Deuxième École d’Histoire Conceptuelle des Mathématiques

Cordoba - Argentine

23-27 novembre 2010

Mohamad AL HOUJAIRI
(Université Libanaise et CNRS-Liban)

L’histoire ancienne de la géométrie sphérique, considérée comme processus de formation des concepts mathématiques adéquats, peut être divisée en trois étapes essentielles:

1- étape de la géométrie sphérique extrinsèque dans les *Éléments* d’Euclide et les *Sphériques* de Théodose de Tripoli (107-43 avant J.-C)

2- étape de commencement (sur le niveau primitif) de la géométrie intrinsèque dans les *Sphériques* de Ménélaüs (milieu du premier siècle après J.-C)

3- étape de formation préliminaire d'un langage géométrique adéquat aux objets sphériques étudiés (tradition sphérique de la période arabe: théorème de sinus et trigonométrie sphérique).

1- Sur les commentaires d'Ibn Hūd de Saragosse des *Sphériques* de Ménélaüs

Remarques et notations adoptées

- Les études historiques convergent et conduisent vers la conclusion suivante: le théorème de sinus a été découvert, d'une manière indépendante, par trois mathématiciens de la Tradition Arabe:

  - al-Khujandī, abū Mahmūd (mort en 1000)
  - al-Būzjānī , abū al-Wafā' (mort en 998)
  - Ibn 'Irāq, abū Naṣr (mort en 1036)

- La version initiale grecque *des Sphériques* de Ménélaüs est perdue; elle est conservée dans les traductions et les commentaires arabes.

Théorème de sinus selon Ibn ‘Irāq

- Al-Bīrūnī (mort en 1048) a écrit: « Voie suivie par Abū Nasr, pour la “*figure qui dispense*”, dans la lettre qu’il m’a adressée:

«..les rapports, les uns aux autres, des sinus des côtés d’un triangle formé d’arcs de grands cercles d’une sphère sont égaux aux rapports respectifs des sinus des angles qui leurs sont opposés»[1]…(*La figure qui dispense, selon* Ibn ‘Irāq)

1- On trouve la traduction du texte du théorème d’Abū Nasr (*la figure qui dispense*), par exemple, chez Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a*. Institut Français de Damas. Damas, 1985, (p. 111).

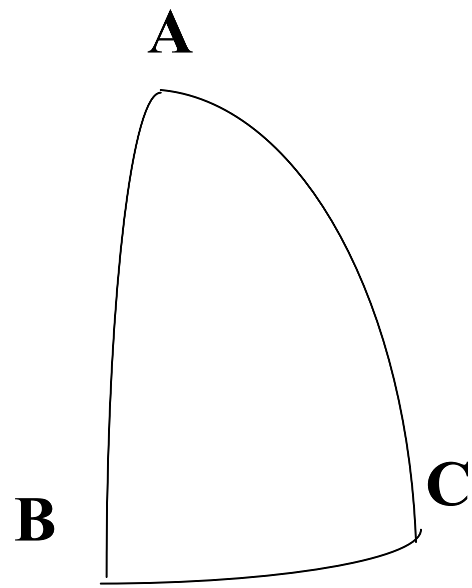


Figure 0

$$\frac{Sin\ \hat{A}}{Sin\ \overparen{BC}} = \frac{Sin\ \hat{B}}{Sin\ \overparen{AC}} = \frac{Sin\ \hat{C}}{Sin\ \overparen{AB}}$$

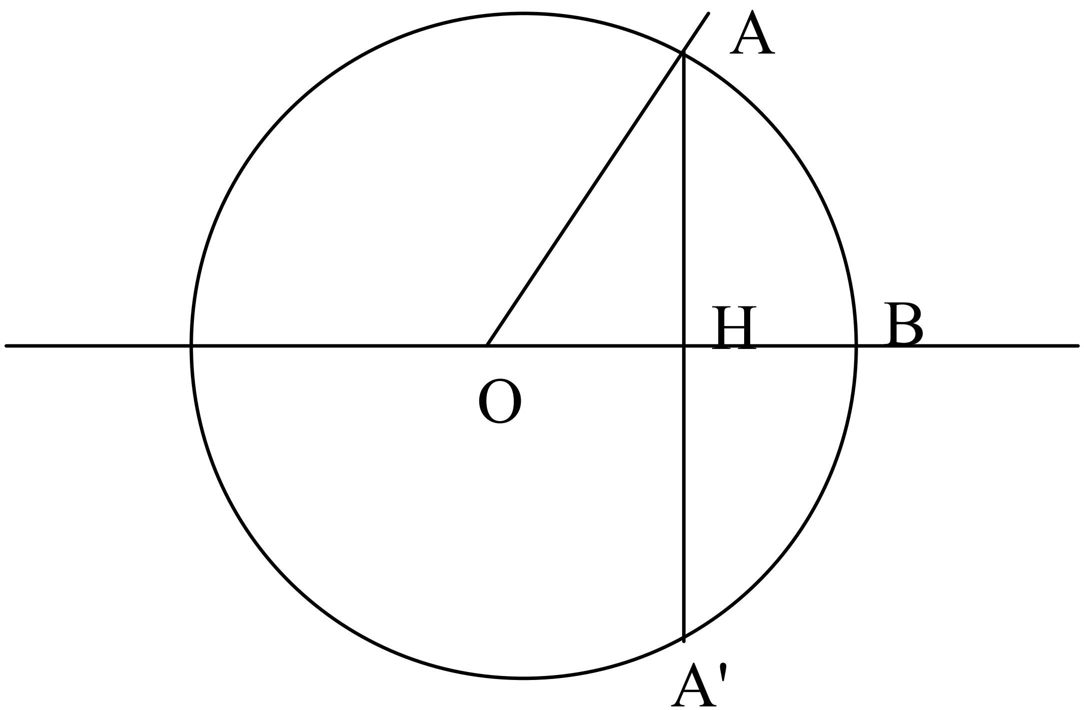
- Ultérieurement on va utiliser la notation suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}(AB) &= \mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB)) \\ &= 2\,\mathrm{Sin}(\mathrm{arc}(AB)) \\ &= 2\,R\,\sin(\mathrm{arc}(AB)), \end{aligned}$$

(R est le rayon du cercle; hom: homologue; crd: corde)

$$\begin{aligned}\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB)) &= \mathrm{sgm}(AA') \\ &= \mathrm{hom}(\mathrm{arc}(AB)) = 2\ \mathrm{Sin}\ (\mathrm{arc}(AB)) \\ &= 2.R.\sin\ (\mathrm{arc}(AB)) = 2\ \mathrm{sgm}(AH),\end{aligned}$$

(R est le rayon du cercle; hom: homologue; crd: corde)



Théorème de Ménélaüs

1) $$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FC}}{\sin \widehat{CE}},$$

2) $$\frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AF}}{\sin \widehat{FD}} \cdot \frac{\sin \widehat{DC}}{\sin \widehat{CB}}.$$

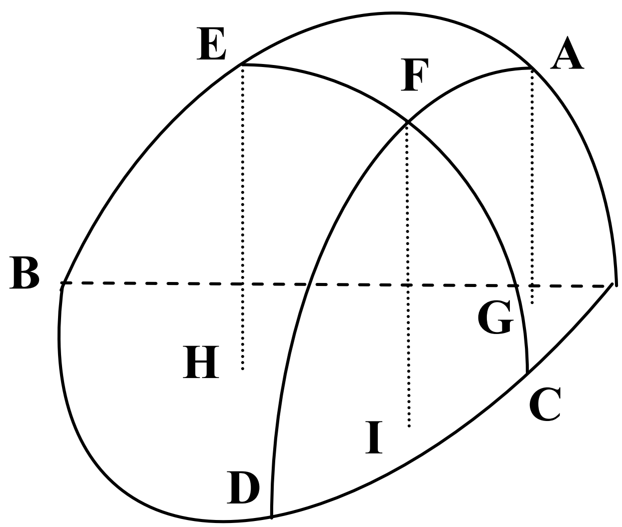


Fig. 2

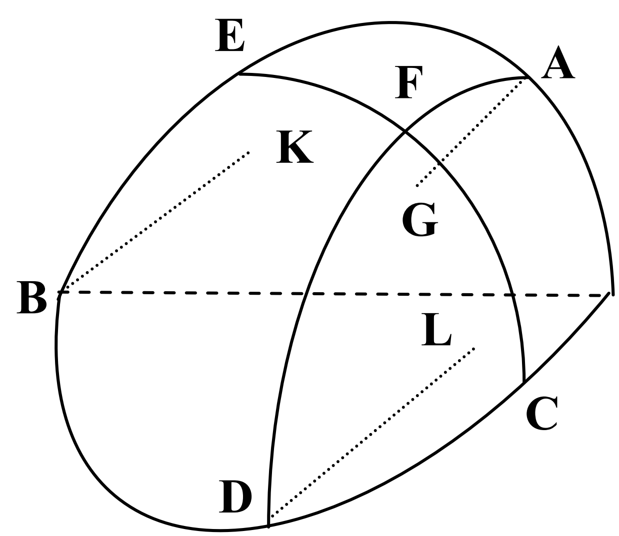


Fig. 3

Introduction

- La recherche astronomique pendant le IX^{e} et le X^{e} siècle était à l'origine d'un développement important en géométrie sphérique.

- Les méthodes inventées pour résoudre les problèmes métriques sur l'étendue de la sphère ont abouti, à la fin du X^{e} siècle, à l'émergence d'une discipline indépendante de l'astronomie et de la géométrie: la trigonométrie, et à une authentique réforme de la géométrie sphérique.

- Une fois affranchis du théorème de Ménélaüs, les mathématiciens comme al-Khujandī, al-Būzjānī et Ibn ‘Irāq ont en effet accumulé des résultats: les formules usuelles de la trigonométrie, le triangle polaire, etc.

- À leur suite, al-Bīrūnī, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (mort en 1274) menèrent de plus en plus loin cette recherche trigonométrique.

- En géométrie sphérique, Ibn al-Haytham a introduit des méthodes infinitésimales en assimilant les petits triangles sphériques à des triangles rectilignes.

- À côté de ces grands noms à l’avant-garde de la recherche, d’autres savants ont continué à s’interroger sur l’héritage des anciens: ils ont développé le contenu mathématique et amélioré les méthodes. Le mathématicien de Saragosse, Ibn Hūd (mort en 1085 [478 H.]) est précisément de ceux-ci.

- S’appuyant sur ses prédécesseurs, Ibn Hūd développe, dans son livre intitulé *al-Istikmāl* (*La Complétion*), une ‘théorie classique’ - plutôt d’aspect pédagogique – des géométries sphériques de Théodose (107-43 avant J.-C.) et de Ménélaüs (milieu du premier siècle après J.-C.).

- Ce développement mené dans le livre d’*al-Istikmāl* passe paradoxalement tout à fait loin du théorème des sinus qu’Ibn Hūd ne mentionne nulle part dans ses *Sphériques*.

- Néanmoins, en comparant le texte de géométrie sphérique d'Ibn Hūd, celui de Ménélaüs tel qu'on le trouve dans le livre d'Ibn ʿIrāq et les commentaires propres de ce dernier, on remarque que le texte de l'*Istikmāl* reflète une tendance - bien que très faible en l'absence du théorème des sinus – à une reprise par des démonstrations intrinsèques de quelques théorèmes sphériques « classiques ».

Notre présente étude porte sur le théorème de Ménélaüs et ses applications directes dans l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd.

L'étude est basée sur le texte occupant les folios 76v-90v du manuscrit de l'*Istikmāl* "Copenhague, *Or. 82*"

Le texte sphérique de l'*Istikmāl* est transmis par une seule source connue qui est le manuscrit déjà mentionné.

- Ensuite, en considérant quelques propositions des *Sphériques* de l'*Istikmāl*, nous allons faire régulièrement recours aux *Sphériques* de Ménélaüs et aux celles de Théodose pour réaliser une comparaison directe avec les *Sphériques* de l'*Istikmāl*.

En s’appuyant sur l’analyse de cette comparaison mentionnée, nous essayerons conclure à propos de processus de formation des concepts et de langage sphériques adéquats aux objets étudiés sur l’étendue de la sphère.

