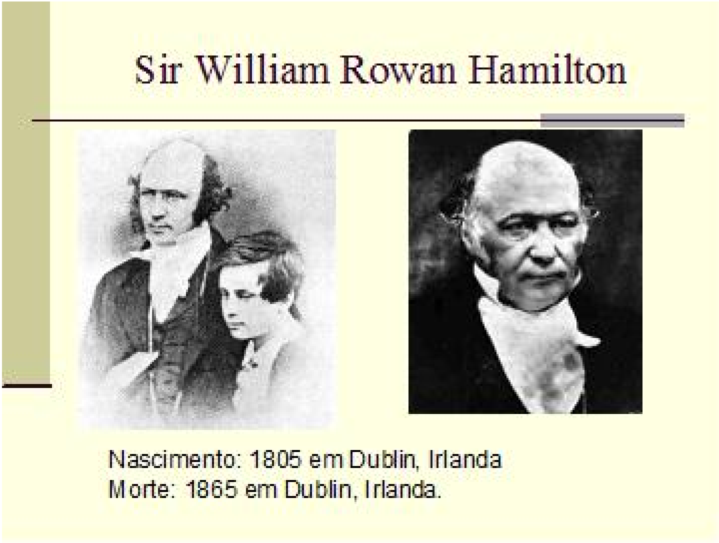
Conceptos de Álgebra Abstracta: Números Hipercomplejos y Álgebras Asociativas

César Polcino Milies

Universidade de São Paulo

Números Hipercomplejos


Sir William Rowan Hamilton
Nascimento: 1805 em Dublin, Irlanda
Morte: 1865 em Dublin, Irlanda.

- John T, Graves, descubrió, en diciembre de 1843, los **Octónios**

- John T, Graves, descubrió, en diciembre de 1843, los **Octónios**
- Este sistema fue descubierto independientemente, en 1845, por Arthur Cayley (1821 - 1895) e por eso son conocidos también como **Números de Cayley**.

- John T, Graves, descubrió, en diciembre de 1843, los **Octónios**
- Este sistema fue descubierto independientemente, en 1845, por Arthur Cayley (1821 - 1895) e por eso son conocidos también como **Números de Cayley**.
- En sus *Lectures on Quaternions*, de 1853, Hamilton introdujo los **Bicuaternios** que son cuatérnions con coeficientes complejos y son, por lo tanto, un álgebra de dimensión 8 sobre los reales.

Números Hipercomplejos

En esa misma obra de 1853, Hamilton introduce una nueva generalización que ya habia iniciado en un artículo en los *Transactions of the Royal Irish Academy*, em 1848: los **Números Hipercomplejos**.

Números Hipercomplejos

En esa misma obra de 1853, Hamilton introduce una nueva generalización que ya habia iniciado en un artículo en los *Transactions of the Royal Irish Academy*, em 1848: los **Números Hipercomplejos**.

Un sistema de Números Hipercomplejos es el conjunto de todos los símbolos de la forma:

Números Hipercomplejos

En esa misma obra de 1853, Hamilton introduce una nueva generalización que ya habia iniciado en un artículo en los *Transactions of the Royal Irish Academy*, em 1848: los **Números Hipercomplejos**.

Un sistema de Números Hipercomplejos es el conjunto de todos los símbolos de la forma:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Números Hipercomplejos

En esa misma obra de 1853, Hamilton introduce una nueva generalización que ya habia iniciado en un artículo en los *Transactions of the Royal Irish Academy*, em 1848: los **Números Hipercomplejos**.

Un sistema de Números Hipercomplejos es el conjunto de todos los símbolos de la forma:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

donde $x_1, x_2, ...x_n$ son números reales - o, eventualmente, complejos - y $e_1, e_2, ..., e_n$ son símbolos, llamados las **unidades** del sistema.

Números Hipercomplejos

En esa misma obra de 1853, Hamilton introduce una nueva generalización que ya habia iniciado en un artículo en los *Transactions of the Royal Irish Academy*, em 1848: los **Números Hipercomplejos**.

Un sistema de Números Hipercomplejos es el conjunto de todos los símbolos de la forma:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

donde $x_1, x_2, \ldots x_n$ son números reales - o, eventualmente, complejos - y $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son símbolos, llamados las **unidades** del sistema.

