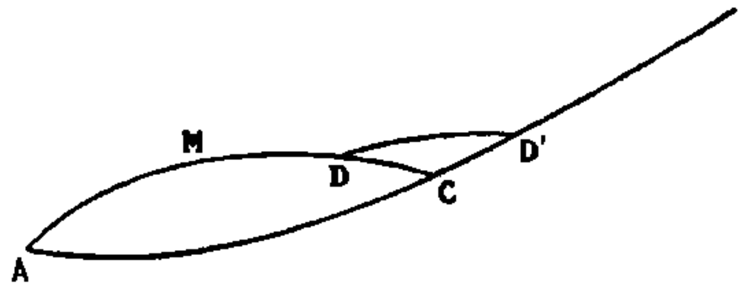
Is a geodesic truly minimizing ?

- Locally, lines which are defined by the geodesics equation minimize the length of paths between two points.
- This property is locally set up by analytically means.
- A global question about this property : in which conditions, lines defined by the geodesics equation are globally minimizing ?
- In fact, two questions – minimizing among infinitely closed curves or among all curves

- The first problem – an analytic one – the notion of conjugate points – conjugate point are intersection points of infinitely closed geodesics – *Jacobi fields*
- The second problem – a geometric one – the cut locus – the cut points are intersection points of geodesics of same length



Cut point and conjugate point of a geodesic [Darboux 1895, 3, p. 89].

- The local-global transition – to question an infinitesimal object about global consequences

- A first example : Sturm’ qualitative theory of differential equations

« […] on ne sait intégrer [les équations différentielles du second ordre] que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu’on possède l’expression de la fonction qui vérifie une telle équation , soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrale définie ou indéfinie, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. » [Sturm 1836, 106]

Charles François Sturm

(1803-1855)

- Dealing with qualitative properties of solutions of differential equations

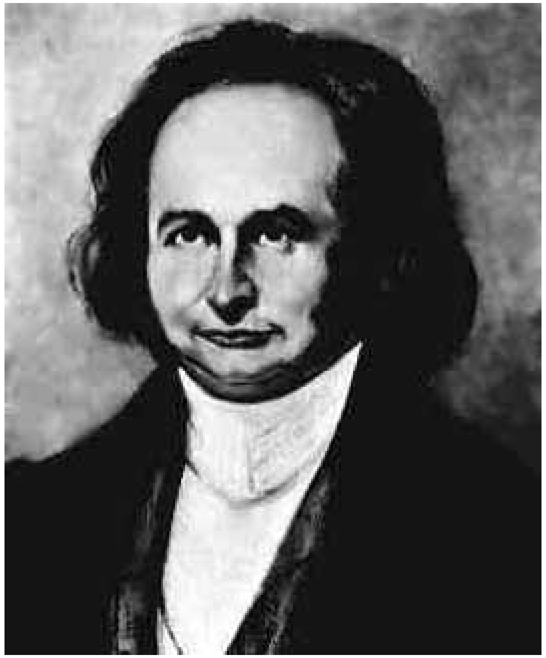
« […] la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s’agit. S’il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n’en est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d’autres termes, d’examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l’ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu’on ait besoin de leur intégration. » [Sturm 1836, 106-107]

- In his paper, Sturm took interest in the comparaison of solutions in relation the variation of coefficients of the equation.

« [nous allons encore comparer les valeurs des deux fonctions V' et V'', définies par les équations différentielles

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + G'V' = 0$$
$$\frac{d^2V''}{dx^2} + G''V'' = 0$$

dans l'intervalle compris entre deux limites a et b, en supposant que [...] $G'' \geq G'$. Si donc on suppose $V' \geq V''$pour $x = a$ on aura constamment $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b. » [Sturm 1836]



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

In *Vorlesungen über Dynamik*, Jacobi defined the principle of least action in the way than Poisson, Lagrange or Laplace :

$$\int \sum m_i v_i ds_i$$

is minimal when the system moves from an state to another.