§ 9 - Proposition n° 34:

Soient (C_1) et (C_2) deux grands cercles de la sphère tels que arc(C_1) et arc(C_2) se coupent aux points A et C. Si E et G sont deux points arbitraires situés sur la circonférence arc(C_1), différents de A et C et admettant respectivement les points K et L comme projections orthogonales sur le plan du cercle (C_2), alors

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AG))} = \frac{\mathrm{sgm}(EK)}{\mathrm{sgm}(GL)} \qquad (1).$$

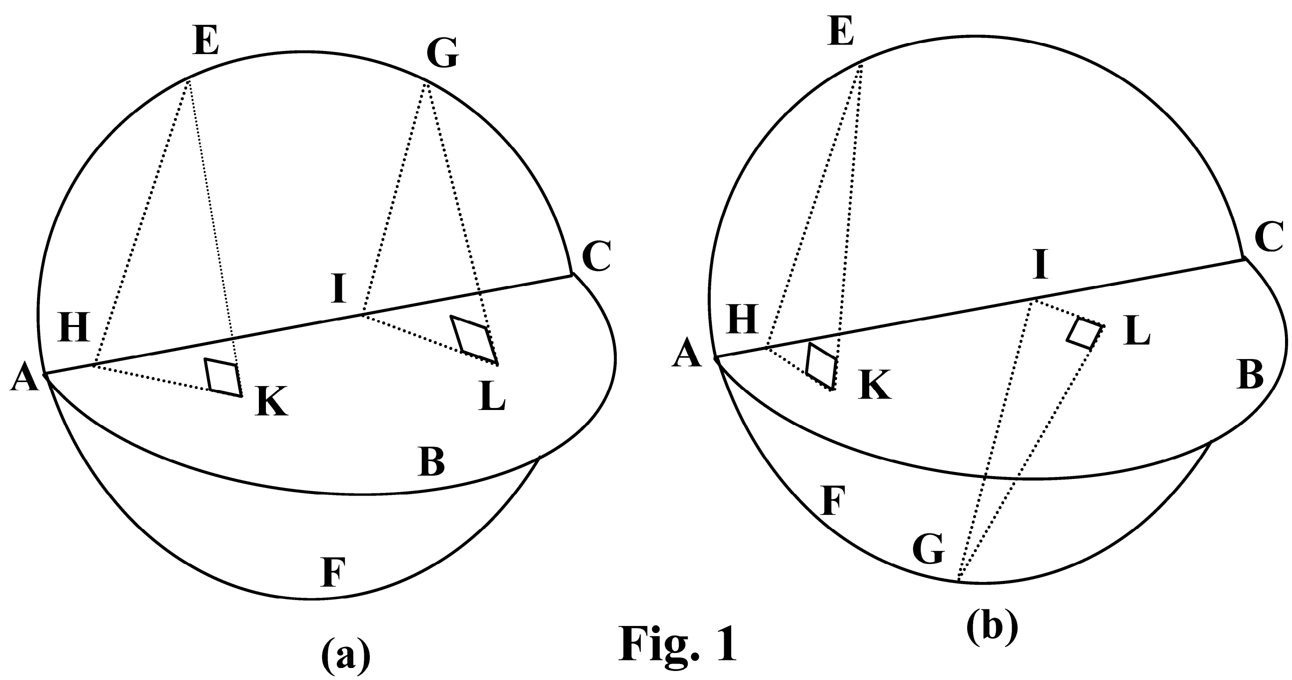


Fig. 1

$$\frac{\text{crd}(2\text{arc}(AE))}{\text{crd}(2\text{arc}(AG))} = \frac{\text{sgm}(EK)}{\text{sgm}(GL)} \qquad (1).$$

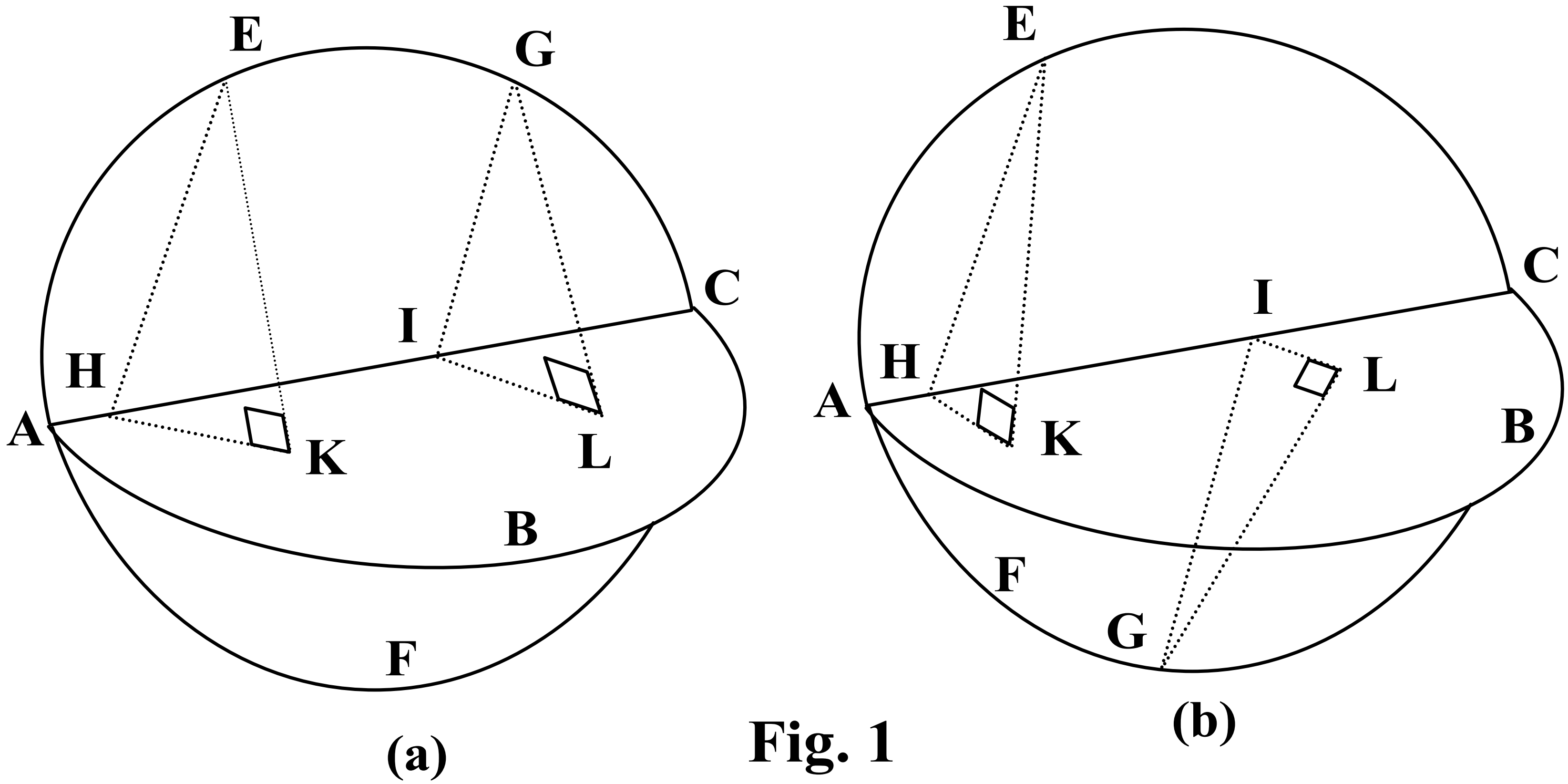


Fig. 1

- Un résultat, presque identique à celui de la proposition n° 34, est dû à Thābit ibn Qurra (mort en 901). Ce résultat conduit à une élégante démonstration du théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaüs[1].

1 Voir: Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd ʿIlm Al-Hay'a*. Institut Français de Damas. Damas, 1985; Hélène Bellosta, "Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur*", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, Number 1, March 2004, pp. 145-168.

- **§ 10 - Proposition n° 35 (théorème De Ménélaüs)**:
-

Soient arc(AB), arc(BC), arc(AD) et arc(EC) quatre arcs non coplanaires deux à deux, de grandes circonférences, plus petits chacun qu'une demi-circonférence d'un grand cercle de la sphère et tels que le point E appartienne à arc(AB) et le point D appartienne à arc(BC). Si arc(EC) et arc(AD) se coupent au point F, alors les deux relations suivantes sont satisfaites:

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AD))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DF))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CE))}$$

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))} = \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AF))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FD))} \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}$$

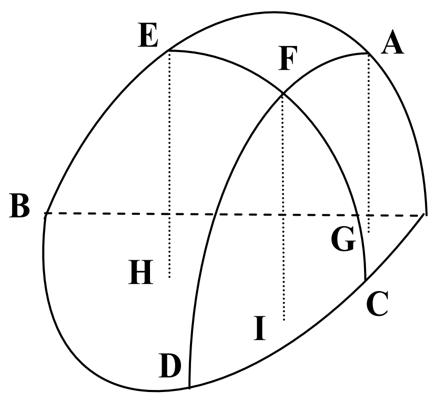


Fig. 2

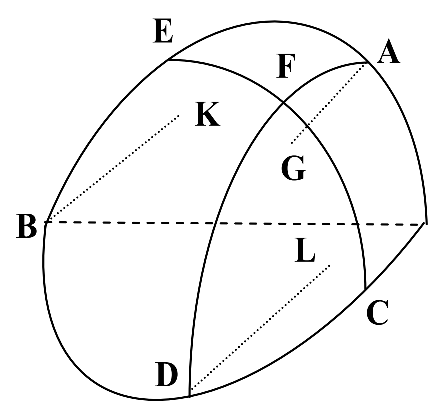


Fig. 3

Les Sphériques de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 1, livre III, pp. 62-64:

"Proposition 1: Les deux arcs CE, BD se coupent au point A. Des deux points C et B on décrit les deux arcs CD et BE qui se coupent au point G. On suppose que chacun de ces quatre arcs est d'une grande circonférence de la sphère et que chacun est plus petit qu'une demi-circonférence. Je dis que le rapport du sinus de l'arc CE au sinus de l'arc EA est composé du rapport du sinus de l'arc CG au sinus de l'arc GD et du rapport du sinus de l'arc BD au sinus de l'arc BA"

$$\frac{\sin \overparen{CE}}{\sin \overparen{EA}} = \frac{\sin \overparen{CG}}{\sin \overparen{GD}} \cdot \frac{\sin \overparen{DB}}{\sin \overparen{BA}}$$

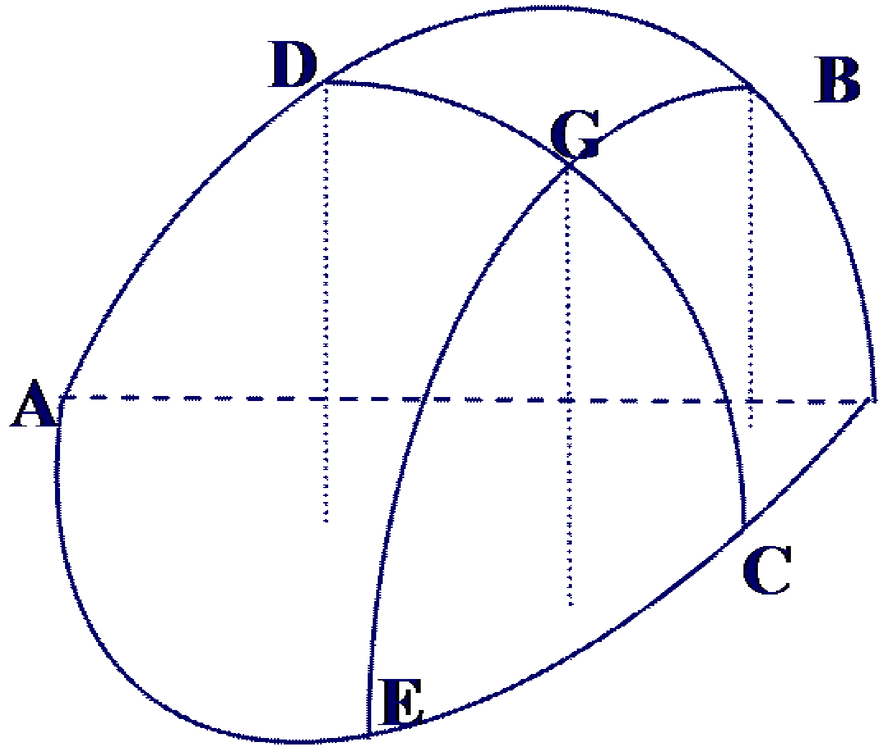


Figure 60

• **§ 11 - Définition n° 1**: la corde de l'arc double de arc(AB) s'appelle homologue de arc(AB).

