. Es inmediato comprobar que $M_\sigma \in {}^{H^\sigma}\mathcal{M}_{K_\sigma}$ y que el funtor $M \longmapsto M_\sigma$ es una equivalencia de categorías. □

6.5.2. Comódulo álgebras graduadas y filtradas. En esta sección estudiaremos comódulo álgebras graduadas sobre álgebras de Hopf graduadas.

Recordemos que una *filtración* en un álgebra de Hopf H es una filtración de álgebras $H^0 \subseteq H^1 \subseteq \cdots \subseteq H^m = H$ tal que para todo $n = 0 \dots m$ se tiene que:

$$\Delta(H^n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H^i \otimes_{\Bbbk} H^{n-i}.$$

Si H es un álgebra de Hopf equipada con una filtración tal que H^0 es una subálgebra de Hopf subalgebra entonces el álgebra graduada asociada $\operatorname{gr} H = \bigoplus_{n\geq 0} H^n/H^{n-1}$, aquí $H^{-1} = 0$, es un álgebra de Hopf graduada.

Toda álgebra de Hopf H de dimensión finita tiene asociada la filtración coradical

$$H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = H$$

donde H_0 es el coradical de H. Si el coradical es un subálgebra de Hopf de H entonces el álgebra de Hopf asociada $\operatorname{gr} H$ es coradicalmente graduada.

Sea (A, λ) un H-comódulo álgebra. La *filtración de Loewy* de A es la filtración

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$$

definida por $A_n = \lambda^{-1}(H_n \otimes A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sabe que, para todo $0 \leq n \leq m$, se tiene que

$$\lambda(A_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes_{\Bbbk} A_{n-i}. \tag{6.5.5}$$

Ver por ejemplo [**2**, Lemma 1.2].

Definición 6.5.3. Sea $H = \oplus_{i=0}^{m} H(i)$ un álgebra de Hopf graduada. Decimos que un H-comódulo álgebra A, con estructura de comódulo $\lambda : A \to H \otimes_{\Bbbk} A$, graduada como álgebra $A = \oplus_{i=0}^{m} A(i)$ es una *comódulo álgebra graduada* si para cada $0 \leq n \leq m$

$$\lambda(A(n)) \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n} H(i) \otimes_{\Bbbk} A(n-i).$$

Una comódulo álgebra graduada $A = \oplus_{i=0}^{m} A(i)$ es *Loewy-graduada* si la filtración de Loewy está dada por $A_n = \oplus_{i=0}^{n} A(i)$.

Sea (A, λ) una H-comódulo álgebra. Denotaremos por $\operatorname{gr} A$ al álgebra graduada con respecto a la filtración de Loewy.

Existe un morfismo bien definido $\overline{\lambda} : \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} H \otimes \operatorname{gr} A$ tal que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
A^n & \xrightarrow{\lambda} & \bigoplus_{i=0}^{n} H^i \otimes_{\Bbbk} A^{n-i} \\
\downarrow & & \downarrow \\
A^n / A^{n-1} & \longrightarrow & \left(\sum_{i=0}^{n} H^i \otimes_{\Bbbk} A^{n-i} \right) / \sum_{j=0}^{n-1} H^j \otimes_{\Bbbk} A^{n-1-j} \\
\downarrow & & \downarrow \simeq \\
\operatorname{gr} A(n) & \xrightarrow{\overline{\lambda}} & \sum_{i=0}^{n} \operatorname{gr} H(i) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{gr} A(n-i).
\end{array}$$

El siguiente Lema es estándar. Su demostración puede encontrarse en [**2**], [**66**].

Lema 6.5.4. *El espacio* $(\operatorname{gr} A, \overline{\lambda})$ *es un* $\operatorname{gr} H$*-comódulo álgebra Loewy-graduado.*

El siguiente resultado es útil cuando uno relaciona categorías módulo sobre H y sobre $\operatorname{gr}_c H$.