Tal como en el caso dos cuatérnios, la suma de dos elementos de esta forma se define sumando coeficientes correspondientes y, aceptando que vale la propriedad distributiva, para definir el

Como el produto de dos de estas unidades debe ser otro elemento del sistema, debe ser posible escribirlo en la forma:

Como el produto de dos de estas unidades debe ser otro elemento del sistema, debe ser posible escribirlo en la forma:

$$e_i e_j = \sum_{i=1}^{n} a_k(i,j) e_k$$

Como el produto de dos de estas unidades debe ser otro elemento del sistema, debe ser posible escribirlo en la forma:

$$e_i e_j = \sum_{i=1}^{n} a_k(i,j) e_k$$

La estrutura multiplicativa del sistema está entonces determinada al elegir los valores de los coeficientes $a_k(i,j)$.

Como el produto de dos de estas unidades debe ser otro elemento del sistema, debe ser posible escribirlo en la forma:

$$e_i e_j = \sum_{i=1}^{n} a_k(i,j) e_k$$

La estrutura multiplicativa del sistema está entonces determinada al elegir los valores de los coeficientes $a_k(i,j)$.

Por eso, estos coeficientes son llamados las **constantes estructurales** del sistema.

Otro matemático desarrolló paralelamente ideas muy similares.

Hermann Gunther Grassmann (1809 - 1877),
estudió matemática enla universidad, sin destacarse particularmente, y se tornó profesor de matemática a nível secundário.

Otro matemático desarrolló paralelamente ideas muy similares.

Hermann Gunther Grassmann (1809 - 1877),
estudió matemática enla universidad, sin destacarse particularmente, y se tornó profesor de matemática a nível secundário.

Él desarrolló sus ideias antes que Hamilton, pero las publicou recién en 1844, un año después del descubrimiento de los cuatérnios.

Otro matemático desarrolló paralelamente ideas muy similares.

Hermann Gunther Grassmann (1809 - 1877),
estudió matemática enla universidad, sin destacarse particularmente, y se tornó profesor de matemática a nível secundário.

Él desarrolló sus ideias antes que Hamilton, pero las publicou recién en 1844, un año después del descubrimiento de los cuatérnios.

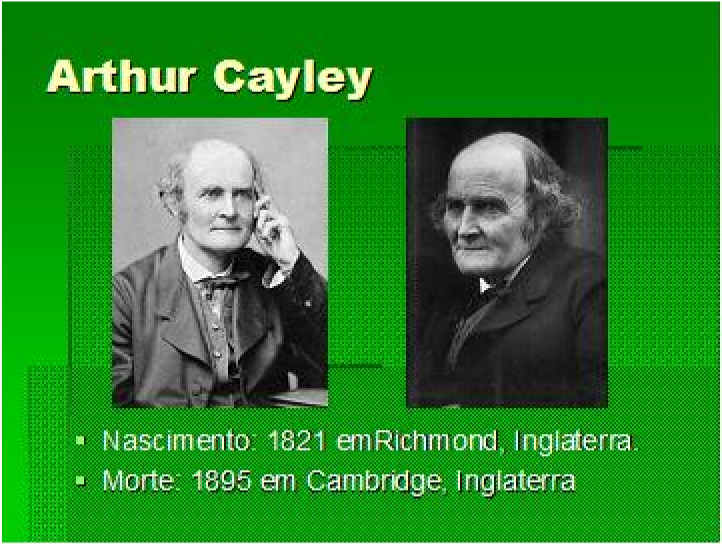
En ese año, Grassmann publico su *Die Lineale Ausdehnungslehre* donde expone sus ideas.

Otro matemático desarrolló paralelamente ideas muy similares.

Hermann Gunther Grassmann (1809 - 1877),
estudió matemática enla universidad, sin destacarse particularmente, y se tornó profesor de matemática a nível secundário.

Él desarrolló sus ideias antes que Hamilton, pero las publicou recién en 1844, un año después del descubrimiento de los cuatérnios.

En ese año, Grassmann publico su *Die Lineale Ausdehnungslehre* donde expone sus ideas. Sin embargo, su estilo excesivamente abstracto y las “doctrinas místicas” que incluye en su exposición hicieron que seu trabajo permaneciera relativamente ignorado.