Proposition n° 36 (règle de quatre quantités)**:**

Si ABC et DEG sont deux triangles sphériques tels que angle(A) soit égal à angle(D), alors l'équivalence suivante est satisfaite:

$$[(\text{angle}(C) = \text{angl}(G)) \vee (\text{angl}(C) + \text{angl}(G) = \pi)\ ] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\text{hom(AB)}}{\text{hom(BC)}} = \frac{\text{hom(DE)}}{\text{hom(EG)}}$$

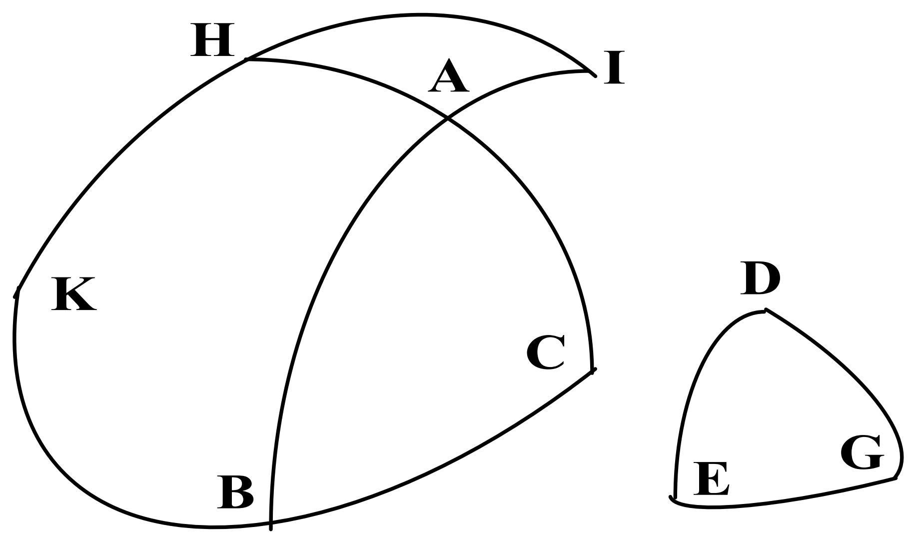


Fig. 4

$$(\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{D}}) \Rightarrow \{[(\widehat{\mathrm{C}}=\widehat{\mathrm{G}}) \vee (\widehat{\mathrm{C}}+\widehat{\mathrm{G}}=\pi)] \Leftrightarrow \frac{\mathrm{hom(AB)}}{\mathrm{hom(BC)}}=\frac{\mathrm{hom(DE)}}{\mathrm{hom(EG)}}\}\ .$$

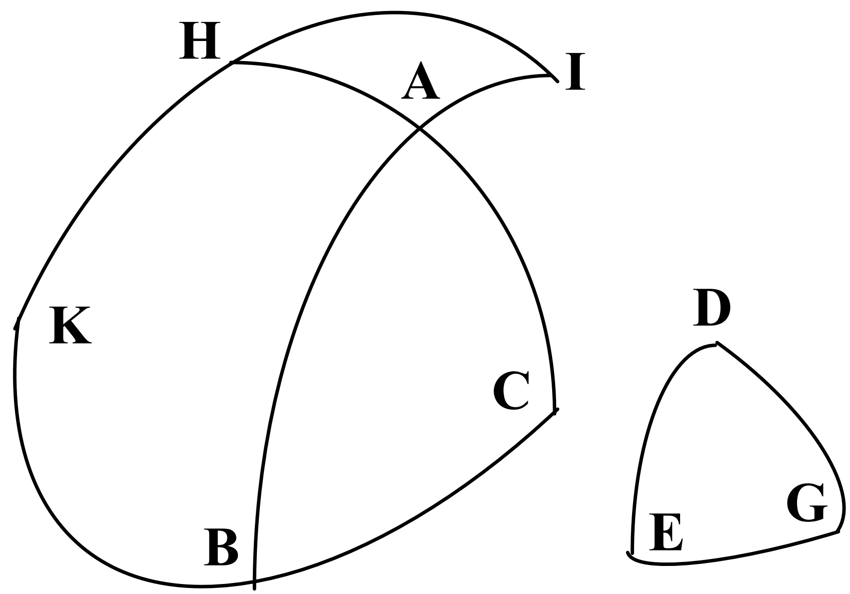


Fig. 4

- On trouve le même résultat chez Ménélaüs.

  Bien qu’Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme “homologue” au lieu du terme “Sinus” utilisé par Ménélaüs, la formulation textuelle ainsi que la démarche démonstrative de la proposition n° 36 coïncident, presque littéralement, avec celles de la proposition correspondante de Ménélaüs.

  Afin d’effectuer une comparaison concrète, nous exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

- **Proposition (***Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 2, livre III):

  «Si, parmi les angles de deux figures trilatères, deux sont respectivement égaux et si deux autres sont soit respectivement égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des sinus des deux côtés qui sous-tendent les deux angles respectivement égaux aux sinus des autres côtés qui sous-tendent les deux autres angles - qui sont soit respectivement égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits - sont deux rapports égaux; et réciproquement». (voir la figure 4)

- Ibn ʿIrāq discute la démonstration de la proposition 2 (livre III) de Ménélaüs. Il écrit :

  “Si on observe de près et si l’on compare ce que nous avons fait dans « *La figure qui dispense* » et ce que Ménélaüs a fait dans *La figure ‘secteur’* qui exige plusieurs démonstrations, et si l’on sait que les deux angles A et D des deux triangles sont égaux et que le rapport du sinus de l’arc BC au sinus de l’arc BA est égal au rapport du sinus de l’arc EG au sinus de l’arc ED, il devient clair, rapidement, sans long discours et sans entamer aucune démonstration, à part l’utilisation de *La figure qui dispense* − qui remplace *La figure ‘secteur’*−, que les deux angles G et C sont soit égaux, soit de somme égale à deux angles droits, puisque les sinus des deux angles sont égaux”.

- Commentaire sur la note d’Ibn ʿIrāq:
  D’après le théorème du sinus, on aura (voir la figure 4):

$$\frac{\text{Sin(angl(G))}}{\text{Sin(arc(DE))}} = \frac{\text{Sin(angl(D))}}{\text{Sin(arc(GE))}} \quad , \quad \frac{\text{Sin(angl(C))}}{\text{Sin(arc(AB))}} = \frac{\text{Sin(angl(A))}}{\text{Sin(arc(CB))}}$$

D’autre part, on a:

$$\text{angl(A)} = \text{angl(D)}$$

et

$$\frac{\text{Sin(arc(GE))}}{\text{Sin(arc(DE))}} = \frac{\text{Sin(arc(CB))}}{\text{Sin(arc(AB))}}$$

Par conséquent, Sin(angl(G)) = Sin(angl(C));
et par suite, angl(G) et angl(C) sont soit égaux soit supplémentaires.

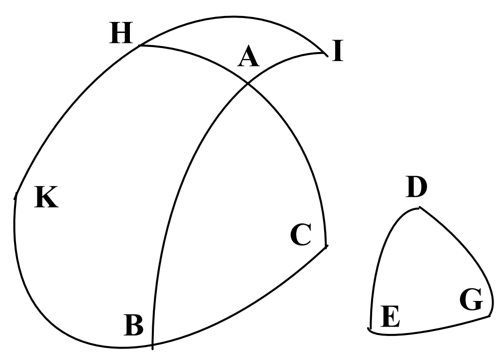
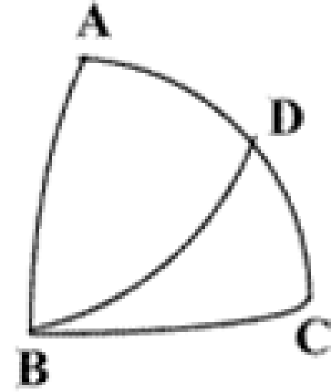


Fig. 4

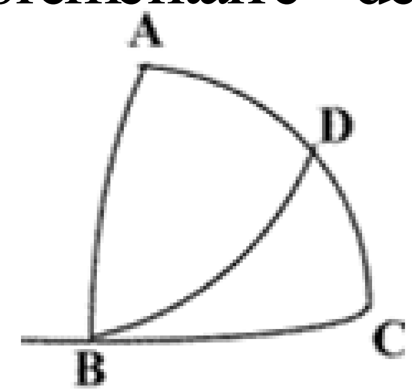
§ 14 - Proposition n° 39:

1. Si ABC est un triangle sphérique et si D est un point de arc(AC), alors arc(BD) est bissecteur de angl(ABC) si et seulement si



$$\frac{\text{hom(BA)}}{\text{hom(AD)}} = \frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CD)}} \quad (1).$$

2. Si DBC est un triangle sphérique et si A est un point sur le prolongement de arc(CD), alors arc(BA) est bissecteur de l'angle adjacent supplémentaire de angl(CBD) si et seulement si



$$\frac{\text{hom(DB)}}{\text{hom(BC)}} = \frac{\text{hom(DA)}}{\text{hom(AC)}} \quad (2).$$

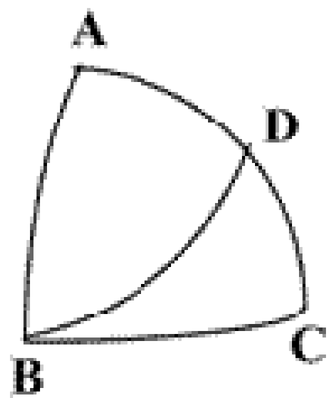


Fig. 7

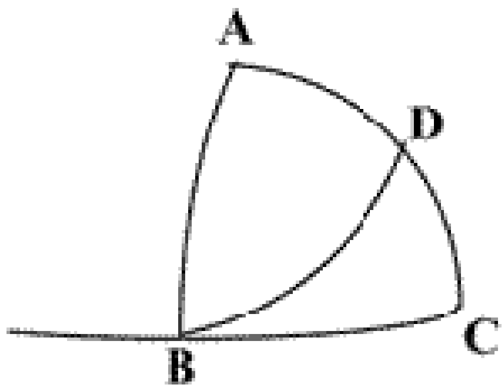


Fig.7a

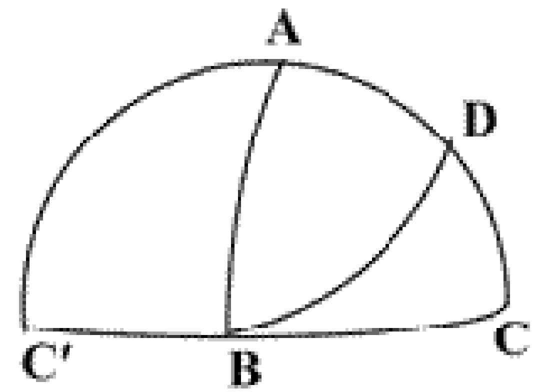


Fig. 7b

- On trouve, chez Ménélaüs, les mêmes résultats formulés dans deux propositions exposées par la suite :

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 6, livre III):

- « Si l'angle d'une figure trilatère est divisé en deux moitiés, les rapports des sinus de deux côtés aux sinus des arcs découpés sur la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont également valables.

- Ibn ʿIraq commente la démonstration de Ménélaüs, il écrit :

«Ménélaüs a construit ceci, en se basant sur ce qu'il a montré dans la proposition 2 (livre III). L'application de la «*figure qui dispense*» nous dispense de cette construction qui devient comme une répétition».

- **Proposition** (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 7, livre III):

«Supposons, de la même manière, que l'angle qui succède l'angle ABC' soit divisé en deux moitiés par l'arc BD (**voir la figure 7b**).

Je dis que le rapport du sinus de l'arc AB au sinus de l'arc BC' est égal au rapport du sinus de l'arc AD au sinus de l'arc DC' et réciproquement».

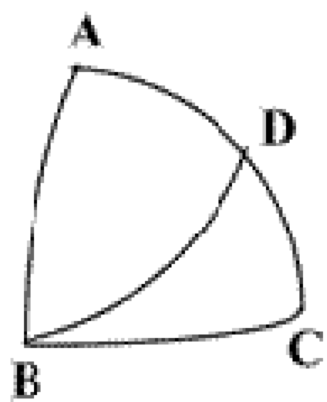


Fig. 7

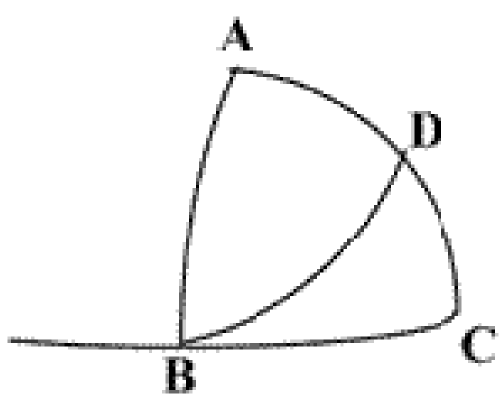


Fig.7a

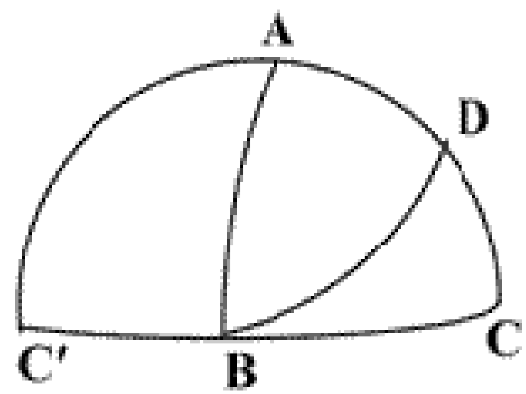


Fig. 7b

- Avant la découverte du théorème des sinus au début de XIe siècle par les géomètres de la tradition arabe, toute la géométrie sphérique reposait en principe sur le théorème III,1 des *Sphériques* de Ménélaüs. Bien que ce dernier ait introduit le concept du triangle (trilatère) sphérique, on remarque que le théorème mentionné a imposé le quadrilatère sphérique (et non pas le triangle) comme unité corpusculaire de manipulation géométrique:

pour résoudre des problèmes sphériques, on était obligé d'introduire, chaque fois, des constructions géométriques supplémentaires dépendant du problème posé et d'appliquer régulièrement le théorème de Ménélaüs.

- La propriété fondamentale d'invariance structurale exprimée par le théorème des sinus a modifié de façon essentielle la structure et la méthode de la géométrie sphérique:

  1) le quadrilatère est remplacé par le triangle comme 'unité corpusculaire' adoptée dans la déduction géométrique sur l'étendue de la sphère;

- 2) les démonstrations sont considérablement réduites grâce à l'élimination des constructions géométriques supplémentaires et occasionnelles qui étaient autrefois nécessaires pour satisfaire les conditions de validité du théorème de Ménélaüs dans les cas des différents problèmes géométriques abordés.

(on note qu’Ibn ʿIrāq a nommé le théorème des sinus “*la figure qui dispense*, *al-shakl al-mughnī*”, visant par cette dénomination à mettre l’accent sur la priorité de ce théorème et sur la réduction mentionnée dans les démonstrations sphériques due à son application à la place du théorème de Ménélaüs appelé «la figure secteur, *al-shakl al qattāʿ*»)

- 3) le langage mathématique imposé par le théorème des sinus est adéquat au triangle sphérique, car les éléments considérés dans le théorème sont en général suffisants pour identifier le triangle sphérique à une isométrie près; ce théorème peut donc servir, bien que de loin, à un recommencement important préparant la formation, à venir, d'une géométrie non euclidienne purement intrinsèque.