In the case of one material point on a surface whithout forces, the integral to minimize is

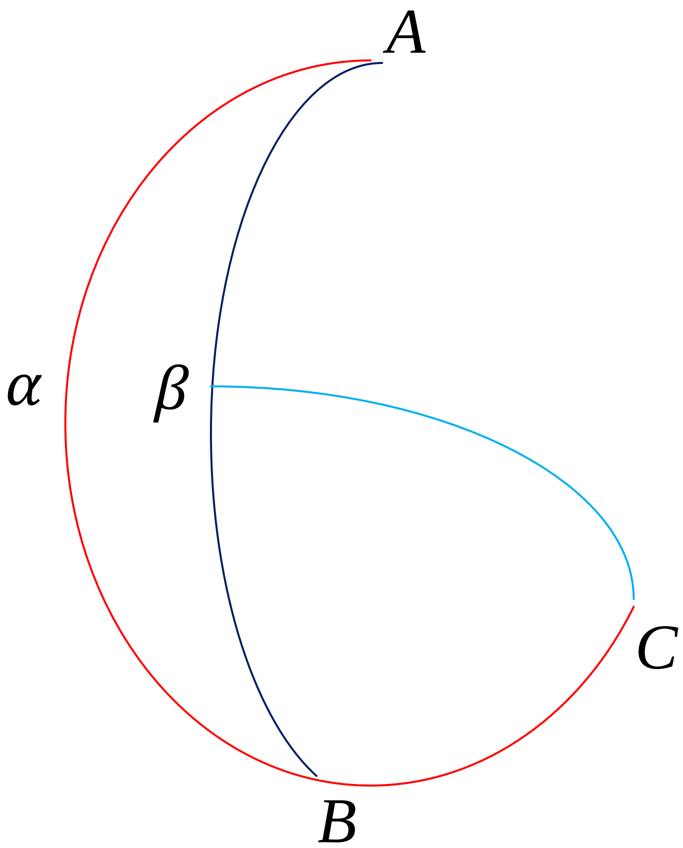
$$\int ds.$$

Jacobi explained a difficulty : the geodesics are minimum only between some boundaries (*Grenzen*).

« En réalité, la ligne que fournit le calcul des variations appliqué à ce problème est un minimum sur la surface, si la condition dérivée de la règle générale établie ci-dessus est remplie, savoir qu’entre les deux points extrême, il n’y en ait pas deux autres entre lesquels on puisse mener une nouvelle lignes infiniment rapprochée de la première et plus courte. Mais dans tout autre cas, on a ni maximum, ni minimum. Au reste, quand il s’agit de surfaces ayant en chaque point des courbures opposées, j’ai démontré que le minimum existe réellement. » [Jacobi 1837]

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

An example on the sphere



- A and B, diametrically opposite
- $A\alpha BC$ an arc of great circle
- $A\beta B$ an half great circle infinitely closed from $A\alpha BC$
- So,

  $A\alpha BC = A\beta B + BC =$

  $= \ A\beta + \beta B + BC \geq \ A\beta + \beta C$

B is a cut point of A but also a conjugate point of A !!!

Jacobi gave (without proof) the following theorem :

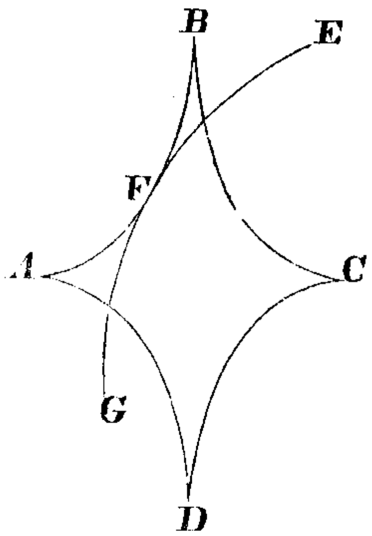
« Wenn man von einem Punkt einer Oberflache nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten : zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen entweder fortwärend neben einander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Continuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Curve. Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bs zum Berührungspunkte mit der einhüllende Curve. » [Jacobi 1843]

The envelope of a family of lines is the locus of intersection points of infinitely closed lines of the family. The lines are tangent to the envelope.

Without proof,

- First case : plane, developable surface and concave-convex surfaces like hyperboloïds
- Second case : ellipsoïds of revolution
- A beautiful example of Jacobi : let an ellipsoïd not very different of a sphere so that geodesics which start from a same point defined around the opposite point an envelope which is a closed curve.