Proposición 6.5.5. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita tal que el coradical H_0 es una subálgebra de Hopf. Sea A un H-comódulo álgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A_0 es H_0-simple a derecha.*
2. *A es H-simple a derecha.*

Demostración. Asumamos que A_0 es H_0-simple a derecha. Sea $J \subseteq A$ un ideal H-coestable. Consideremos la filtración de Loewy en J; $J_0 \subseteq J_1 \subseteq \dots J_m = J$ dada por $J_i = \lambda^{-1}(H_i \otimes_{\Bbbk} J)$. El espacio $J_0 \subseteq A_0$ es un ideal H^0-coestable, por lo tanto $J_0 = 0$ o $J_0 = A_0$. En el segundo caso $1 \in J$ y sigue que $J = A$. Asumamos que $J_0 = 0$. Sigue de (6.5.5) que $\lambda(J_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes_{\Bbbk} J_{n-i}$. Entonces $\lambda(J_1) \subseteq H_0 \otimes_{\Bbbk} J_1$ y por lo tanto $J_1 = J_0$. Argumentando inductivamente sigue que $J_n = J_{n-1}$ para todo n, y por lo tanto $J = 0$.

Asumamos que A es H-simple a derecha. Como H_0 es semisimple, usando [**49**, Thm. 3.1], se obtiene que el radical de Jacobson $J(A_0)$ es un ideal H_0-coestable de A_0. Como el radical de Jacobson es nilpotente, la igualdad $J(A_0) = A$ es imposible, por lo tanto

$J(A_0) = 0$ y A_0 es semisimple. La inclusión $A_0 \subseteq A$ se parte, es decir que existe un A_0-módulo $B \subseteq A$ tal que $A = A_0 \oplus B$. Ahora, sea $0 \neq J \subseteq A_0$ un ideal a derecha H_0-costable. Entonces $J \subseteq JA = J \oplus JB \subseteq J \oplus B$. Como A es H-simple a derecha obtenemos que $JA = A$ lo cual implica que $J = A_0$. □

Bajo las mismas hipótesis que la Proposición 6.5.5 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.5.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A_0 *es* H_0*-simple a derecha.*
2. $\operatorname{gr} A$ *es* $\operatorname{gr} H$*-simple a derecha.*
3. A *es* H*-simple a derecha.*

Demostración. (1) es equivalente a (3) es la Proposición 6.5.5, pero la misma demostración sirve para $\operatorname{gr} A$ ya que $(\operatorname{gr} A)_0 = A_0$. □

6.5.3. Caso H punteada y coradicalmente graduada. Sea G un grupo finito y $H = \oplus_{i=0}^m H(i)$ un álgebra de Hopf de dimensión finita coradicalmente graduada con coradical $H(0) = \Bbbk G$.

Sea (A, λ) un H-comódulo álgebra H-simple a derecha y con coinvariantes triviales tal que posee una graduación $A = \oplus_{i=0}^m A(i)$ que la hace Loewy-graduada como H-comódulo álgebra. Como A es H-simple a derecha y $A^{\mathrm{coH}} = \Bbbk$ entonces, por la Proposición 6.5.5 $A(0)$ es es H_0-simple a derecha y por lo tanto $A(0) = \Bbbk_\psi F$ para algun subgrupo $F \subseteq G$ y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo.

Sea $\pi : A \to A(0)$ la proyección canónica y $\epsilon : A(0) \to \Bbbk$ el morfismo definido por $\epsilon(e_f) = 1$ para todo $f \in F$.

Observación 6.5.7.
- Si ψ es trivial entonces $\epsilon : A(0) \to \Bbbk$ es un morfismo de álgebras.
- Si $a \in A(0)$ entonces $(\mathrm{id}_H \otimes \epsilon)\lambda(a) = a$.