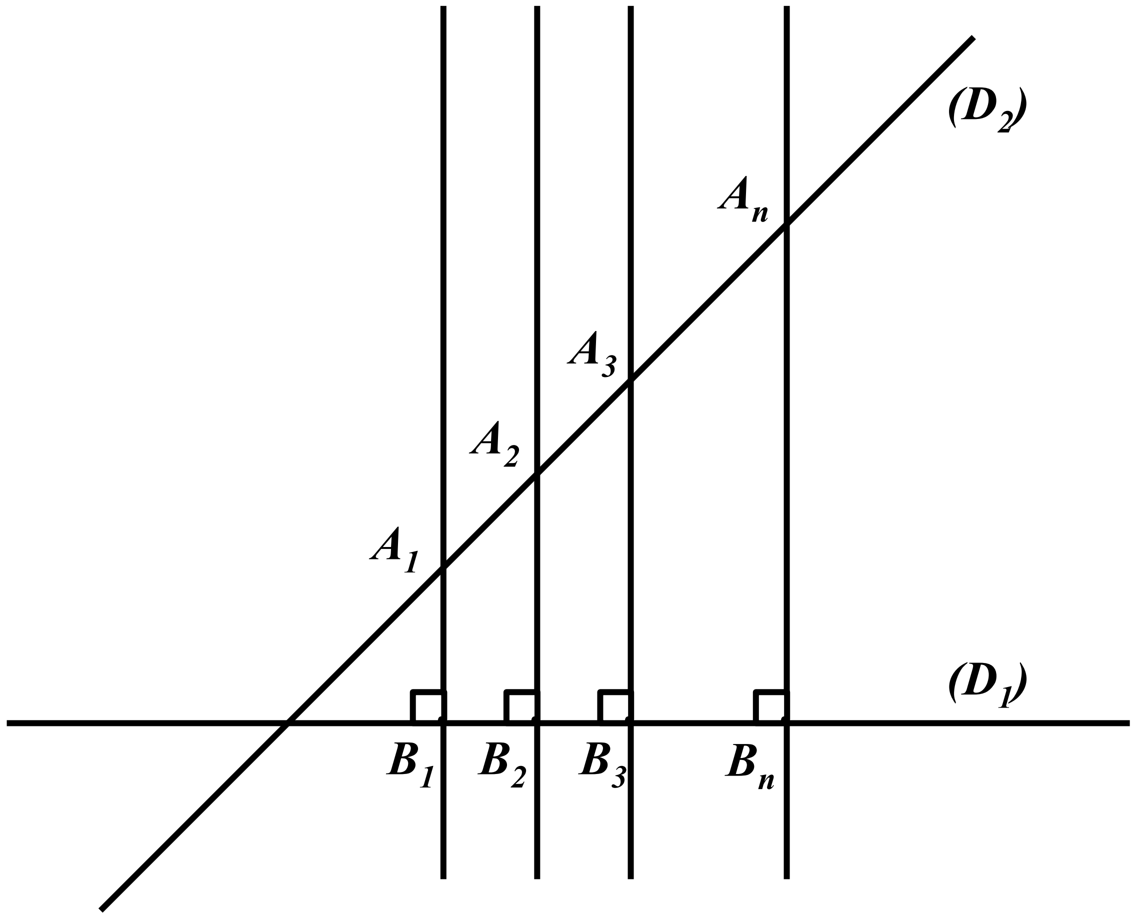
Merci

2- Sur les commentaires d'Ibn Hūd de Saragosse des *Sphériques* de Théodose de Tripoli

Notre présente étude porte sur une proposition remarquable des *Sphériques* de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd (mort en 1085), qui généralise la proposition *III.11* des *Sphériques* de Théodose de Tripoli et traite également les propositions *III,23 - 25* des *Sphériques* de Ménélaüs. Les dernières propositions de Ménélaüs souffrent de quelques passages erronés et elles sont rectifiées par Ibn ʿIraq.

Origine euclidienne du problème:

Dans la géométrie euclidienne, on trouve le résultat suivant: si l'une de deux droites concourantes obliques est coupée orthogonalement par des droites arbitraires, alors le rapport des segments des droites découpés sur les droites concourantes est un rapport invariant :



$$\frac{A_iA_j}{B_iB_j}=\frac{A_kA_l}{B_kB_l},(i\neq j,k\neq l,i,j,k,l=1,\dots,n)$$

Dans le cas sphérique, il est évident, qu’en absence d’outils géométriques intrinsèques développés, l’étude globale de cette approche de comparaison devient difficile. Mais, malgré la difficulté, on trouve que la proposition *III.11* des *Sphériques* de Théodose exprime, en quelque sorte, une tentative d’aborder cette question dans le cas sphérique.

Dans sa proposition *III.11*, à l’aide d’une construction géométrique extrinsèque, Théodose a démontré une certaine inégalité sur le rapport de deux arcs particulièrement choisis sur deux quadrants des circonférences de deux grands cercles inclinés, où l’un de ces arcs est le projeté orthogonal de l’autre.

Sphériques de Théodose (Proposition *III,11*)

$arc(B\Theta)/arc(\Delta H) < d/d_{\Delta}$, où

$d = diam\ (S),\ \ d_{\Delta} = diam(cercl(\Delta\Lambda M))$

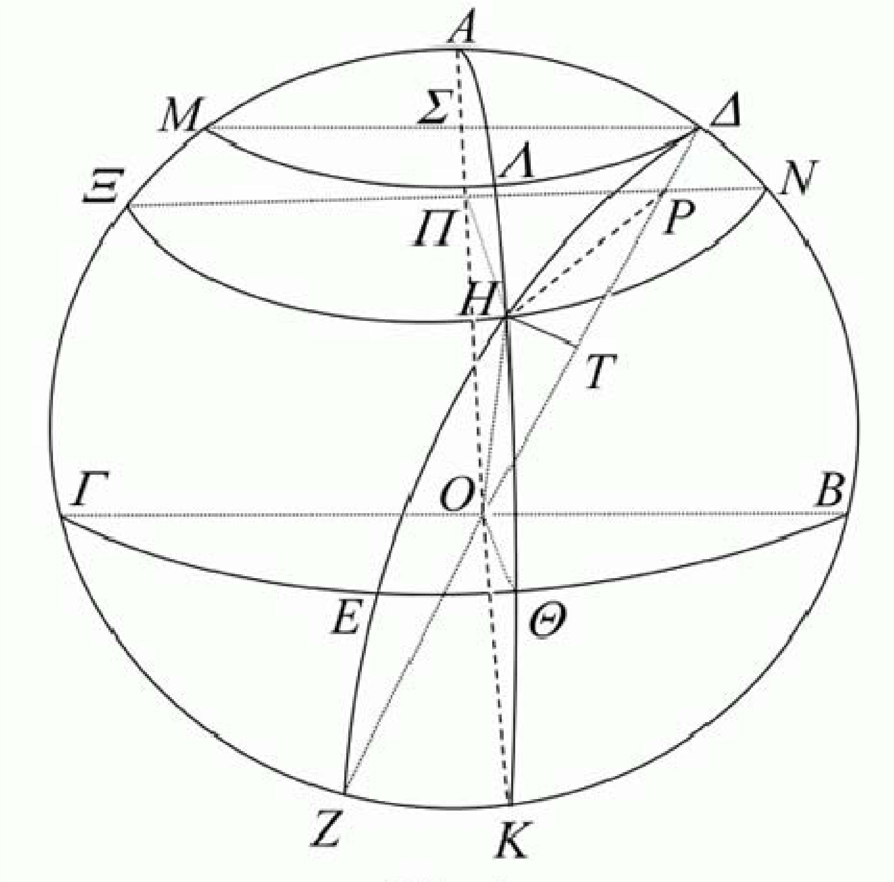


Fig. 1

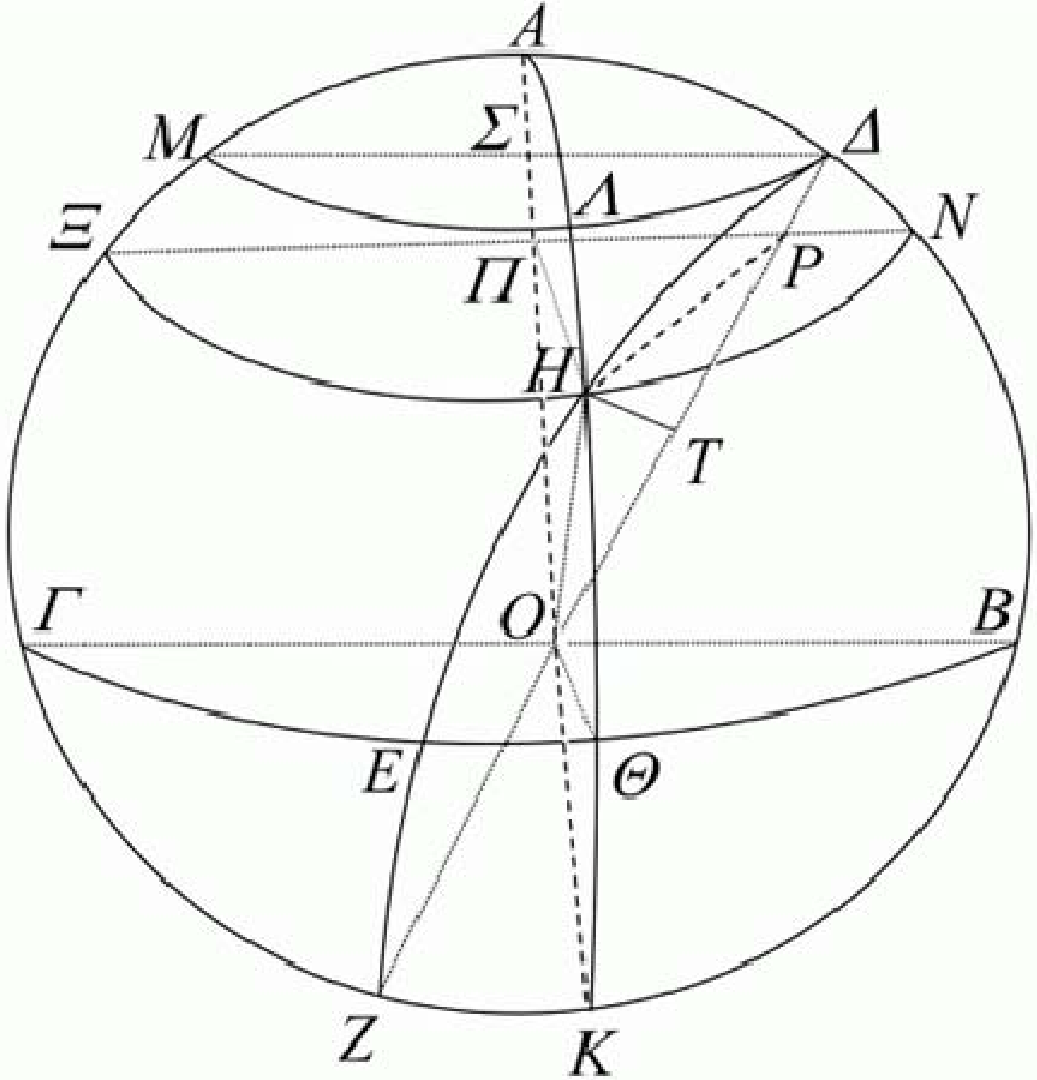


Fig. 1

- La démonstration ici est basée sur le lemme suivant :.

