ANÁLISIS NUMÉRICO II – Práctico Nro. 3 – Año 2011
Normas Matriciales.

1. *a*) Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, ¿qué condiciones debe cumplir una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para que la función $\|\cdot\|_A$ definida por $\|\mathbf{x}\|_A = \|A\mathbf{x}\|$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sea una norma vectorial?.

   b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva. Se define $\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^t A\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$. Probar que $\|\mathbf{x}\|_A$ es realmente una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$. ¿Qué ocurre si $A = I$?.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$.

   a) Calcular $\| A \|_p$ y $\kappa_p(A)$, para $p = 1, \infty$

   b) Graficar la imagen de la esfera unidad al aplicarle la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es A. Interpretar el resultado obtenido.

3. Sean A y B matrices no singulares y c un escalar no nulo. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $\kappa(A) = \kappa(cA)$

   b) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$, para toda A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

   c) $\kappa(A) \geq 1$

4. Sea A una matriz no singular y denotamos por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sus columnas. Probar que para todo $1 \leq i, j \leq n$ vale:

$$\kappa_p(A) \geq \frac{\|a_i\|_p}{\|a_j\|_p}, \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

   Por lo tanto, si las columnas de la matriz A difieren en varios órdenes de magnitud la matriz es mal condicionada.

5. Sea A matriz no singular, x y $\hat{x} = x + \delta x$ las soluciones de los sistemas $Ax = b$ y $A\hat{x} = b + \delta b$ respectivamente. Probar que existen b y δb (y x, δx asociados) tales que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \kappa(A)\frac{\| \delta b \|}{\|b\|}.$$

6. Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}.$$

El vector $\hat{X}$, $\hat{X}^t = [20{,}97,\ -18{,}99]$ es una mala aproximación de la solución. Pruebe que el residuo $r(\hat{X})$ es sin embargo pequeño. Así vemos que en un sistema mal condicionado no hay casi relación entre el tamaño del residuo y la exactitud de la solución.

7. *a*) Sea la matriz $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Graficar $\det(A(\epsilon))$ y $\kappa(A(\epsilon))$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

   b) Sea la matriz $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$. Graficar $\det(A(\epsilon))$ y $\kappa(A(\epsilon))$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

8. Demuestre que la norma matricial inducida por la norma vectorial l_1 es la "máxima suma por columnas", es decir:

$$\| A \|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

9. Demuestre que la norma matricial inducida por la norma vectorial l_∞ es la "máxima suma por filas", es decir:

$$\| A \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

10. Sea A no singular y suponga que x y $\hat{x}$ satisfacen $Ax = b$ y $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ respectivamente, donde $\hat{A} = A + \delta A$, $\hat{x} = x + \delta x \neq 0$ y $\hat{b} = b + \delta b \neq 0$.

    a) Probar que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|\hat{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\frac{\|\delta b\|}{\|\hat{b}\|}\right).$$

    b) Si $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)}$ y $b \neq 0$, entonces:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$