Proposición 6.5.8. *Asumamos que ψ es trivial y que $\phi : A \to H$ es la aplicación $\phi = (\mathrm{id}_H \otimes \epsilon\pi)\lambda$. Entonces*

(i) *ϕ es un morfismo de álgebras,*
(ii) *ϕ es un morfismo de H-comódulos, y*
(iii) *ϕ es inyectiva.*

Demostración. (i). Sigue de que ϕ es composición de morfismos de álgebras.

(ii). Por la definición de ϕ se tiene que

$$\Delta\phi = \Delta(\mathrm{id}_H \otimes \epsilon\pi)\lambda = (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \epsilon\pi)(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\lambda.$$

Usando la coasociatividad de λ obtenemos que $\Delta\phi = (\mathrm{id}_H \otimes \phi)\lambda$.

(iii). Sea $a \in \ker\phi$. Asumamos que $a \neq 0$. Escribamos $a = \sum_{n=0}^t a^{(n)}$ donde $a^{(n)} \in A(n)$ y $t \leq m$. Podemos asumir que $a^{(t)} \neq 0$. Entonces

$$\lambda(a^{(n)}) \in \oplus_{i=0}^n H(i) \otimes_\Bbbk A(n-i).$$

Entonces $\lambda(a^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}$ donde podemos escribir $b_{n,i} = \sum_k x_k^{n,i} \otimes c_k^{n,i}$ y $x^{n,i} \in H(i)$, $c^{n,i} \in A(n-i)$.

Como $a^{(t)} \neq 0$ entonces $b_{t,t} \neq 0$. En efecto, si $b_{t,t} = 0$ entonces $\lambda(a^{(t)}) \in \oplus_{i=0}^{t-1} H(i) \otimes_{\Bbbk} A$, por lo tanto $a^{(t)} \in \oplus_{i=0}^{t-1} A(i) = A_{t-1}$, lo cual es imposible a menos que $a^{(t)} = 0$.

Observemos que $\Delta\phi(a) = 0$, lo cual implica que

$$(\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \epsilon\pi)(\mathrm{id}_H \otimes \lambda)\lambda(a) = 0,$$

es decir que

$$\sum_{n=0}^{t} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k} x_k^{n,i} \otimes (\mathrm{id}_H \otimes \epsilon\pi)\lambda(c_k^{n,i}) = 0$$

El elemento de la sumatoria anterior que pertenece a $H(t) \otimes_{\Bbbk} H(0) \otimes_{\Bbbk} A(0)$ debe ser igual a cero, es decir que $\sum_k x_k^{t,t} \otimes (\mathrm{id}_H \otimes \epsilon)\lambda(c_k^{t,t}) = 0$. Ya que $c_k^{t,t} \in A(0)$, entonces $(\mathrm{id}_H \otimes \epsilon)\lambda(c_k^{t,t}) = c_k^{t,t}$ y por lo tanto se tiene que

$$\sum_{k} x_k^{t,t} \otimes (\mathrm{id}_H \otimes \epsilon)\lambda(c_k^{t,t}) = b_{t,t},$$

obtenemos que $b_{t,t} = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a = 0$. □

En otras palabras, la Proposición 6.5.8 implica que si A es un H-comódulo álgebra que satisface:

- A es Loewy-graduada;
- A es H-simple a derecha y $A^{\mathrm{coH}} = \Bbbk$;
- $A(0)$ es una subálgebra de Hopf de $H(0)$;

Entonces A es isomorfa como H-comódulo álgebra a una subálgebra coideal a izquierda homógenea de H. El siguiente paso es estudiar cuando el 2-cociclo ψ es no trivial, es decir cuando $A(0)$ no es una subálgebra de Hopf de $H(0)$.

Sea $\widehat{\psi} \in Z^2(G, \Bbbk^{\times})$ un 2-cociclo tal que $\widehat{\psi}\,|_{F \times F} = \psi$. La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [**42**, Lemma 4.1].