Lemme : Soit ABC un triangle de côté $sgm(BC)$ supérieur ou égal au côté $sgm(AC)$. Si E est un point arbitraire intérieur du côté $sgm(AC)$, alors

$$sgm(AC)/sgm(AE) > angl(BEA)/angl(BCA).$$

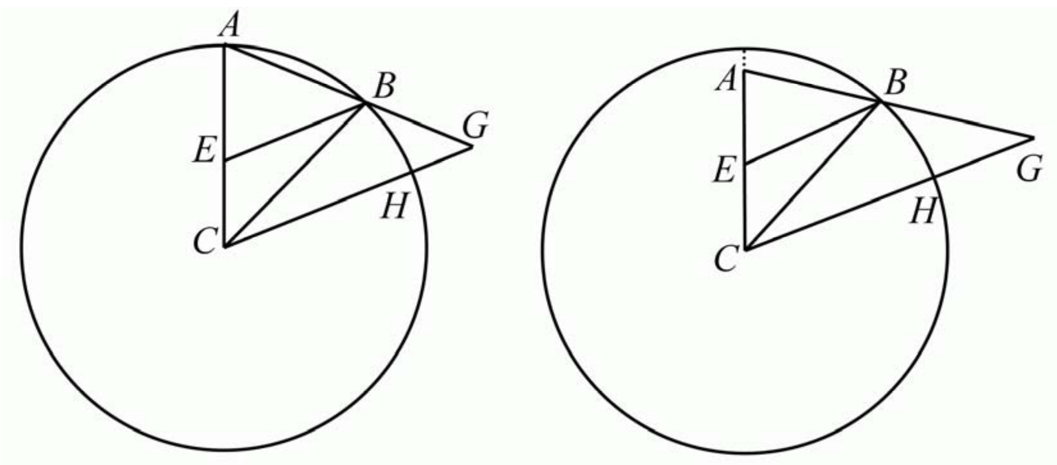


Fig. 13 Fig. 14

$$BC \geq AC \Rightarrow AC/AE > angle(BEA)/angle(BCA).$$

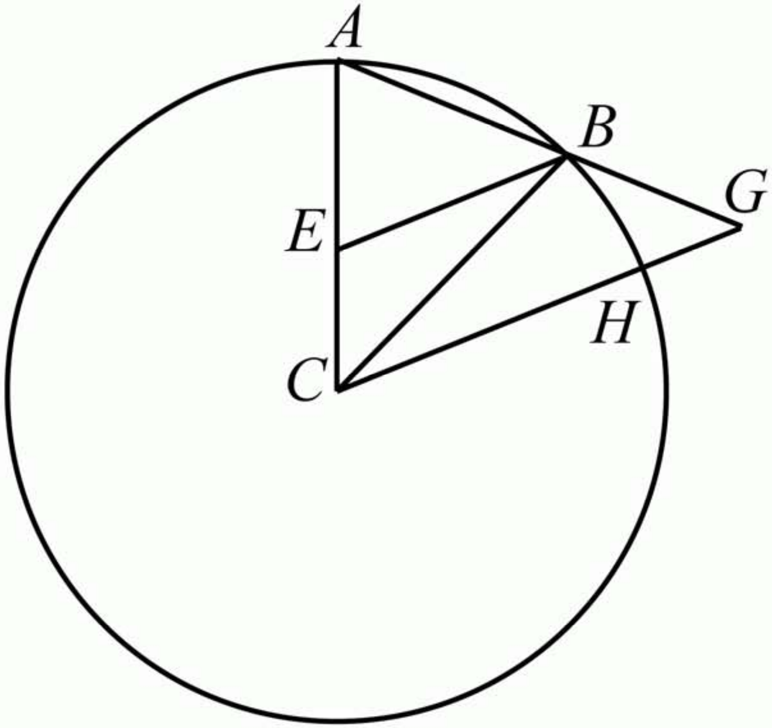


Fig. 13

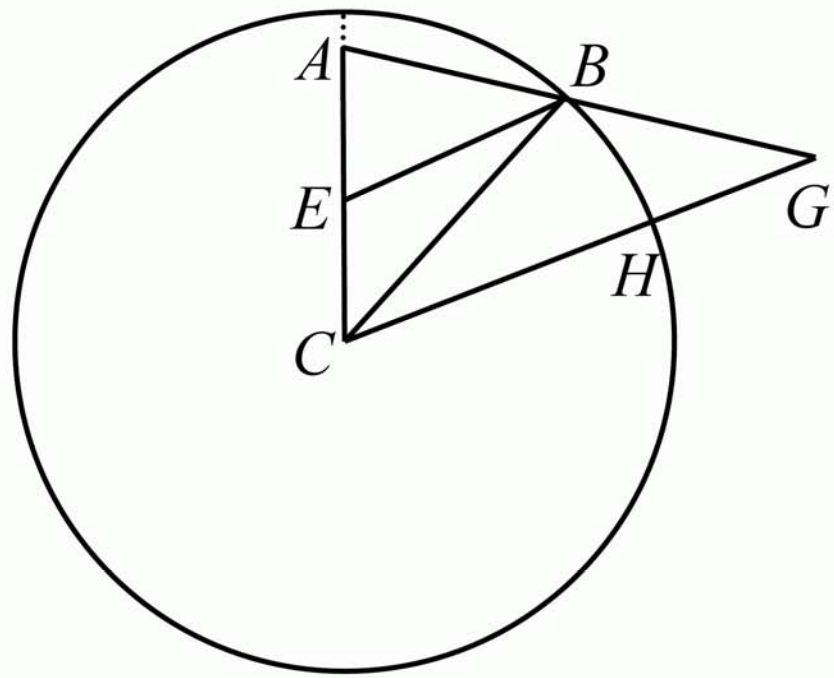


Fig. 14

N.B : dans la proposition *III,11,* Théodose a utilisé ce lemme, sans démonstration; dans ses *Sphériques* de Théodose, Naṣir a-Din al-Ṭūsi expose deux versions de la démonstration de ce lemme dans le cas ou le triangle *ABC* est rectangle en *A* et il attribue l'une d'elles à Thābit ibn Qurra. Quant à Ibn ʿIrāq il expose une démonstration plus générale, sous la forme considérée ci-haut.

Ultérieurement, dans la proposition *III,22* de ses *Sphériques*, Ménélaüs a repris, le problème de Théodose mais avec modifications : il a considéré une situation plus générale des deux arcs sur les circonférences des deux grands cercles obliques, où l'un de ces arcs est le projeté orthogonal sphérique de l'autre; il a démontré l'égalité du rapport des *Sinus* des ces arcs au rapport des deux surfaces rectangulaires, qui dépendent des diamètres de quelques cercles de la sphère.

En s’appuyant sur cette proposition, Ménélaüs a établi, dans les propositions *III, 23-25* de ses *Sphériques*, quelques inégalités concernant les rapports des arcs considérés, mais dans ses énoncés et démonstrations il a commis des erreurs qui sont critiquées et rectifiées par Ibn ʿIraq.

Proposition *III, 22* (*Sphériques* de Ménélaüs- Ibn ʿIraq)

- $Sin(arc(CH))/Sin(arc(DE)) = d.d_A / d_D.d_E$,

où $d = diam\ (S)$, d_X = diam du cercle qui passe par le point X parallèlement *à cercle(BHCB')*.

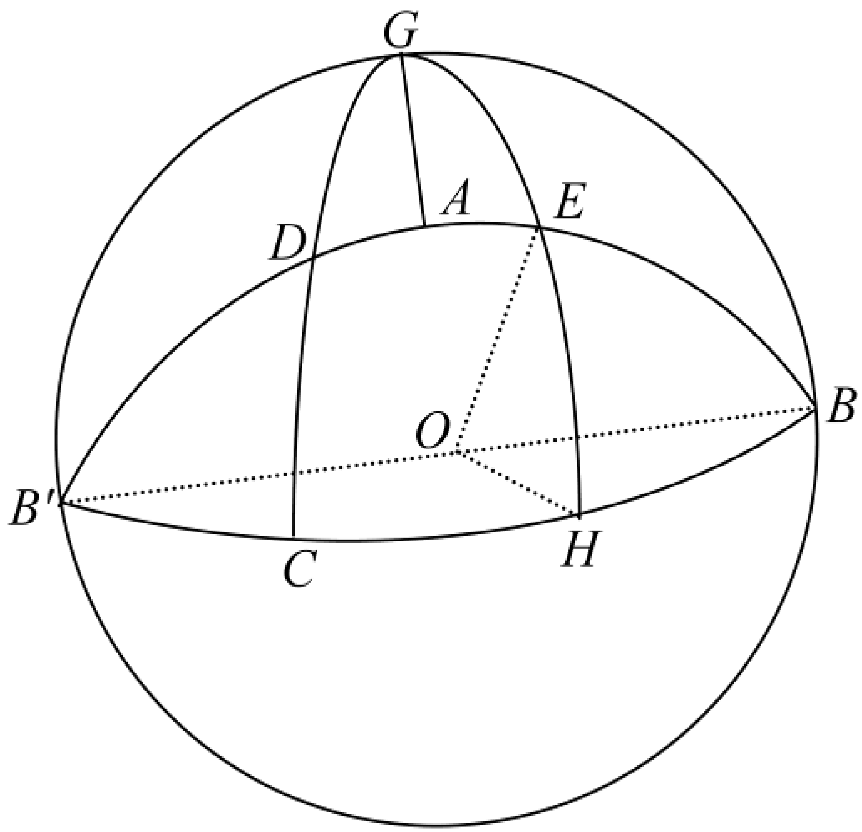


Fig. 2

Proposition *III, 23*(*Sphériques* de Ménélaüs- Ibn ʿIraq)

1- les grands cercles *cercl(BEKDA)* et *cercl(BHMCI)* sont inclinés l'un sur l'autre et le grand cercle *(C1)* passe par leurs pôles.

2- *G* est le pôle de *cercl(BHI)*

3- le point *K* est choisi sur *arc(BA),* de telle manière que :

$$Sin(GK)/Sin(GM)=Sin(GA)/Sin(GK)$$

Conclusion:

$C \in arc(MI)^o \Rightarrow arc(CM)/arc(DK) > 1$

$H \in arc(BM)^o \Rightarrow arc(HM)/arc(EK) < 1$

$arc(BK)-arc(BM) > arc(BD)-arc(BC)$

$arc(BK)-arc(BM) > arc(BE)-arc(BH)$

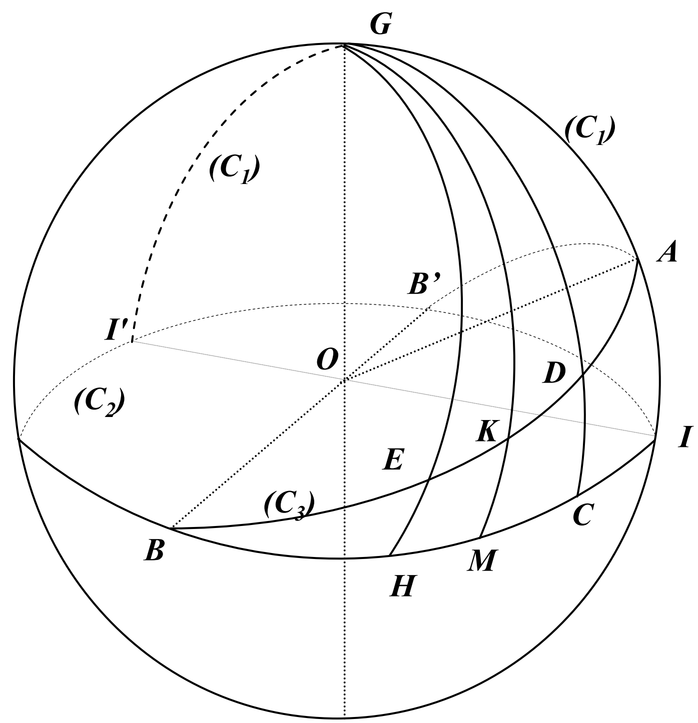


Figure III, 23

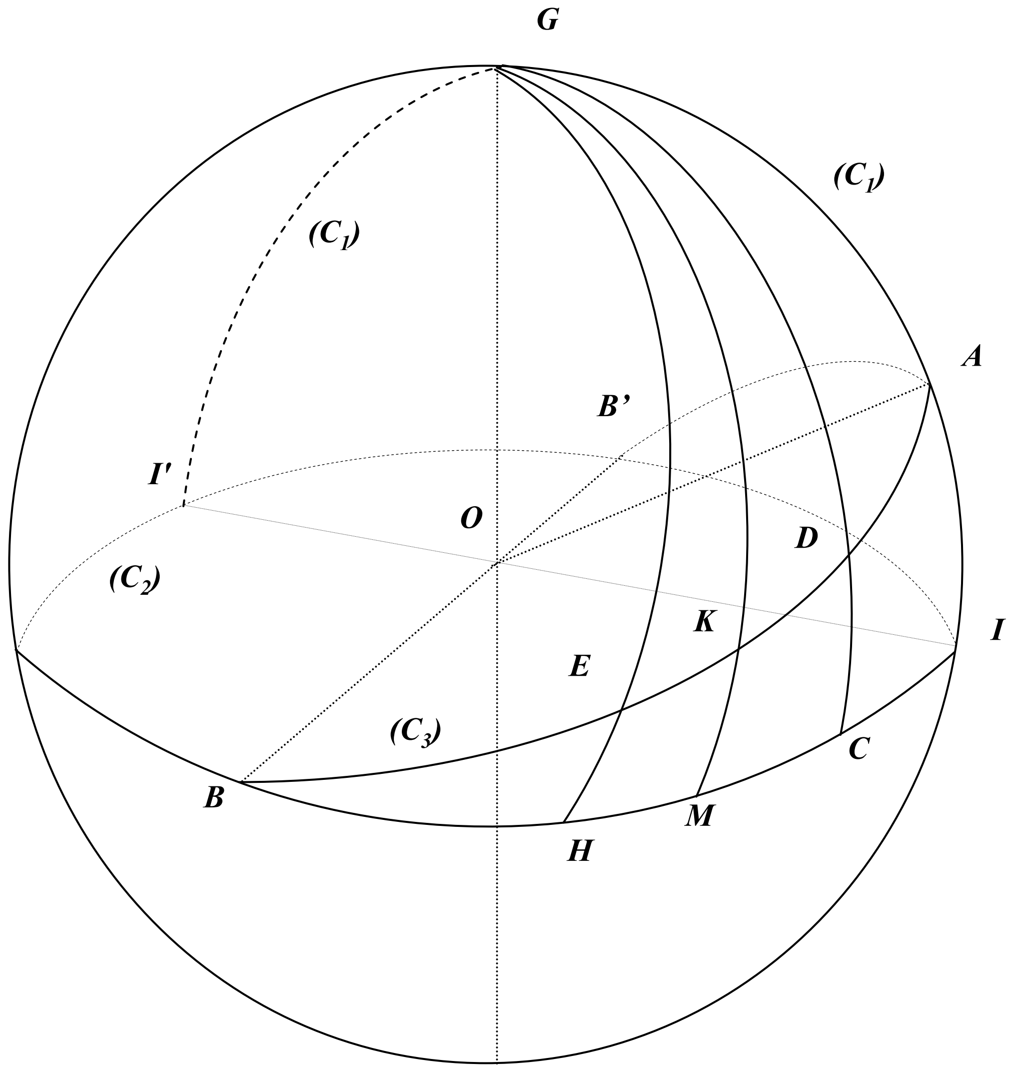


Figure III, 23

Proposition *III, 24* (*Sphériques* de Ménélaüs- Ibn ʿIraq)