Arthur Cayley
▪ Nascimento: 1821 emRichmond, Inglaterra.
▪ Morte: 1895 em Cambridge, Inglaterra

Mas ejemplos

En 1855, en un articulo titulado *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* **Cayley** introdujo un nuevo concepto cuya importancia para el desarrollo de la matemática seria dificil exagerar: el concepto de **matriz**.

Mas ejemplos

En 1855, en un articulo titulado *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* **Cayley** introdujo un nuevo concepto cuya importancia para el desarrollo de la matemática seria dificil exagerar: el concepto de **matriz**.

El llegó a esta idesa estudiando invariantes de formas cuadráticas bajo la acción de transformaciones lineales. Tal como el mesmo dice:

Mas ejemplos

En 1855, en un articulo titulado *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* **Cayley** introdujo un nuevo concepto cuya importancia para el desarrollo de la matemática seria dificil exagerar: el concepto de **matriz**.

El llegó a esta idesa estudiando invariantes de formas cuadráticas bajo la acción de transformaciones lineales. Tal como el mesmo dice:

> *Yo ciertamente no lleguei a la noción de matriz de ninguna manera a través de los cuatérnios; fue directamente de los determinantes o como una forma conveniente de expresar las equaciones:*

$$x_1 = ax + by$$

$$y_1 = cx + dy$$

Tal como Cayley observó:

> *La idea de matriz precede logicamente a la de determinante...*

Tal como Cayley observó:

> *La idea de matriz precede logicamente a la de determinante...*

Sin embargo, el orden histórico foi al contrario. Los determinantes estaban en uso desde mucho antes.

Tal como Cayley observó:

> *La idea de matriz precede logicamente a la de determinante...*

Sin embargo, el orden histórico foi al contrario. Los determinantes estaban en uso desde mucho antes.

Fueron usados por primera vez por Colin Maclaurin (1698 -1746) (probablemente en 1729) y publicados postumamente en su *Treatise of Algebra* en 1748.

Tal como Cayley observó:

> *La idea de matriz precede logicamente a la de determinante...*

Sin embargo, el orden histórico foi al contrario. Los determinantes estaban en uso desde mucho antes.

Fueron usados por primera vez por Colin Maclaurin (1698 -1746) (probablemente en 1729) y publicados postumamente en su *Treatise of Algebra* en 1748.

Como Cayley estaba interesado en la composición de transformaciones lineales, esto le sugeró naturalmente la definición de **produto de matrizes** e, consequentemente, la de **matriz inversa**.

En 1858 publica un segundo trabajo sobre el asunto: *A memoir on the theory of matrices*.

En 1858 publica un segundo trabajo sobre el asunto: *A memoir on the theory of matrices*.Aqui introduce la definición de **suma de matrices** y de **producto por escalares.**

Cayley tenia un punto de vista abstracto, lo que le permitió ver, en las matrices, un sistema algebraico semejante a los que estaban siendo desarrollados:

En 1858 publica un segundo trabajo sobre el asunto: *A memoir on the theory of matrices*.Aqui introduce la definición de **suma de matrices** y de **producto por escalares.**

Cayley tenia un punto de vista abstracto, lo que le permitió ver, en las matrices, un sistema algebraico semejante a los que estaban siendo desarrollados:

> *Se verá que las matrices (considerando apenas las del misma orden) se comportan como cantidades; ellas puedem ser sumadas, multiplicadas o compuestas: a ley de adición de matrices es precisamente semejante a la de adición de cantidades algebraicas: en lo que dice respecto a su multiplicación, existe la peculiaridad de que las matrices no son, en general, conmutativas.*

En 1858 publica un segundo trabajo sobre el asunto: *A memoir on the theory of matrices*.Aqui introduce la definición de **suma de matrices** y de **producto por escalares.**

Cayley tenia un punto de vista abstracto, lo que le permitió ver, en las matrices, un sistema algebraico semejante a los que estaban siendo desarrollados:

> *Se verá que las matrices (considerando apenas las del misma orden) se comportan como cantidades; ellas puedem ser sumadas, multiplicadas o compuestas: a ley de adición de matrices es precisamente semejante a la de adición de cantidades algebraicas: en lo que dice respecto a su multiplicación, existe la peculiaridad de que las matrices no son, en general, conmutativas.*

El hecho de que el conjunto das matrizes de um tamaño dado constituia también un sistema hipercomplejo no fue evidente en

Cayley observó explicitamente que hay una clara relación co la teoria de los cuatérnios.