Lema 6.5.9. *Existe un 2-cociclo de Hopf $\sigma_{\widehat{\psi}} : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$ tal que para dos elementos homogéneos $x, y \in H$*

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \widehat{\psi}(x,y), & \textit{si } x, y \in H(0); \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{6.5.6}$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la Proposición 6.5.8.

Corolario 6.5.10. *Sea A un H-comódulo álgebra Loewy-graduada y H-simple a derecha con coinvariantes triviales tal que $A(0) = \Bbbk_{\psi} F$ donde $F \subseteq G$ es un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^{\times})$ es un 2-cociclo. Entonces existe un 2-cociclo de Hopf $\sigma : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$*

tal que A_σ es isomorfa a una subálgebra coideal a izquierda homógenea de $H^{[\sigma]}$ como $H^{[\sigma]}$-comódulo álgebras.

DEMOSTRACIÓN. Del Lema 6.5.9 sigue que existe un 2-cociclo de Hopf $\sigma : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$ tal que $\sigma(x, y) = \psi^{-1}(x, y)$ para todo $x, y \in F$. La estructura de comódulo álgebra de A_σ es Loewy-graduada y $(A_\sigma)(0) = \Bbbk F$. Luego, el Lema sigue de la Proposición 6.5.8. $\square$

Los siguientes resultados fueron obtenidos por Skryabin [**65**] y son de utilidad para clasificar ciertas representaciones de categorías tensoriales asociadas a álgebras de Hopf.

Teorema 6.5.11. [**65**, Theorem 3.5, Theorem 4.2] *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y A un H-comódulo álgebra de dimensión finita.*

1. *Si A es H-simple y $M \in {}^H\mathcal{M}_A$, entonces existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que M^t es un A-módulo libre a derecha.*
2. *Un objeto $M \in {}^H\mathcal{M}_A$ es libre como A-módulo libre a derecha si y sólo si existe un ideal maximal $J \subseteq A$ tal que $M/M \cdot J$ es libre como A/J-módulo.* $\square$

6.6. Preguntas

- comodulo algebras h-simples si y sólo si son h-simples a derecha ?
- categorias modulo y galois extensions.
- Cuando $\mathcal{C}_A$ es tensorial? porque deben existir los duales? Si $\mathcal{C}_A$ es exacta sobre $\mathcal{C}$ entonces A es un objeto proyectivo en $\mathcal{C}_A$? creo que no.
- subcat de cat semisimpl son semisimples?
- agregar algo sobre la categoria de modulos projectivos.
- el adjunto de un funtor de modulos (en exactas??) posee estructura de funtor de modulos tal que las adjunciones son transf. naturales de modulos. eo [Sec. 3.3]

Bibliografía

[1] I. Angiono, *Basic quasi-Hopf algebras over cyclic groups*, Adv. Math. **225** (2010), 3545–3575.

[2] N. Andruskiewitsch and S. Dăscălescu, *Co-Frobenius Hopf algebras and the coradical filtration*, Math. Z. 243, (2003) 145–154.

[3] N. Andruskiewitsch, P. Etingof y S. Gelaki, *Triangular Hopf algebras with the Chevalley property*, Michigan Math. J. **49**, No. 2 (2001), 277–298.

[4] N. Andruskiewitsch and W. Ferrer Santos. *On observable module categories.* Groups, Rings and Group Rings, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No 248, (2006) 11-23.

[5] N. Andruskiewitsch y M. Mombelli, *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **314** (2007), 383–418.

[6] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3*, J. Algebra **209** (1998), 658–691.

[7] N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider, *Pointed Hopf algebras.* New directions in Hopf algebras, MSRI series Cambridge Univ. Press (2002), 1–68.

[8] M. Auslander, I. Reiten , S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 36, (1995).

[9] O. Babelon, *Universal Exchange algebra for Bloch waves and Liouville theory*, Comm. Math. Phys. **139** 1991, 619–643.

