# ANÁLISIS NUMÉRICO II – Práctico Nro. 1 – Año 2011
# Descomposición de Cholesky.

1. Escriba un algoritmo que chequee si una matriz es definida positiva, calcule el factor de Cholesky y lo guarde sobre la matriz A.

2. Escriba un algoritmo que resuleva un sistema lineal $Ax = b$ donde $A$ es definida positiva utilizando la descomposición de Cholesky.

3. Sea $A$ una matriz simétrica definida positiva de $R^{n\times n}$. Probar que:

   *a*) $a_{ii} > 0$ para $1 \le i \le n$.
   *b*) $A$ es no singular.
   *c*) Todas las submatrices principales de $A$ son definidas positivas.
   *d*) $|a_{ij}|^2 < a_{ii}a_{jj}$ para todo $1 \le i, j \le n$. Deducir que el elemento de módulo máximo de $A$ está en la diagonal.

4. Sea A una matriz de $R^{m\times n}$. Probar que las matrices $AA^t$ y $A^tA$ son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si $A$ es cuadrada entonces $A + A^t$ es simétrica. Qué sucede con $A - A^t$ ?

5. Sea $A$ una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

6. Probar que toda matriz cuadrada $A$ de $R^{n\times n}$ es expresable en forma única como $A = S+T$, donde $S$ es simétrica y $T$ es antisimétrica (es decir, $T^t = T$ ).

7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   *a*) Existe una matriz definida positiva no simétrica.
   *b*) Si $A$ es simétrica y $B$ es simétrica entonces $(AB)^t = AB$.
   *c*) Si $A$ es simétrica y B es simétrica entonces $AB$ es simétrica.
   *d*) Existen matrices $A$ y $B$ simétricas tales que $A = B$ y $AB$ es simétrica.

8. Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x, y \in R^n$ se cumple $|x^tAy| \le \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$. Sugerencia: considerar la función $\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A(x + \lambda y)$.

9. Sea A una matriz simétrica. Probar que la función
$$f(x) = \frac{(x^tAx)^{1/2}}{2},$$
es una norma vectorial si y sólo si A es definida positiva.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ definida positiva, y suponga que $A_{11}$ es $j \times j$ y $A_{22}$ es $k \times k$. Sea $\tilde{A}_{22} = A_{22} - R_{12}^T R_{12}$. Donde $R_{11}$ es el factor de Cholesky de $A_{11}$, $R_{12} = R_{11}^{-T} A_{12}$.
    (a) Probar que $\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.
    (b) Probar que $\tilde{A}_{22}$ es definida positiva.

11. Escriba otra prueba de la existencia de la descomposicińde Cholesky basada en el ejercicio anterior.

12. Pruebe por inducción que la descomposición de Cholesky es única.

13. Demuestre que si $A$ es definida positiva entonces $\det(A) > 0$.