Cayley observó explicitamente que hay una clara relación co la teoria de los cuatérnios.

El notó que, si M y N son dos matrices 2x2 que verifican:

$$M^2 = N^2 = -1 \;\; \text{y} \;\; MN = -NM,$$

Cayley observó explicitamente que hay una clara relación co la teoria de los cuatérnios.

El notó que, si M y N son dos matrices 2x2 que verifican:

$$M^2 = N^2 = -1 \;\text{ y }\; MN = -NM,$$

escribiendo $L = MN$, las matrices

$$L, \quad M \quad \text{y} \quad N$$

satisfacen *um sistema de relaciones precisamente similar al de la teoria de los cuatérnios.*

Esta observación despertó el interés de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) quien, en un artículo de 1884, afirma que un trabajo de C.S.Peirce le sugirió:

> *... el método por el cual una matriz es despojada de sus dimensiones como área y representada como una suma lineal.*

Esta observación despertó el interés de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) quien, en un artículo de 1884, afirma que un trabajo de C.S.Peirce le sugirió:

> *... el método por el cual una matriz es despojada de sus dimensiones como área y representada como una suma lineal.*

Denotando por E_{ij} la matriz que tiene un coeficiente igual a 1 en la posición i,j y 0 em todas las otras, una matriz $A = (a_{ij})$ se puede escribir en la forma

Esta observación despertó el interés de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) quien, en un artículo de 1884, afirma que un trabajo de C.S.Peirce le sugirió:

> *... el método por el cual una matriz es despojada de sus dimensiones como área y representada como una suma lineal.*

Denotando por E_{ij} la matriz que tiene un coeficiente igual a 1 en la posición i,j y 0 em todas las otras, una matriz $A = (a_{ij})$ se puede escribir en la forma

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}.$$

Esta observación despertó el interés de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) quien, en un artículo de 1884, afirma que un trabajo de C.S.Peirce le sugirió:

> *... el método por el cual una matriz es despojada de sus dimensiones como área y representada como una suma lineal.*

Denotando por E_{ij} la matriz que tiene un coeficiente igual a 1 en la posición i,j y 0 em todas las otras, una matriz $A = (a_{ij})$ se puede escribir en la forma

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}.$$

En este momento resulta evidente, por fin, que las matrices también son sistemas hipercomplejos.

Esta observación despertó el interés de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) quien, en un artículo de 1884, afirma que un trabajo de C.S.Peirce le sugirió:

> *... el método por el cual una matriz es despojada de sus dimensiones como área y representada como una suma lineal.*

Denotando por E_{ij} la matriz que tiene un coeficiente igual a 1 en la posición i,j y 0 em todas las otras, una matriz $A = (a_{ij})$ se puede escribir en la forma

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}.$$

En este momento resulta evidente, por fin, que las matrices también son sistemas hipercomplejos.
Es bueno observar que Sylvester no utiliza esta notación que hoy es familiar. Ella fue introduzida por **Study** en 1889.

Nuevos ejemplos

En 1873, **William Kingdon Clifford** (1845 - 1879) en un artículo titulado *Preliminary sketch on Biquaternions* introdujo, en conexión con ciertos problemas de geometria y física, los **biquatérnios**, (que no coincidem con los biquatérnios de Hamilton), hoy llamados *Números de Clifford*.

Nuevos ejemplos

En 1873, **William Kingdon Clifford** (1845 - 1879) en un artículo titulado *Preliminary sketch on Biquaternions* introdujo, en conexión con ciertos problemas de geometria y física, los **biquatérnios**, (que no coincidem con los biquatérnios de Hamilton), hoy llamados *Números de Clifford*. Son elementos de la forma $q_1 + q_2 a$, donde q_1, q_2 son cuatérnios, $a^2 = 1$ e $aq_i = q_i a$.