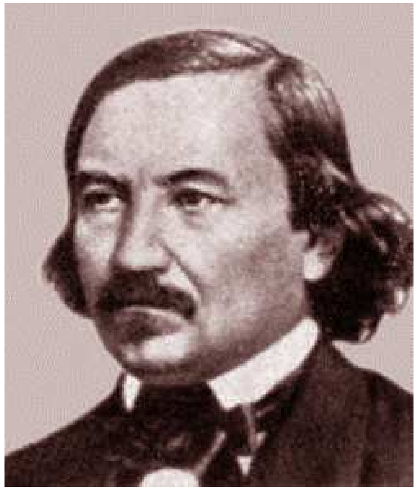
- A paradox : between there is no minimizing curve between the initial point and points that are inside the enveloppe. Jacobi explained that the paradox is only apparent. Each geodesic (from the initial point) cut first the envelope in a non-critical point for this geodesic before to reach the first conjugate point F in which the geodesic is tangent to the envelope



„Von E her tritt sie in die Heinhüllende Curve ein, und im Berührungspunkt F verliert sie ihre Eigenschaft kürzeste Linie zu sein." [Jacobi, 1843]

A theorem of Jacobi (*quoted by Bonnet*)

Carl Gustav Jacobi
(1804-1851)



Joseph Bertrand
(1822-1900)

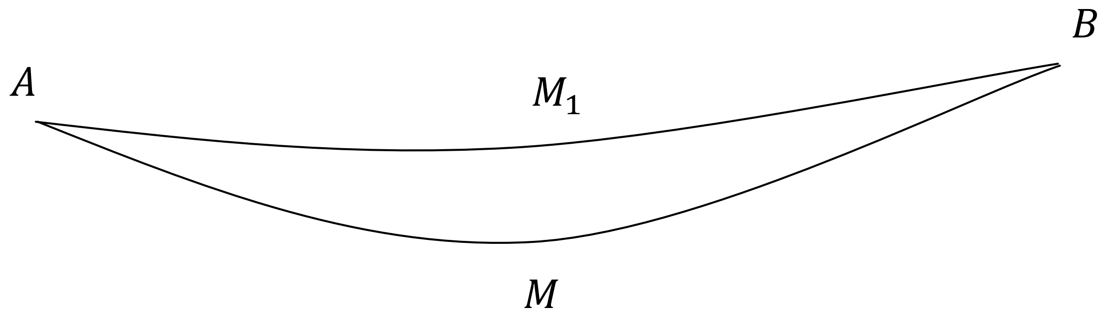
« Étant donnée une ligne géodésique AM issu du point A, et si A' est le point où cette ligne est rencontrée par une ligne géodésique infiniment voisine et issue aussi du point A, la ligne AM sera toujours minima entre le point A et le point A', et cessera d'être minima au-delà du point A'. »

· « Jacobi n'a pas montré son théorème ». Il fait juste référence à ses contributions sur les minimas et maximas dans le calcul des variation (Jacobi 1837).

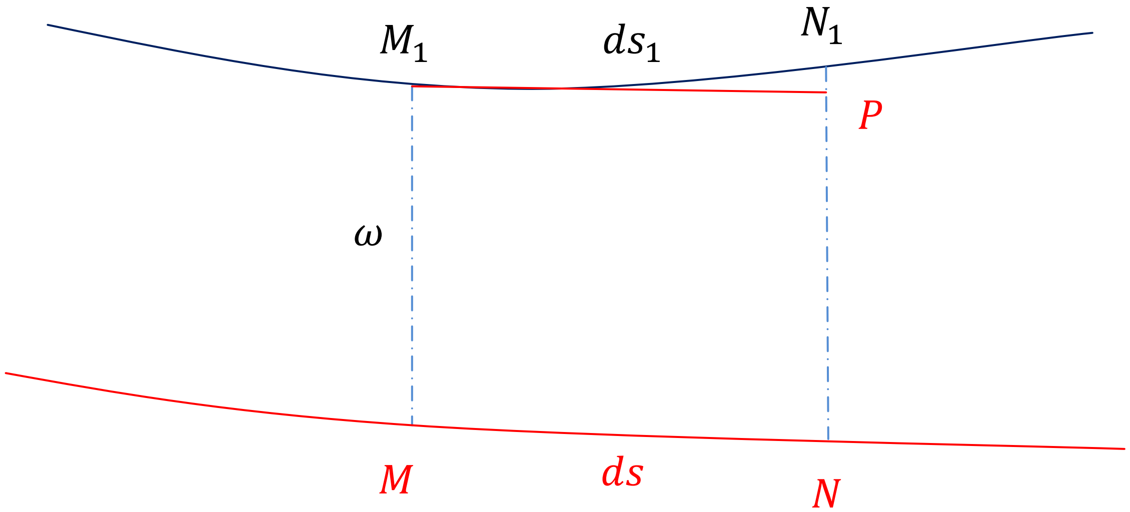
· Bertrand, en suivant les indications de Jacobi, a montré la première partie du théorème, « savoir qu'entre le point A et le point A' la ligne AM est toujours minima ; quant à la seconde partie,
M. Bertrand pense qu'elle pourrait bien ne pas être exacte et que, dans tous les cas, la méthode employée par Jacobi est impuissante pour décider de la question. »
Les conditions obtenues par Legendre, Jacobi en calcul des variations, sont suffisantes mais pas nécessaires.