- 1- les grands cercles *cercle(BEDA)* et *cercle(BHCI)* sont inclinés l'un sur l'autre et le grand cercle (C_1) passe par leurs pôles.
- 2- G est le pôle de *cercle(BHI)*
- 3- $arc(BD) \leq R\pi/2$.
- 4- $arc(CH) > arc(DE)$
- **Conclusion :**
- 1- $arc(CH)/arc(DE) < d/d_D,$
- 2- $arc(CH)/arc(DE) > d.\ d_A /d_D .d_E.$

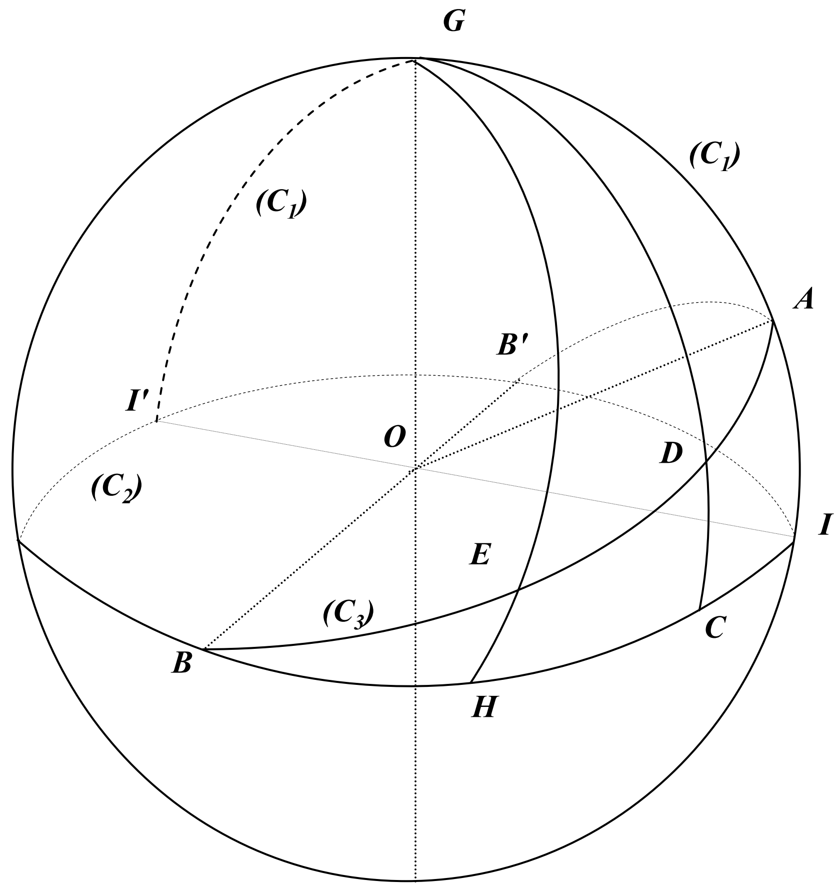


Figure III, 24

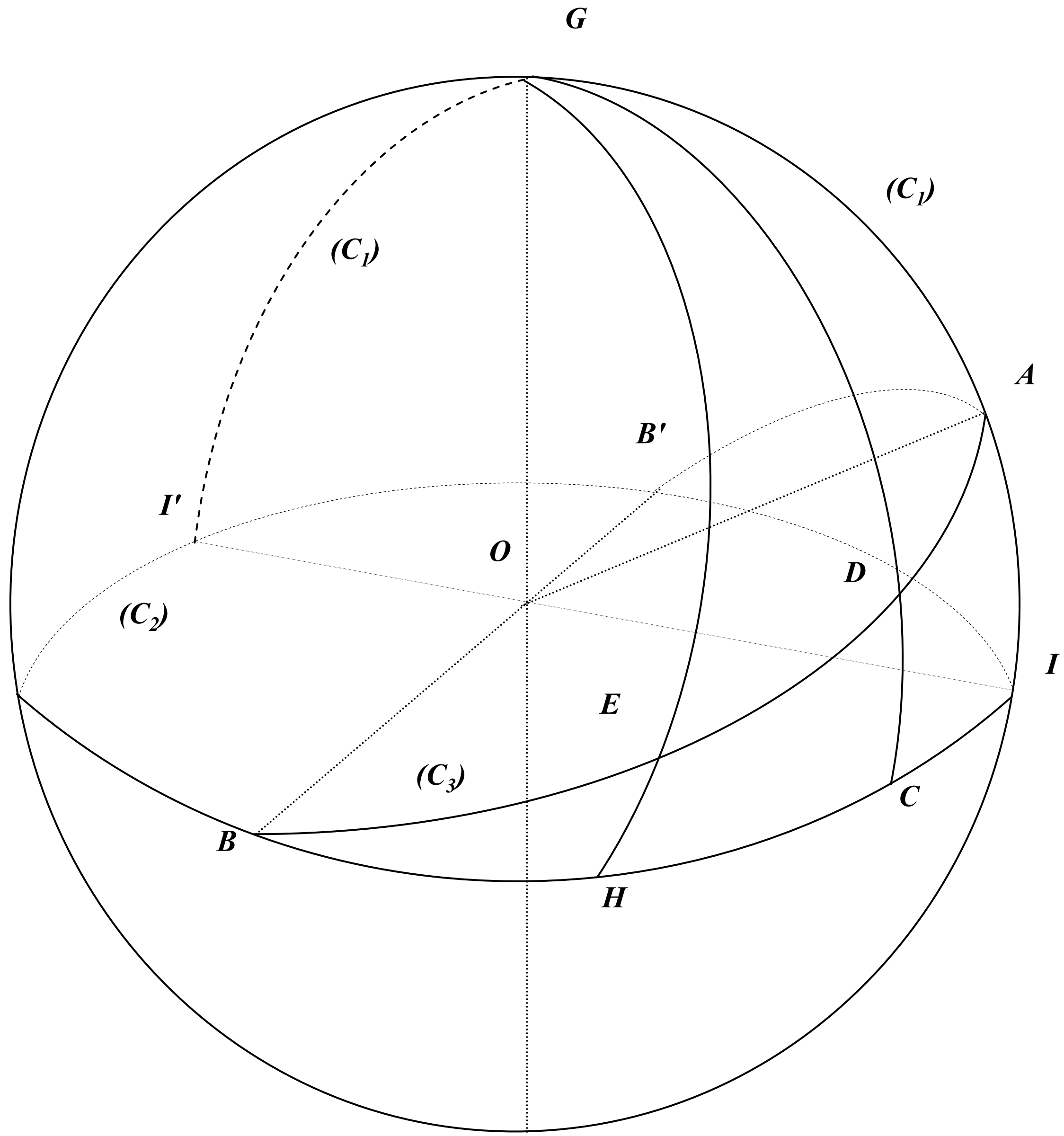


Figure III, 24

- Dans sa démonstration de cette proposition, Ménélaüs a utilisé une implication erronée, qui était discutée par Ibn ʿIraq ; implication de la forme :

$$[Sin\ (CH)/Sin(DE) < Sin\ (CG)/Sin(GD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CH/DE < Sin\ (CG)/Sin(GD)],$$

- Ibn ʿIraq écrit : « ***mais s'il devient connu que le rapport de sinus de CG au sinus de GD est plus grand que le rapport de sinus de CH au sinus de DE, de ceci seulement, il ne devient pas connu que le rapport de l'arc CH à l'arc DE est plus petit que le rapport de sinus de CG au sinus de GD »***.

- Ibn ʿIraq expose ici sa propre démonstration de l'inégalité

$$arc(CH)/arc(DE) < d/d_D,$$

dans le cas général et indépendamment de la condition

$$arc(CH)>arc(DE) ,$$

mais, la démonstration d'IbnʿIraq est basée sur la géométrie extrinsèque de la sphère.

- Dans la proposition III, 25, Ménélaüs reprend le cas restant du problème, c.-à-d. lorsque

$$arc(CH)<arc(DE),$$

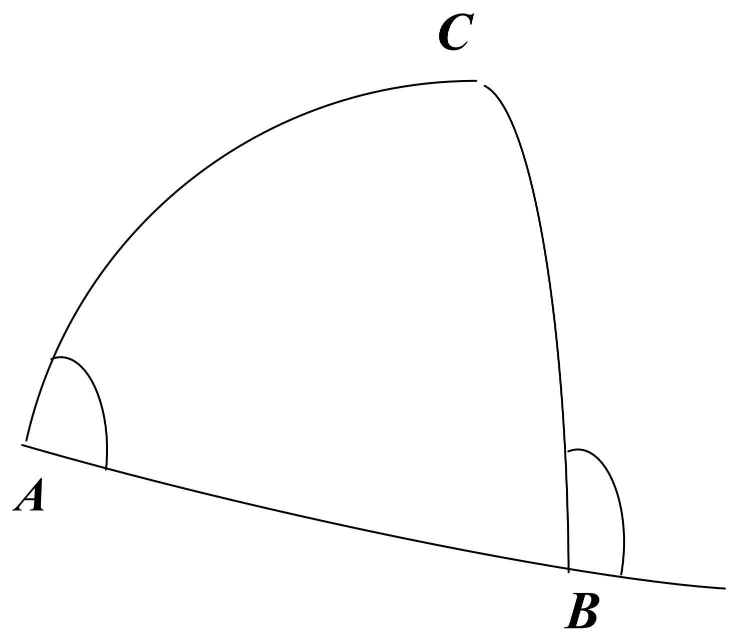
- Ibn Iraq a analysé cette dernière proposition et a démontré que sa démonstration souffre également des passages erronés.

- Quant à Ibn Hūd, il reproduit les propositions de Ménélaüs, ainsi que la proposition *III,11* de Théodose, laquelle il généralise, en s'appuyant sur une propriété élémentaire de triangle sphérique* et sans utiliser, contrairement à Ibn ʿIraq et Théodose, la géométrie extrinsèque de la sphère :

- * Dans tout triangle sphérique ABC :

$$arc(AC)+arc(CB) < \pi.R \Rightarrow extr(B) > angl(A)$$

(proposition nº 25, Chapitre II, *Sphériques* d'Ibn Hūd).



§ 21 -. Proposition no 46 (Ibn Hūd)

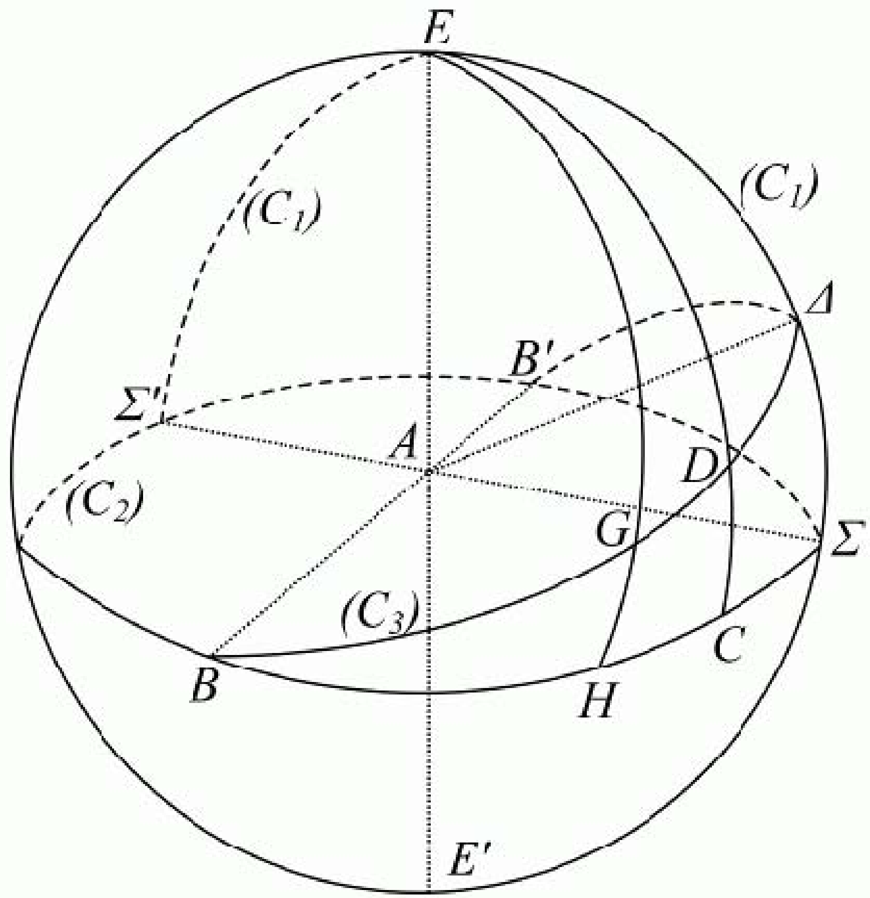


Fig. 4

a) $arc(HC)/arc(GD) < d/d_D$

b) $arc(HC)/arc(GD) > d_\Delta/d_G$

c) $arc(HC) > arc(GD) \Rightarrow arc(HC)/arc(GD) > d \cdot d_\Delta/d_D \cdot d_G$