Nuevos ejemplos

En 1873, **William Kingdon Clifford** (1845 - 1879) en un artículo titulado *Preliminary sketch on Biquaternions* introdujo, en conexión con ciertos problemas de geometria y física, los **biquatérnios**, (que no coincidem con los biquatérnios de Hamilton), hoy llamados *Números de Clifford*. Son elementos de la forma $q_1 + q_2 a$, donde q_1, q_2 son cuatérnios, $a^2 = 1$ e $aq_i = q_i a$.
En 1878, en *Applications of Grassmann's extensive algebra*, introdujo las *Álgebras de Clifford*:

Nuevos ejemplos

En 1873, **William Kingdon Clifford** (1845 - 1879) en un artículo titulado *Preliminary sketch on Biquaternions* introdujo, en conexión con ciertos problemas de geometria y física, los **biquatérnios**, (que no coincidem con los biquatérnios de Hamilton), hoy llamados *Números de Clifford*. Son elementos de la forma $q_1 + q_2 a$, donde q_1, q_2 son cuatérnios, $a^2 = 1$ e $aq_i = q_i a$. En 1878, en *Applications of Grassmann's extensive algebra*, introdujo las *Álgebras de Clifford*: Dados n símbolos $e_1, e_2, ..., e_n$, que verifican las relaciones $e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i$, se considera como unidades de un sisitema hipercomplejo al conjunto:

$$\{e_{i_1} ... e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n, \}$$

Nuevos ejemplos

En 1873, **William Kingdon Clifford** (1845 - 1879) en un artículo titulado *Preliminary sketch on Biquaternions* introdujo, en conexión con ciertos problemas de geometria y física, los **biquatérnios**, (que no coincidem con los biquatérnios de Hamilton), hoy llamados *Números de Clifford*. Son elementos de la forma $q_1 + q_2 a$, donde q_1, q_2 son cuatérnios, $a^2 = 1$ e $aq_i = q_i a$. En 1878, en *Applications of Grassmann's extensive algebra*, introdujo las *Álgebras de Clifford*: Dados n símbolos $e_1, e_2, \ldots, e_n$, que verifican las relaciones $e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i$, se considera como unidades de un sisitema hipercomplejo al conjunto:

$$\{e_{i_1} \ldots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, \}$$

La dimensión de esta álgebra es

$$m = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Otro ejemplo

Entre 1882 y 1884, Sylvester escribió una serie de artículos sobre sistemas hipercomplejos. Entre estos, describió un sistema de **nonions** que forman un álgebra de dimensión 9 sobre los reales generada por elementos de la forma $u^i v^j$ donde:

Otro ejemplo

Entre 1882 y 1884, Sylvester escribió una serie de artículos sobre sistemas hipercomplejos. Entre estos, describió un sistema de **nonions** que forman un álgebra de dimensión 9 sobre los reales generada por elementos de la forma $u^i v^j$ donde:

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo

Entre 1882 y 1884, Sylvester escribió una serie de artículos sobre sistemas hipercomplejos. Entre estos, describió un sistema de **nonions** que forman un álgebra de dimensión 9 sobre los reales generada por elementos de la forma $u^i v^j$ donde:

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

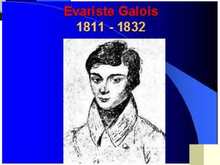
en que ρ denota una raiz cúbica de la unidad. El provó también que esta álgebra es isomorfa al álgebra de todas las matrices 3x3 sobre $\mathbb{R}$.

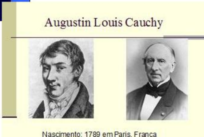
Grupos abstractos y un ejemplo particular


Joseph-Louis Lagrange
Nascimento: 1736 em Torino, Itália.
Morte: 1813 em Paris, França.


Paolo Ruffini
1765 - 1822


Niels Henrik Abel
1802 - 1829


Evariste Galois
1811 - 1832


Augustin Louis Cauchy
Nascimento: 1789 em Paris, Franca

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$.

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$.
Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

- Da una definición abstracta de grupo, utilizando una notación multiplicativa.

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

- Da una definición abstracta de grupo, utilizando una notación multiplicativa.
- Introduce las *tablas* de la operación.

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

- Da una definición abstracta de grupo, utilizando una notación multiplicativa.
- Introduce las *tablas* de la operación.
- Muestra que existen dos grupos no isomorfos de orden quatro, e da ejemplos explícitos des estos.