- The second variation of length of geodesics

« Soit AMB un arc de ligne géodésique partant du point A et aboutissant au point B. Traçons une ligne quelconque AM_1B infiniment voisine de AMB et ayant les mêmes extrémités. Je vais d'abord évaluer la différence de longueur des deux courbes AMB et AM_1B en tenant compte des infiniment petits du second ordre. » [Bonnet 1855, 33]

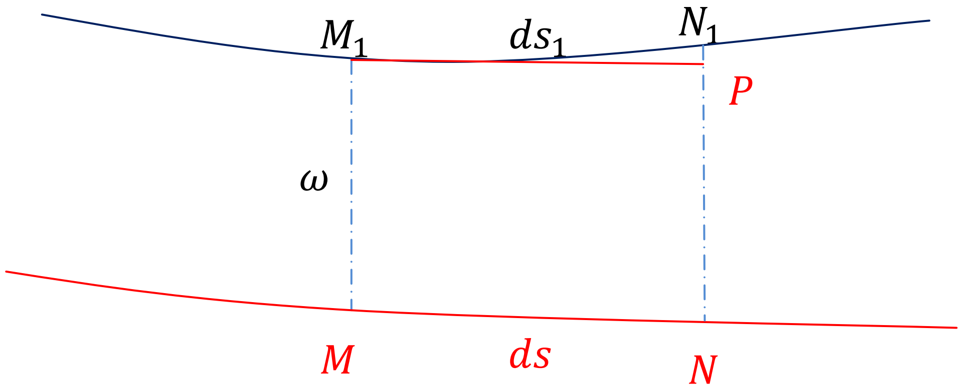


- MM_1 the geodesic from M that is orthogonal to the geodesic AMB, NN_1 the geodesic from N that is orthogonal to the geodesic AMB, P the point of NN_1 so that $MM_1 = NP$, $MN = ds$, $M_1N_1 = ds_1$ et ω the distance MM_1.



As all is infinitely small, we are on a surface element, so M_1PNM is a rectangle (the angles $\widehat{M}$, $\widehat{M_1}$, $\widehat{P}$, $\widehat{N}$ are right). Hence

$$M_1N_1 = ds_1 = \sqrt{M_1P^2 + PN_1{}^2}.$$



- PN_1 is the variation of ω, let $\omega' ds$. Hence, $NN_1 = MM_1 + \omega' ds$.
- M_1P is the distance between two corresponding points on geodesics normales that are orthogonal to a geodesic. Following Gauss (1827), M_1P is a solution of the differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\omega^2} + \dfrac{u}{RR'} = 0 \\ \dfrac{du}{d\omega}(0) = 0 \\ u(0) = \omega. \end{cases}$$

- We may suppose that RR' is constant (we are on a surface element) and neglecting higher order terms,

$$M_1P = \left(1 - \frac{\omega^2}{2RR'}\right) ds$$

  Then, neglecting higher order terms, we get

$$ds_1 = M_1N_1 = ds\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2RR'}\right)^2 + \omega'^2}$$