[10] O. Babelon, D. Bernard and E. Billey, *A Quasi-Hopf algebra interpretation of quantum 3-j and 6-j symbols and difference equations*, Phys. Lett. B **375** (1996), 89–97.

[11] B. Bakalov y A. Jr. Kirillov, *Lectures on Tensor categories and Modular Functors* University Lecture Series **21**, AMS Providence, RI (2001).

[12] A.J. Berrick y M.E. Keating, *Categories and modules with K-theory in view*, Cambridge studies in advanced mathematics, volume 67 (2000).

[13] A. Bruguières y S. Natale, *Exact sequences of tensor categories*, Int. Math. Res. Not. **2011** (24) (2011) 5644–5705.

[14] A. Bruguières, S. Lack and A. Virelizier, *Hopf monads on monoidal categories*, Adv. Math. **227** (2011) 745-800.

[15] G. Böhm, F. Nill y K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*, J. Algebra **221** (1999), 385–438.

[16] G. Böhm y K. Szlachányi, *A coassociative C^*-quantum group with nonintegral dimensions*, Lett. Math. Phys. **35** (1996), 437–456.

[17] S. Burciu y S. Natale, *Fusion rules of equivariantizations of fusion categories* , J. Math. Phys. 54, 013511 (2013), preprint arxiv:1206.6625.

[18] G. Böhm, F. Nill y K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*, J. Algebra **221** (1999), 385–438.

[19] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory-with aplications to finite groups and orders*, Wiley Classics Library Edition (1981).

[20] P. Deligne *Catègories tannakiennes.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., 87, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 111–195.

[21] P. Deligne, *Categories tensorielles*, Mosc. Math. J. 2, 227–248 (2002).

[22] V. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras.* (Russian) *Algebra i Analiz* **1** (1989), no. 6, 114–148; translation in *Leningrad Math. J.* **1** (1990), no. 6, 1419–1457.

[23] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych y V. Ostrik, *On Braided Fusion Categories I*, Selecta Math. N.S. **16**, 1 (2010) 1–119.

[24] Donin, J. and Mudrov A., *Dynamical Yang-Baxter equation and quantum vector bundles*, Commun. Math. Phys. **254** (2005), 719–760.

[25] Donin, J. and Mudrov A., *Quantum groupoids and dynamical categories*, J. Algebra **296** (2006), 348–384.

[26] P. Etingof On Vafa's Theorem for tensor categories, Math. Res. Lett. **9**, No. 5-6, (2002) 651–657 .

[27] P. Etingof y S. Gelaki, *Exact sequences of tensor categories with respect to a module category*, Adv. math. Volume 308, 21 (2017) 1187–1208.

[28] P. Etingof, D. Nikshych, S. Gelaki y V. Ostrik, *Tensor categories*, preprint. Disponible en http://www-math.mit.edu/∼etingof/tenscat1.pdf

[29] P. Etingof, M. Khovanov, *Representations of tensor categories and Dynkin diagrams*, Int. Math. Res. Notices No. 5 (1995), 235–247.

[30] P. Etingof and D. Nikshych, *Dynamical twists in group algebras*, Int. Math. Res. Not. **13** (2001), 679–701.

[31] P. Etingof and D. Nikshych, *Dynamical quantum groups at roots of 1*, Duke Math. J. **108** (2001), 135–168.

[32] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *On fusion categories*, Ann. Math. **162**, 581–642 (2005).

[33] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *Fusion categories and homotopy theory*, Quantum Topol. **1**, No. 3, (2010) 209–273.

[34] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, Adv. Math **226**, 15 (2011), 176–205.

[35] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *An analogue of Radford's S^4-formula for finite tensor categories*, Int. Math. Res. Not. **54** (2004), 2915–2933.

[36] P. Etingof y V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654.

[37] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323–448.

[38] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, AMS Chelsea Publishing, Providence, (1998).