d) $arc(HC) < arc(GD) \Rightarrow arc(HC)/arc(GD) < d \cdot d_\Delta/d_D \cdot d_G$

e) $D \equiv \Delta \Rightarrow arc(HC)/arc(GD) > d/d_G$

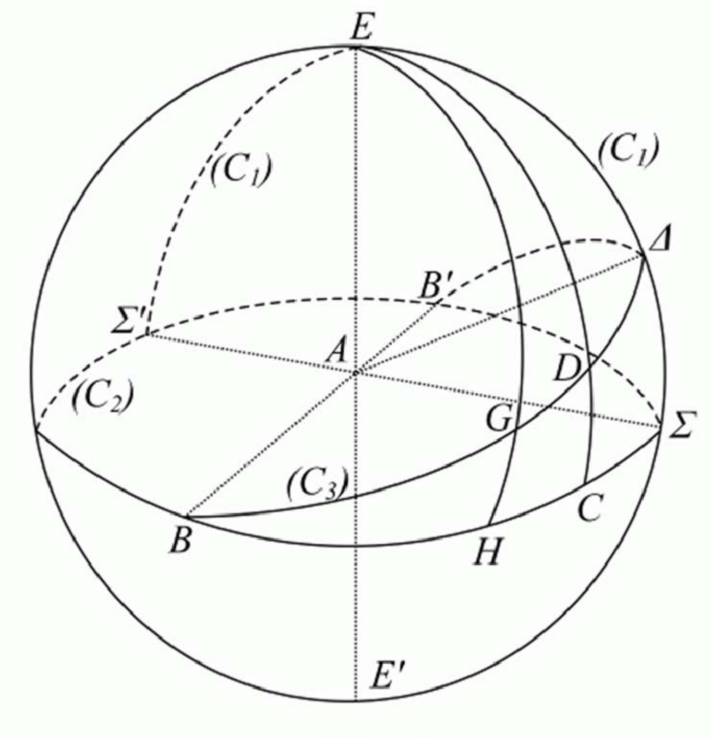


Fig. 4

f) si P est un point de $arc(B\Delta)$ tel que $\underline{P} = Q$ et

$$hom(EP)/d = hom(E\Delta)/hom(EP),$$

alors P vérifie les propriétés suivantes :

1- si le point G appartient à l'arc ouvert $arc(BP)$ et si $H = \underline{G}$, $arc(HQ) < arc(GP)$,

2- si le point U appartient à l'arc ouvert $arc(P\Delta)$ et si $O = \underline{U}$, $arc(OQ) > arc(UP)$.

(pour un point X de $arc(B\Delta)$, par $\underline{X}$ on désigne le point projeté orthogonal de X sur $arc(B\Sigma)$)

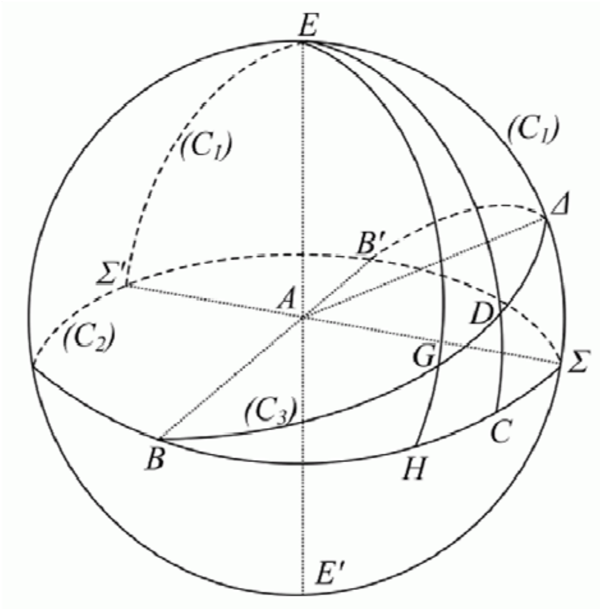


Fig. 4

L'inégalité *arc(HC)/arc(GD)* $< d/d_D$ dans le cas où *arc(BD)<Rπ/2*

Dans ce cas, chacun des côtés du triangle *BDC* est plus petit qu'un quadrant d'une grande circonférence et les angles extérieurs au sommet *C* du triangle sont droits; donc *angl(BDC)* est aigu; et par suite, si *(C4)* est un grand cercle perpendiculaire à *arc(EC)* au point *D*, la circonférence *arc(C4)* coupe *arc(EG)* en un point *S* situé entre *E* et *G*. Désignons par *T* le point d'intersection de *arc(C4)* avec *arc(CBΣ')*; le point *T* est le pôle de *cercl(EDC)*, c'est-à-dire

$$arc(TSD) = arc(TBC) = R\pi/2 \qquad \text{et}$$
$$angl(TDC)) = angl(TCD) = R\pi/2\ ,$$

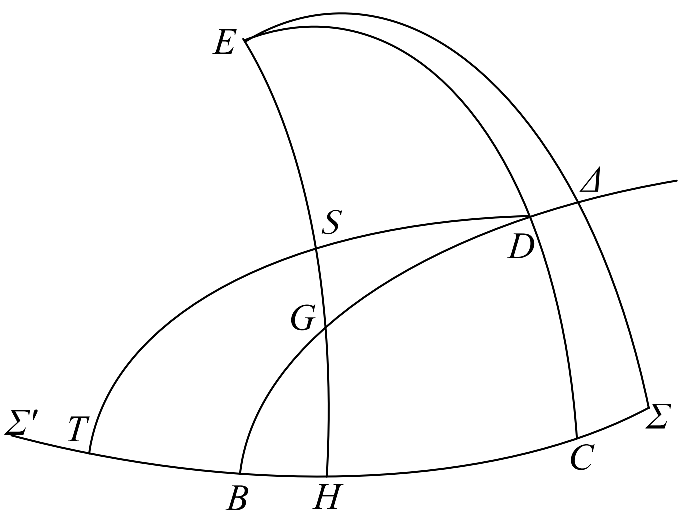


Figure 72(3)bis

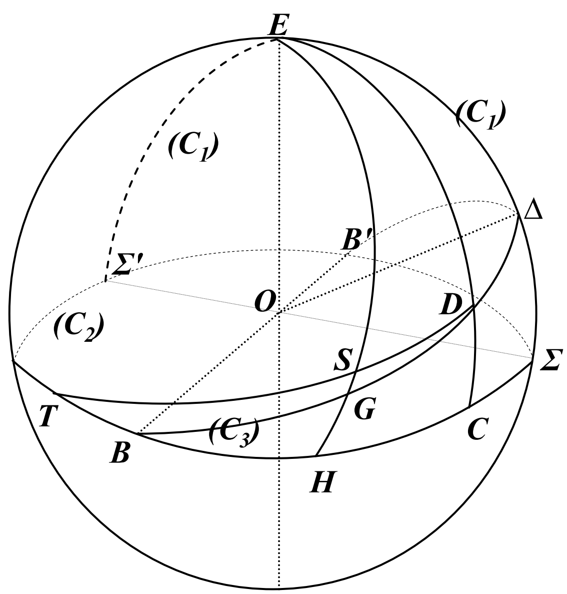


Figure 72(3)

donc chacun des côtés du triangle *STH* est plus petit qu'un quadrant et les angles extérieurs au sommet *H* de ce triangle sont droits; alors *angl(TSH)* est aigu et par suite, l'angle supplémentaire *angl(GSD)* est obtus. Par analogie, chacun des côtés du triangle *BHG*, est plus petit qu'un quadrant et les angles extérieurs au sommet *H* sont droits; donc *angl(BGH)* est aigu et par suite, l'angle opposé *angl(SGD)* est également aigu; mais *angl(GSD)* est obtus, donc $arc(GD) > arc(SD)$; par conséquent, $arc(CH)/arc(GD) < arc(CH)/arc(SD)$, mais d'après la proposition de Théodose, $arc(CH)/arc(SD) < d/d_D$; en conséquence $arc(CH)/arc(GD) < d/d_D$.

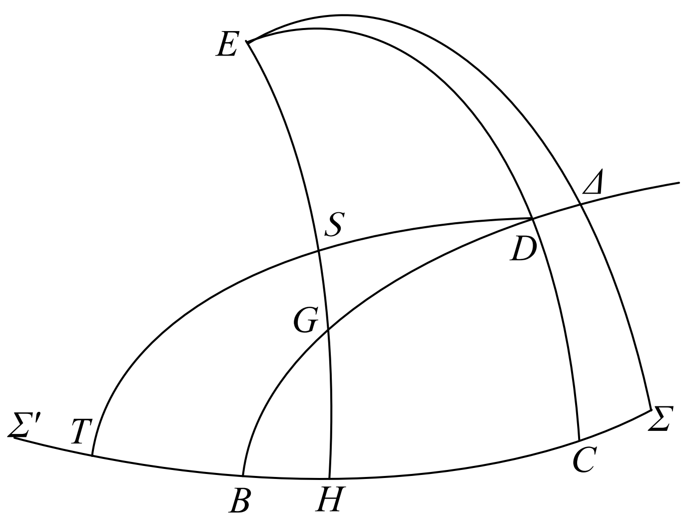


Figure 72(3)bis

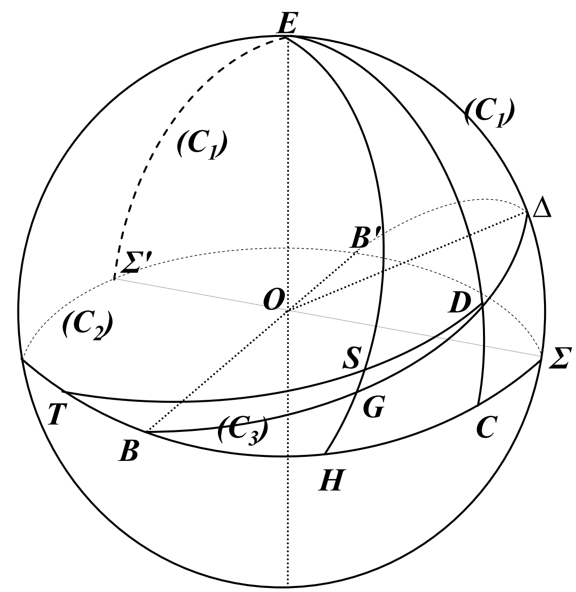


Figure 72(3)

- Donc, la démonstration d’Ibn Hūd est tout à fait différente des deux démonstrations rappelées de Ménélaüs et d’Ibn ʿIraq; elle est abrégée, raffinée et n’introduit pas de constructions euclidiennes extrinsèques supplémentaires. Ibn Hūd, s’appuyant uniquement sur les propriétés des triangles sphériques et sur le résultat d’un cas particulier (proposition de Théodose), a réussi à prouver l’inégalité

$$arc(HC)/arc(GD) < d/d_D.$$

Commentaire analytique de la démonstration d'Ibn Hūd

Pour examiner les assertions de a) à f) notées précédemment, recourons au langage de l'analyse; choisissons alors un système de coordonnées (A, x, y, z) tel que les demi-axes soient orientés respectivement suivant les vecteurs: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Sigma}$, $\overrightarrow{AE}$.

Considérons, sur la surface d'une sphère centrée au point A et de rayon R, la configuration représentée sur la figure 9: le grand cercle (C_1) passe par les pôles des grands cercles (C_2) et (C_3); le point E est un pôle de (C_2); le cercle (C_3) est oblique sur (C_2) et il coupe le quadrant arc(ΣE) au point Δ; les deux points G et D sont situés sur le quadrant arc($B\Delta$) (G est entre B et D) et arc(EG), arc(ED) rencontrent arc($B\Sigma$) respectivement aux points H et C. Soient M un point courant de arc($B\Delta$) et N le point d'intersection de arc(EM) avec arc($B\Sigma$). Posons:

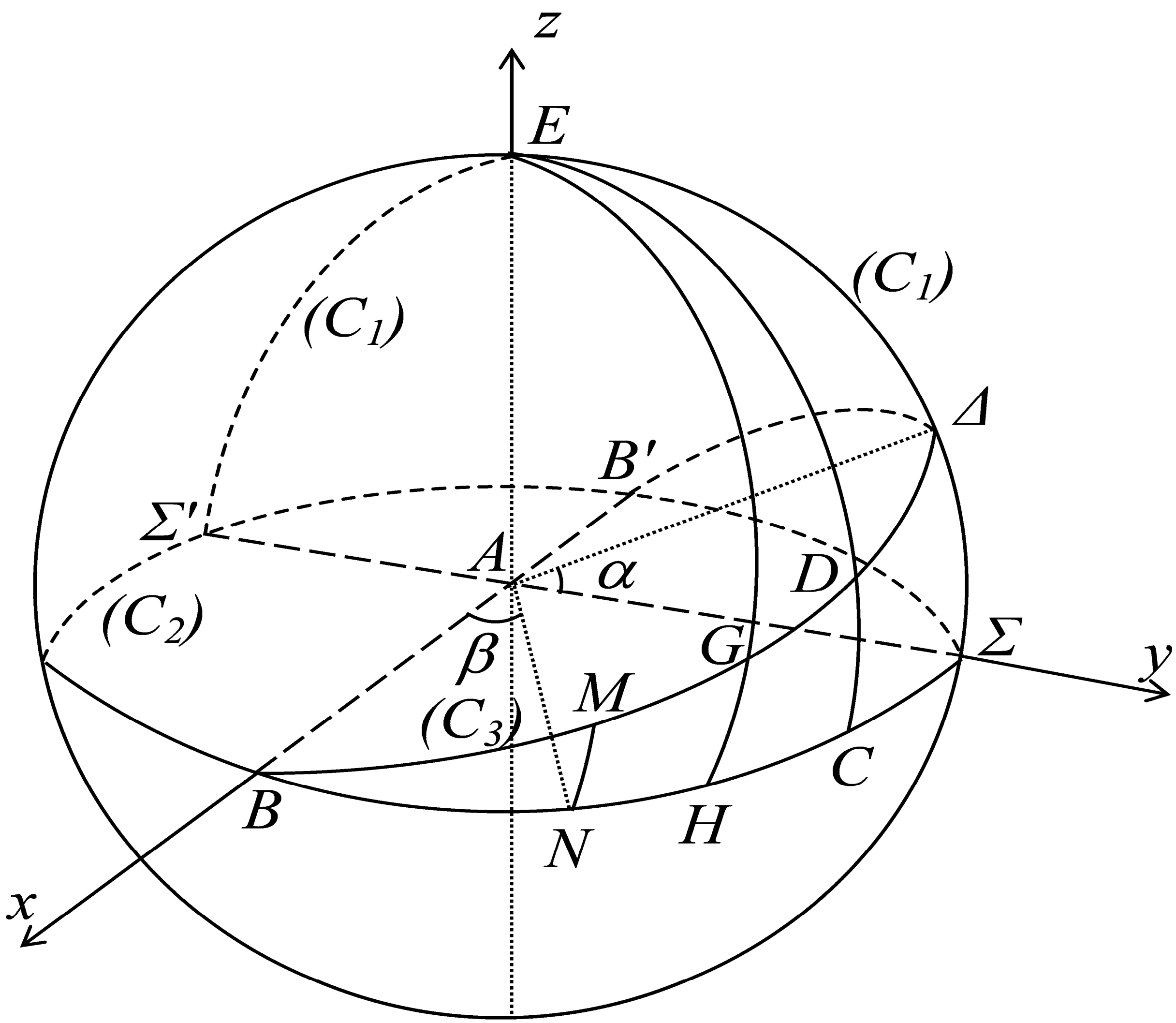


Fig. 9

α = angle($\Sigma A \Delta$), β = angle(BAN), s = long[arc(BM)] et $f(s)$ = long[arc(BN)].

L'arc ouvert, arc($B\Delta$) admet l'équation paramétrique suivante:

$$(x(s) = R\cos(s/R),\ y(s) = R\cos\alpha\ \sin(s/R),\ z(s) = R\sin\alpha\ \sin(s/R)),\ (s \in]0, \pi R/2[\ )$$

Puisque $f(s) = R\,\beta(s)$ *et* $tg\,\beta(s) = \cos\alpha\ tg(s/R)$, *on aura:*

$f(s) = R\ arctg(\cos\alpha\ tg(s/R))$;

$f'(s) = \cos\alpha\ /\ [\cos^2(s/R) + \cos^2\alpha \sin^2(s/R)] > 0$, *pour* $s \in]0, \pi R/2[$);

$f''(s) = [2\cos\alpha \sin^2\alpha \cdot \sin(s/R)\cos(s/R)]\ /\ R[\cos^2(s/R) + \cos^2\alpha\sin^2(s/R)]^2 > 0$,

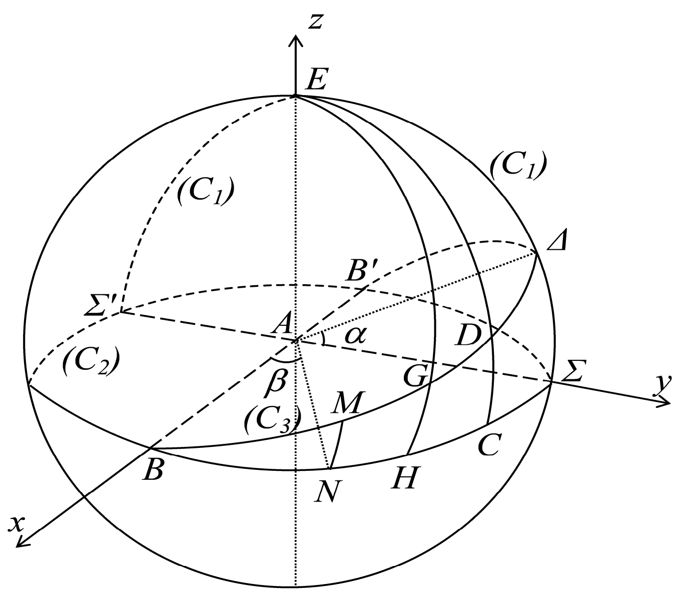


Fig. 9

pour $s \in \,]0, \pi R/2[$). Donc la fonction f est croissante et convexe.

Si les points G et D admettent les coordonnées respectivement s_1 et s_2 ($s_1 < s_2$), on aura arc(CH) / arc(GD) = $[f(s_2) - f(s_1)] / (s_2 - s_1)$, compris entre $f'(s_1)$ et $f'(s_2)$, puisque f est convexe.

Remarque sur l'assertion f) de la proposition

Cherchons la valeur de ξ pour laquelle $f'(\xi) = 1$, c'est-à-dire $\cos \alpha / [\cos^2(\xi/R) + \cos^2 \alpha \sin^2(\xi/R)] = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\xi/R) + \cos^2\alpha \cdot \sin^2(\xi/R) - \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\xi/R) = \cos \alpha / (1 + \cos \alpha).$$

Donc, $\xi = R \arccos[\cos \alpha / (1 + \cos \alpha)]^{1/2}$.

Remarquons que $\xi = \text{R} \arccos[\cos \alpha / (1 + \cos \alpha)]^{1/2} = \text{R}\ \text{arctg}(1 / \cos\alpha)^{1/2}$, ($\alpha \in]0, \pi/2[$), est le point de maximum global, sur l'intervalle $]0, R\pi/2[$, de la fonction $g(s) = s - f(s)$ qui exprime l'excès: $\text{arc}(BM) - \text{arc}(B\underline{M})$, $M(s) \in \text{arc}(B\Delta)$. Donc la valeur de ξ détermine sur l'arc $B\Delta$ le point $M_\xi = M(\xi)$, nommé médian (*al-mutawassiṭa*) par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī. Lorsque l'angle α varie entre 0 et $\pi/2$, le point M_ξ décrit sur la sphère une courbe d'équation paramétrique:

$$\left(x = \text{R}\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ y = \text{R}\cos\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}},\ z = \text{R}\sin\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}}\right).$$

Cette courbe est gauche (elle est de torsion non identiquement nulle).

La dérivée $f'(s)$ est croissante sur l'intervalle $]0, R.\pi/2[$, car la dérivée $f''(s)$ est positive, donc:

1) si $s_1, s_2 \in\ ]0, \xi\,[$, $(s_2 > s_1)$,on a: $f(s_2) - f(s_1)) < (s_2 - s_1)$;

2) si $s_1, s_2 \in\ ]\xi, \pi R/2[$ $(s_2 > s_1)$, on a: $f(s_2) - f(s_1)) > (s_2 - s_1)$.

Si l'on désigne par R_ξ, R_Δ les rayons des cercles passant, parallèlement à (C_2) par les points $M_\xi = M(s = \xi)$ et $\Delta(s = R\pi/2)$, on trouve que la relation $f'(\xi) = 1$ est équivalente à la proportion

$$R_\xi / R = R_\Delta / R_\xi\ ;$$

ou bien la même chose

$$\mathrm{hom}(EM_\xi) / R = \mathrm{hom}(E\Delta) / \mathrm{hom}(EM_\xi).$$

C'est la partie principale de la proposition III.23 que Ménélaüs a bien établie, il n'a cependant pas expliqué comment il a pu trouver le point M_ξ.

Remarque sur les assertions a) et b)

Considérons, sur arc($B\Delta$), deux points: $G(s_1)$ et $D(s_2)$ tels que

$$0 \leq s_1 < s_2 \leq R\pi/2;$$

et soient R_G et R_D les rayons des cercles passant, parallèlement à (C_2), par les points G, et D; donc

$$\text{arc}(CH) / \text{arc}(GD) = [f(s_2) - f(s_1)] / (s_2 - s_1),$$

compris entre

$$f'(s_1) = \cos\alpha / [\cos^2(s_1/R) + \cos^2\alpha \sin^2(s_1/R)] = R^2\cos\alpha/(R_G)^2$$

et

$$f'(s_2) = \cos\alpha / [\cos^2(s_2/R) + \cos^2\alpha \sin^2(s_2/R)] = R^2\cos\alpha/(R_D)^2$$

On a donc

$$R^2\cos\alpha/(R_G)^2 = (RR_\Delta)/(R_G)^2 < [f(s_2) - f(s_1)] / (s_2 - s_1) =$$
$$= \text{arc}(CH) / \text{arc}(GD) < R^2\cos\alpha/(R_D)^2 = (RR_\Delta)/(R_D)^2.$$

Comme $R \geq R_G$, $R_\Delta/R_G \leq (RR_\Delta)/(R_G)^2$ et comme $R_D \geq R_\Delta$, $(RR_\Delta)/(R_D)^2 \leq R/R_D$.

En conséquence,

$$R_\Delta/R_G < \mathrm{arc}(CH) \,/\, \mathrm{arc}(GD) < R/R_D.$$

Les assertions a) et b) sont donc vérifiées. L'assertion a) est une généralisation de la proposition III.11 de Théodose; alors que l'assertion b) couvre une partie de la proposition III.25 de Ménélaüs

Remarque sur les assertions c), d) et e) de la proposition

Considérons maintenant, deux réels x_2, x_1. Si

$$\pi/2 \geq x_2 > x_1 > 0,$$

alors

$$x_2/x_1 > (\sin x_2) / (\sin x_1).$$

En effet, la fonction $y = (\sin x)/x$ est décroissante sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. Marquons que ce résultat a été établi géométriquement par Ibn al-Haytham.

En s'appuyant sur l'inégalité

$$x_2/x_1 > (\sin x_2) / (\sin x_1),$$

et en appliquant la proposition III.22 de Ménélaüs, reprise par Ibn Hūd dans l'*Istikmāl*, on obtient:

1. $\mathrm{arc}(CH) / \mathrm{arc}(GD) =$

$= [f(s_2) - f(s_1)] / (s_2 - s_1) > \sin [f(s_2) - f(s_1)] / \sin(s_2 - s_1)$

$= (R\, R_\Delta) / (R_G\, R_D)$, si $\sin [f(s_2) - f(s_1)] / \sin(s_2 - s_1) > 1$;

2. $\mathrm{arc}(CH) / \mathrm{arc}(GD) =$

$= [f(s_2) - f(s_1)] / (s_2 - s_1) < \sin [f(s_2) - f(s_1)] / \sin(s_2 - s_1)$

$= (R\, R_\Delta) / (R_G\, R_D)$, si $\sin [f(s_2) - f(s_1)] / \sin(s_2 - s_1) < 1$.

On vérifie que l'inégalité

$$\mathrm{arc}(CH) / \mathrm{arc}(GD) > (R\, R_\Delta) / (R_G\, R_D)$$

reste vraie même dans le cas limite où $D \equiv \Delta$ ($s_2 = R\pi/2$); par suite,

$$\sin [f(R\pi/2) - f(s_1)] / \sin(R\pi/2 - s_1) = (R\, R_\Delta) / (R_G\, R_\Delta) = R/R_G > 1;$$

donc

$$\mathrm{arc}(H\Sigma) / \mathrm{arc}(G\Delta) > R / R_G.$$

Dans le cas a) lorsque $D \equiv \varDelta$, on obtient la proposition de Théodose. Ibn ʿIrāq reprend également cette proposition avec sa démonstration. Il reste qu'Ibn ʿIrāq remarque que cette démonstration ne peut se faire sans un lemme, qu'il énonce et démontre. Ce lemme comprend comme un cas particulier un lemme que Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī a attribué à Thābit ibn Qurra. Ibn ʿIrāq revient alors à la généralisation de la proposition de Théodose, il rectifie les erreurs commises par Ménélaüs et donne une démonstration extrinsèque généralisant la démonstration de Théodose pour un arc GD choisi arbitrairement sur le quadrant arc($B\varDelta$)

Dans le cas a) de la proposition, lorsque $D \equiv \Delta$, Ibn Hūd expose une démonstration identique à celles de Théodose et d'Ibn ʿIrāq, mais sans citer le lemme mentionné par Ibn ʿIrāq. Lorsque D est un point intérieur de arc($B\Delta$), Ibn Hūd reprend également la démonstration mais au lieu de procéder par une méthode extrinsèque comme Ibn ʿIrāq, il introduit une méthode intrinsèque. Il s'appuie uniquement sur les propriétés des triangles sphériques (voir la note 18), sur le résultat d'un cas particulier (lorsque $D \equiv \Delta$, c'est-à-dire l'hypothèse de la proposition de Théodose) et il prouve l'inégalité

$$\mathrm{arc}(HC) / \mathrm{arc}(GD) < d / d_D \,.$$

Donc, dans la partie a) de la proposition, lorsque D est un point intérieur de arc($B\Delta$), Ibn Hūd donne une nouvelle démonstration comme nous l'avons vu.

Merci