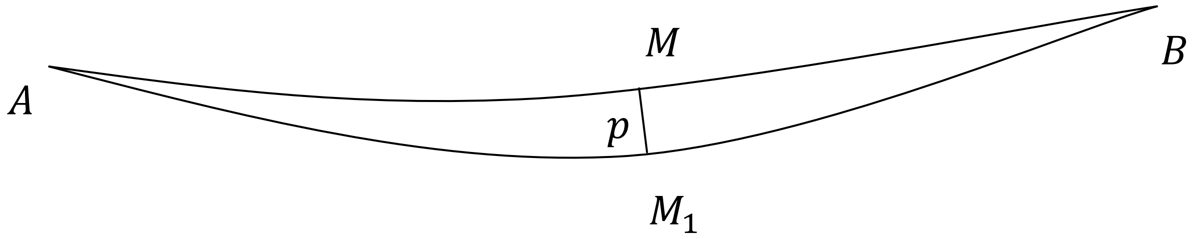
- So, the second variation of the length is equal to

$$\frac{1}{2}\int \left(\omega'^2 - \frac{\omega^2}{RR'}\right) ds$$

- The variation is positive if RR' is negative, so

  « Dans une surface à courbures opposées, une ligne géodésique est minimisante dans toute son étendue. » [Bonnet 1854, 34]

- If $RR' > 0$, we have to distinguish two cases :



« Appelons maintenant p la distance comprise entre la ligne AMB et une autre ligne (géodésique) infiniment voisine partant du point A, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{p}{RR'} = 0,$$

et $p = 0, \frac{dp}{ds} =$ l'angle infiniment petit $d\theta$ pour $s = 0$. »

1st case : if $p \neq 0$ between A et B, then

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{p''}{p}$$

and we write the formula of the second variation of the length :

$$\frac{1}{2}\int\left(\omega'^2 + \frac{p''}{p}\omega^2\right)ds = \frac{1}{2}\int\left(\omega' - \frac{p'}{p}\omega\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\omega^2 p'}{p}\right)' ds$$

So, the second variation is positive « car ω s'annule aux limites ».

« J'en conclus que, tant que l'extrémité B n'a pas dépassé le point A' où la ligne AMB est rencontrée par la ligne géodésique infiniment voisine partant du point A, l'arc AMB de ligne géodésique est minimum entre le point A et le point B : c'est la première partie du théorème de Jacobi. »

2$^{\text{nd}}$ case : p cancels before M reaches B.

In this case, we choose ω (which for the moment « est assujetti à la seule solution de s'annuler aux points A et B ») as solution of the differential equation

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} + \omega\left(\frac{1}{RR'} - \frac{1}{k^2}\right) = 0,$$

$\omega = 0, \frac{d\omega}{ds} = d\theta$ pour $s = 0$.

« Cela résulte de ce que, lorsque dans une équation de la forme

$$\frac{d^2p}{ds} + Gp = 0$$

on fait diminuer G d'une manière continue, les racines de $p = 0$ vont en augmentant d'une manière continue (p et $\frac{dp}{ds}$ gardant les mêmes valeurs pour $s = 0$). »

(On ajuste la solution de telle manière que le premier point conjugué soit B.)