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

- Da una definición abstracta de grupo, utilizando una notación multiplicativa.
- Introduce las *tablas* de la operación.
- Muestra que existen dos grupos no isomorfos de orden quatro, e da ejemplos explícitos des estos.
- Muestra que existen dos grupos no isomorfos de orden seis, uno de ellos conmutativo y el otro no, probando que este último es isomorfo a S_3, el grupo de las permutaciones de tres elementos.

La definición abstracta de grupo

Inspirado en los trabajos de Cauchy del período 1844 - 1846, Arthur Cayley publicó en 1854 un trabajo con el título *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Trabajo relativamente corto, que introduce hechos fundamentales:

- Da una definición abstracta de grupo, utilizando una notación multiplicativa.
- Introduce las *tablas* de la operación.
- Muestra que existen dos grupos no isomorfos de orden quatro, e da ejemplos explícitos des estos.
- Muestra que existen dos grupos no isomorfos de orden seis, uno de ellos conmutativo y el otro no, probando que este último es isomorfo a S_3, el grupo de las permutaciones de tres elementos.
- Prueba que el orden de todo elemento es un divisor del orden del grupo.

En el comienzo del artículo, cuando está enfatizando el hecho de que en un grupo se trabaja com una única operación, observa que, como está utilizando la notación multiplicativa, símbolos tales como 0, $\alpha + \beta$ o $\alpha - \beta$ no tienen sentido en este contexto.

En el comienzo del artículo, cuando está enfatizando el hecho de que en un grupo se trabaja com una única operación, observa que, como está utilizando la notación multiplicativa, símbolos tales como 0, $\alpha + \beta$ o $\alpha - \beta$ no tienen sentido en este contexto.

Hacia el fin de; artículo el retoma esta cuestión y muestra como, a partir de um grupo dado, es posible construir otro conjunto donde estos símbolos si tienen sentido. Para eso, el imita, de cierta forma, la construcción de los sistemas hipercomplejos.

Álgebras de grupo

En notación actual:

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Después se consideran las *combinaciones lineales formales* de estos elementos:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n.$$

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Después se consideran las *combinaciones lineales formales* de estos elementos:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n.$$

Se trata de la misma construcción de un sistema hipercomplejo, con la única diferencia de que, em vez de utilizar símbolos qualesquiera como unidades, se utilizan los elementos del grupo.

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Después se consideran las *combinaciones lineales formales* de estos elementos:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n.$$

Se trata de la misma construcción de un sistema hipercomplejo, con la única diferencia de que, em vez de utilizar símbolos qualesquiera como unidades, se utilizan los elementos del grupo. Es la primeira construcción concreta de um **álgebra de grupo**.

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Después se consideran las *combinaciones lineales formales* de estos elementos:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n.$$

Se trata de la misma construcción de un sistema hipercomplejo, con la única diferencia de que, em vez de utilizar símbolos qualesquiera como unidades, se utilizan los elementos del grupo. Es la primeira construcción concreta de um **álgebra de grupo**. Cayley exhibe explicitamente los cálculos para $\mathbb{C}S_3$.

Álgebras de grupo

En notación actual:

Dado un grupo G, enumeramos sus elementos: $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

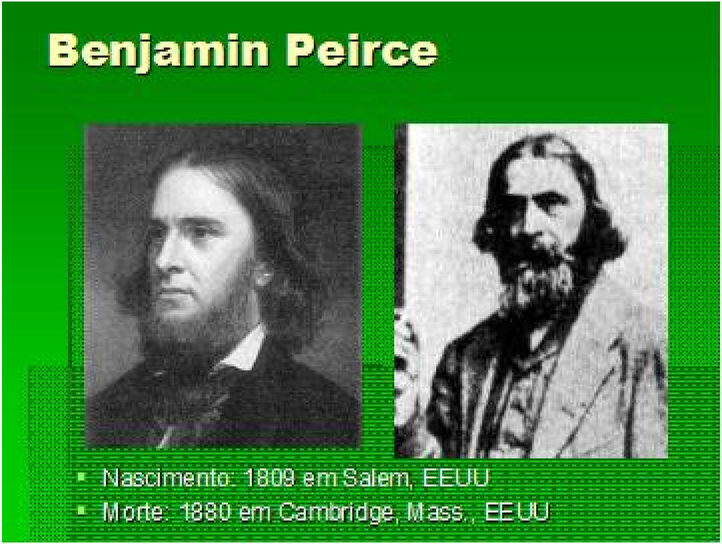
Después se consideran las *combinaciones lineales formales* de estos elementos:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n.$$