[39] C. Galindo, *Clifford theory for tensor categories*, J. Lond. Math. Soc. (2) 83 (2011) 57–78.

[40] C. Galindo, *Clifford theory for graded fusion categories*, Israel Journal of Mathematics (2) 192 (2012), 841–867.

[41] A. García Iglesias, *Álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos simétricos $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$*, Tesis doctoral, U.N.C. (2010).

[42] A. García Iglesias and M. Mombelli. *Representations of the category of modules over pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$ and $\mathbb{S}_4$*. Pacific J. Math. vol 252 No. 2 (2011) 343–378.

[43] J. Greenough, *Monoidal 2-structure of Bimodule Categories*. J. Algebra **324** (2010) 1818–1859.

[44] J. Greenough, *Bimodule categories and monoidal 2-structure*. Dissertation thesis, University of New Hampshire, 2010.

[45] T. Hayashi, *A brief introduction to face algebras,* in New trends in Hopf Algebra Theory; Contemp. Math. **267** (2000), 161–176.

[46] A. Joyal y R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102**, (1993) 20–78.

[47] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1995).

[48] I. López Franco, *Tensor products of finitely cocomplete and abelian categories*, J. Algebra 396, (2013) 207–219.

[49] V. Linchenko, *Nilpotent subsets of Hopf module algebras*, Groups, Rings, Lie, and Hopf Algebras (Yu. Bahturin, Editor), Proceedings of the 2001 St. Johns Conference, Kluwer, 2003, 121-127.

[50] G. Lusztig, *Leading coefficients of character values of Hecke algebras,* Proc. Symp. in Pure Math. 47 (1987), 235–262.

[51] A. Mejía Castaño, *Categorías tensoriales: representaciones y extensiones*, tesis doctoral, Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba, (2014).

[52] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, Graduate texts in mathematics; volume 5 (1971).

[53] M. Mombelli, *Module categories over pointed Hopf algebras*. Math. Z. **266** (2010) 319–344.

[54] M. Mombelli, *Constructing dynamical twists over a non-abelian base*. Applied Categorical Structures Volume 18 nº 4 (2010) 407–429.

[55] M. Mombelli, *Dynamical twists in Hopf algebras*, Int. Math. Res. Not. (2007) vol.2007.

[56] M. Mombelli, *Representations of tensor categories coming from quantum linear spaces*. J. London Math. Soc. (2) 83 (2011) 19–35.

[57] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups*, Func. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[58] S. Natale, *Álgebras de Hopf y categorías tensoriales*. Trabajos de Matemática B 04/47. FaMAF. Notas de curso II Encuentro Nacional de Álgebra, La Falda, Agosto 2004.

[59] A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press.

[60] D. Nikshych y L. Vainerman, *Finite quantum groupoids and their applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43**, 211–262 (2002).

[61] V. Ostrik, *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants*, Transform. Groups, 2 **8**, 177–206 (2003).

[62] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a Finite Group*, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 27, 1507–1520.

[63] B. Pareigis. *On braiding and dyslexia*. J. Algebra **171** (1995) 413–425.

[64] P. Schauenburg. *The monoidal center construction and bimodules*. J. Pure Appl. Algebra **158** (2001) 325–346.

[65] S. Skryabin, *Projectivity and freeness over comodule algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **359**, No. 6, 2597-2623 (2007).

[66] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[67] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 429–456.

[68] D. Tambara y S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups* , J. Algebra, 209(2) (1998) pp 692–707.

[69] K.-H. Ulbrich, *Galois extensions as functors of comodules*, Manuscripta math. **59**, 391–397 (1987).

[70] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proc. AMS **11** (1969), 5–8.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba,

Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria,
(5000) - Córdoba, Argentina
email: martin10090@gmail.com, mombelli@mate.uncor.edu
URL: http://www.mate.uncor.edu/∼mombelli