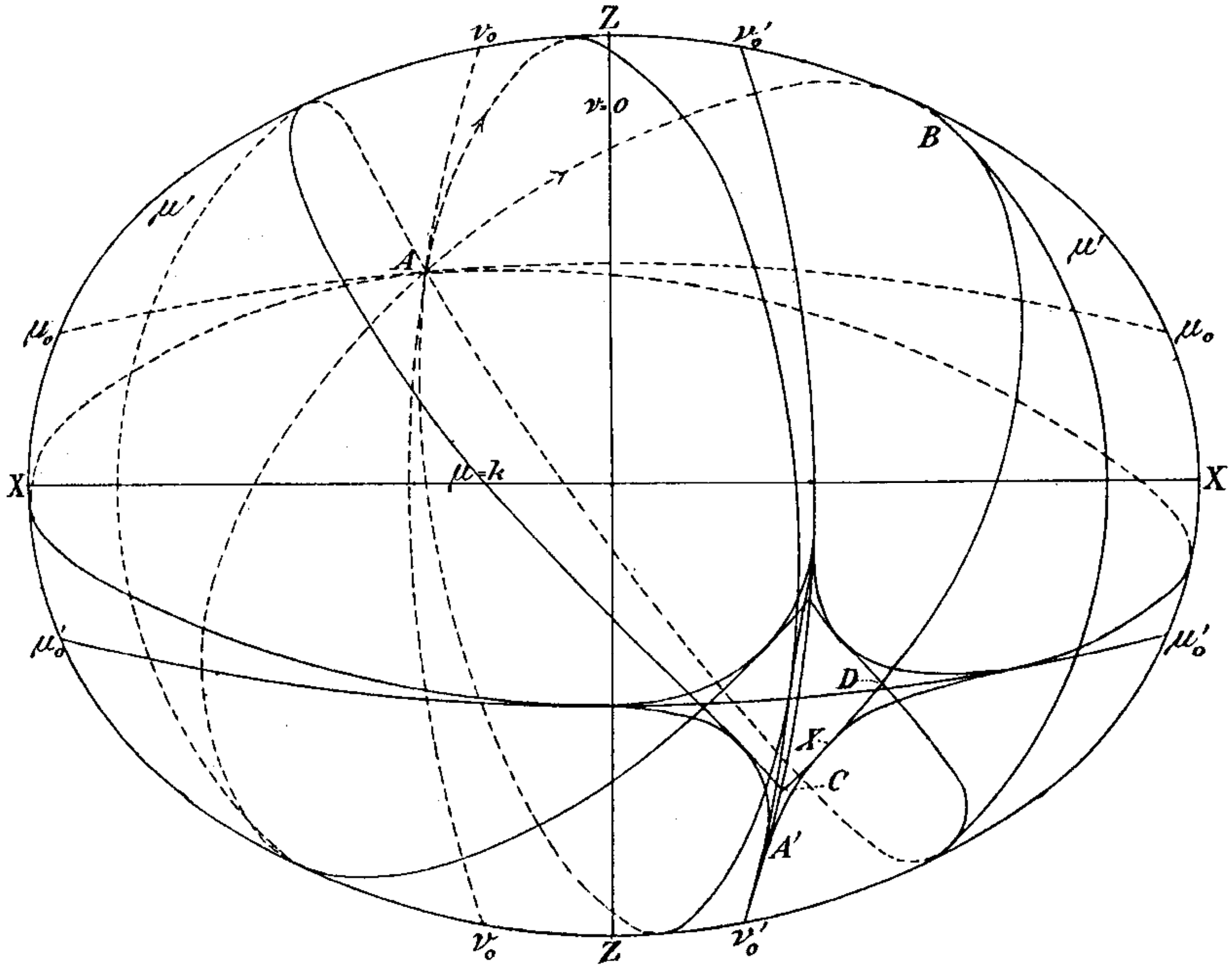
La variation seconde s’écrit alors

$$\int \left(\omega'^2 - \frac{\omega^2}{RR'}\right) ds = -\int \omega \left(\omega'' + \frac{\omega}{RR'}\right) ds = -\int \frac{\omega^2}{k^2} ds.$$

« Ainsi la variation seconde de l’intégrale $\int ds$ peut devenir négative, et l’arc AMB n’est ni maximum ni minimum entre le point A et le point B. »

Therefore, we get a global result :

« En effet, on pourra dire que si, dans une surface convexe, le produit RR' des rayons de courbure principaux est moindre que la constante a^2, le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface sera *toujours* moindre que πa. De là résulte que toute surface convexe dont les rayons de courbure principaux ne deviennent jamais infinis, est nécessairement fermée. »



The conjugate locus and the cut locus of a point on the ellipsoïd [Braunmühl 1882].

La géodésique issue de A tangente en B à la ligne de courbure de paramètre μ' coupe l'autre géodésique tangente à la ligne de courbure de paramètre μ' en D avant d'atteindre le premier point conjugué X. De même, les deux géodésiques tangentes à la ligne de courbure de paramètre ν_0' se coupent avant d'atteindre leur point conjugué qui est dans ce cas le point de tangence avec la ligne de courbure de paramètre ν_0'. Les deux sommets du lieu conjugué qui sont sur la ligne de courbure de paramètre ν_0' sont des foyers en talon pour reprendre la terminologie de Poincaré (voir ci-dessous). Par contre, les deux géodésiques issues de A tangentes à la ligne de courbure μ_0' atteignent leur point conjugué avant de se rencontrer et les deux sommets du lieu conjugué qui sont sur la ligne de courbure de paramètre μ_0' sont des foyers en pointe.