Se trata de la misma construcción de un sistema hipercomplejo, con la única diferencia de que, em vez de utilizar símbolos qualesquiera como unidades, se utilizan los elementos del grupo. Es la primeira construcción concreta de um **álgebra de grupo**. Cayley exhibe explicitamente los cálculos para $\mathbb{C}S_3$.

Claro que, como la teoria de anillos y de álgebras nao estaba todavia desarrollada, esta noción no tenia utilidad aparente y, por

El primer intento de clasificación


Benjamin Peirce
Nascimento: 1809 em Salem, EEUU
Morte: 1880 em Cambridge, Mass., EEUU

La primera tentativa de clasificación se debe a Benjamin Peirce (1808 - 1880), quien fue considerado el "padre fundador de la matemática americana".

La primera tentativa de clasificación se debe a Benjamin Peirce (1808 - 1880), quien fue considerado el "padre fundador de la matemática americana".
Era profesor de matemática en Harvard y se dedicaba principalmente a la astronomia y a escribir libros de texto.

La primera tentativa de clasificación se debe a Benjamin Peirce (1808 - 1880), quien fue considerado el "padre fundador de la matemática americana".
Era profesor de matemática en Harvard y se dedicaba principalmente a la astronomia y a escribir libros de texto.

Después de la publicación de los primeiros trabajos de Hamilton sobre o cuatérnios, se interesó tanto por estas cuestiones que ya en 1848, en el mesmo año en que Hamilton dió suas primeiras conferencias sobre cuatérnios, Peirce también incluía el tópico en sus clases en Harvard.

En 1871, publicó um trabajo litografiado, que distribuyó a sus amigos y conocidos, cubriendo él mismo los costos da publición, que em muchos sentidos puede ser considerado pioneiro en el desarrollo de la teoria de anillos: *Linear Associative Algebras*.

En 1871, publicó um trabajo litografiado, que distribuyó a sus amigos y conocidos, cubriendo él mismo los costos da publición, que em muchos sentidos puede ser considerado pioneiro en el desarrollo de la teoria de anillos: *Linear Associative Algebras*.

Peirce hizo apenas cien copias de su artículo y diez años mas tarde, en 1881, el mismo trabajo fue publicado en el *American Journal of Mathematics* con diversas notas y agregados de su hijo Charles Sanders Peirce (1839 - 1914).

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.
El espíritu de abstracción habia penetrado tanto en la matemática, que modificó la visión de Peirce sobre la materia.

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.
El espíritu de abstracción habia penetrado tanto en la matemática, que modificó la visión de Peirce sobre la materia.
En las primeiras páginas define la matemática como **la ciência que obtiene conclusiones necesarias**.

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.
El espíritu de abstracción habia penetrado tanto en la matemática, que modificó la visión de Peirce sobre la materia.
En las primeiras páginas define la matemática como **la ciência que obtiene conclusiones necesarias**.
Em defensa de este punto de vista dice:

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.
El espíritu de abstracción habia penetrado tanto en la matemática, que modificó la visión de Peirce sobre la materia.
En las primeiras páginas define la matemática como **la ciência que obtiene conclusiones necesarias**.
Em defensa de este punto de vista dice:

> *La definición de matemática es mas amplia que aquella dada ordinariamente y por la cual su alcance es limitado a la investigación cuantitativa. La definición ordinaria, como aquella de otras ciencias, es objetiva; en cuanto esta es subjetiva.*

Al comienzo del artículo, se ocupa mas de filosofia que de matemática en sentido estricto.
El espíritu de abstracción habia penetrado tanto en la matemática, que modificó la visión de Peirce sobre la materia.
En las primeiras páginas define la matemática como **la ciência que obtiene conclusiones necesarias**.
Em defensa de este punto de vista dice:

> *La definición de matemática es mas amplia que aquella dada ordinariamente y por la cual su alcance es limitado a la investigación cuantitativa. La definición ordinaria, como aquella de otras ciencias, es objetiva; en cuanto esta es subjetiva.*
> *Investigaciones recientes, de las cuales los cuatérnios son la instancia mais notable, tornam manifiesto que la definición antigua es demasiado restricta.*

Na mesma dirección, afirma:

Na mesma dirección, afirma:

> *Es importante, por lo tanto, separar el trabajo intelectual de la forma externa.*

Na mesma dirección, afirma:

> *Es importante, por lo tanto, separar el trabajo intelectual de la forma externa.*
>
> *Símbolos debem ser adoptados, y la matemática tratada por estos símbolos se llama* **álgebra***.*

Na mesma dirección, afirma:

> *Es importante, por lo tanto, separar el trabajo intelectual de la forma externa.*
>
> *Símbolos debem ser adoptados, y la matemática tratada por estos símbolos se llama* **álgebra**.
>
> *El Álgebra es, entonces, matemática formal.*

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

En su perspectiva mas filosófica, observa que un álgebra está constituida por:

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

En su perspectiva mas filosófica, observa que un álgebra está constituida por:

- Un **alfabeto** formado por los elementos de la base.

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

En su perspectiva mas filosófica, observa que un álgebra está constituida por:

- Un **alfabeto** formado por los elementos de la base.
- Un **vocabulario** consistente en las operaciones del álgebra.

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

En su perspectiva mas filosófica, observa que un álgebra está constituida por:

- Un **alfabeto** formado por los elementos de la base.
- Un **vocabulario** consistente en las operaciones del álgebra.
- Una **gramática** que da las reglas de composición (i.e., los axiomas de la estructura).

Pierce llama **Álgebra Lineal Asociativa** a aquellas estruturas que definimos antes como Sistemas Hipercomplejos.

En su perspectiva mas filosófica, observa que un álgebra está constituida por:

- Un **alfabeto** formado por los elementos de la base.
- Un **vocabulario** consistente en las operaciones del álgebra.
- Una **gramática** que da las reglas de composición (i.e., los axiomas de la estructura).

Explicitamente, define:

> *Un álgebra en la cual toda expressión se puede reducir a la forma de una suma algebraica de terminos, cada um de los cuales consiste de una única letra con un coeficiente cuantitativo, se llama un* **álgebra lineal.**

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

- Elementos **nilpotentes**, i.e., aquellos elementos a para los cuales existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

- Elementos **nilpotentes**, i.e., aquellos elementos a para los cuales existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$.
- Elementos **idempotentes**, i.e., aquellos elementos e tales que $e^2 = e$.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

- Elementos **nilpotentes**, i.e., aquellos elementos a para los cuales existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$.
- Elementos **idempotentes**, i.e., aquellos elementos e tales que $e^2 = e$.
- Pruebe, en seguida, un resultado fundamental: toda álgebra (de dimensión finita) contiene un elemento nilpotente o um elemento idempotente.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

- Elementos **nilpotentes**, i.e., aquellos elementos a para los cuales existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$.
- Elementos **idempotentes**, i.e., aquellos elementos e tales que $e^2 = e$.
- Pruebe, en seguida, un resultado fundamental: toda álgebra (de dimensión finita) contiene un elemento nilpotente o um elemento idempotente.
- Considera, por primeira vez, álgebras que pueden no tener unidad.

Pierce intenta clasificar las álgebras determinando las posibles tablas de multiplicación de los elementos de una base.
Para eso, busca métodos de elejir adecuadamente los elementos de la base em cuestión. De esa forma, ele consegue determinar 154 álgebras no isomorfas, de dimensión menor o igual a seis.
Trabajando de esa forma, ele introduce definiciones que hoy son fundamentales en teoria de anilos:

- Elementos **nilpotentes**, i.e., aquellos elementos a para los cuales existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$.
- Elementos **idempotentes**, i.e., aquellos elementos e tales que $e^2 = e$.
- Pruebe, en seguida, un resultado fundamental: toda álgebra (de dimensión finita) contiene un elemento nilpotente o um elemento idempotente.
- Considera, por primeira vez, álgebras que pueden no tener unidad.
- Introduce la llamada **descomposición de Pierce** asociada a un indempotente.