MATEMÁTICA I
Fac. de Ciencias Económicas
Cátedra FaMAF
Año 2010

PRÁCTICO N^o 1

1. Una función $f(x)$ satisface $f(0) = 1$ y aumenta 3 unidades en el eje y por cada unidad en el eje x. Graficar $f(x)$, teniendo en cuenta que el punto $(0, 1)$ pertenece al gráfico de $f(x)$.

2. Una función $f(x)$ satisface $f(2) = 6$ y decrece en $-1{,}5$ unidades en el eje y por cada unidad en el eje x. Dar la fórmula para $f(x)$ y graficarla.

3. *a*) Dada una constante b, ¿cómo se comporta $f(x) = 3x + b$ cuando x avanza en una unidad? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de $f(x)$?
   b) Dada una constante c, ¿cómo se comporta $g(x) = -0{,}5x + c$ cuando x avanza en una unidad? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de $g(x)$?

4. *a*) Hallar la fórmula de la función lineal $f(x)$ cuyo gráfico contiene a los puntos $(1, 2)$ y $(5, 4)$. Graficar $f(x)$. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando x avanza en una unidad? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de $f(x)$?
   b) Hacer lo mismo con los puntos $(2, 5)$ y $(4, 1)$.

5. *a*) Hallar la fórmula de la función lineal $f(x)$ cuyo gráfico contiene a los puntos $(0, 0)$ y $(2, -0{,}5)$. Graficar $f(x)$.
   b) Hacer lo mismo con los puntos $(1, 1)$ y $(2, -0{,}5)$.
   c) Las rectas obtenidas son _______________ entre sí. ¿Por qué?

6. Dada la función $f(x) = x^4 - 100000x^2$, ¿por qué el siguiente gráfico de $f(x)$ no es un buen gráfico en escala global?

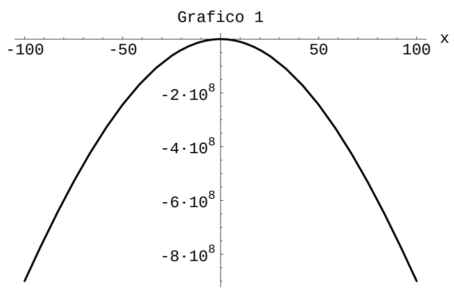


Figura 1:

El gráfico de la Figura 2, ¿es un buen gráfico de $f(x)$ en escala global? ¿Por qué?

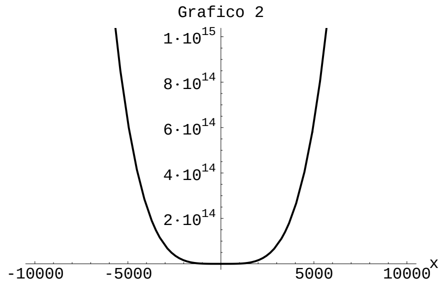
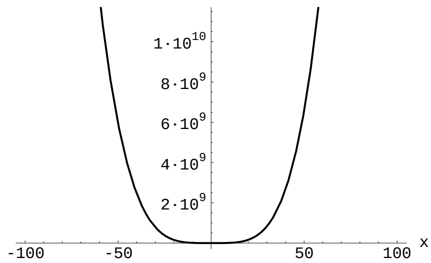


Figura 2:

7. Dada la función $f(x) = x^5 + 1000x^4$, decidir si el siguiente es un buen gráfico de $f(x)$ en escala global.



Si la respuesta es negativa, bosquejar un buen gráfico de $f(x)$ en escala global.

8. Calcular los siguientes límites aplicando el análisis en escala global de las correspondientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^4 + 50x^3 + 567x - 90}{2x^4 + 3x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^9 + 12\,e^{0,3x}}{3x^{12} + 6\,e^{0,3x}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^9 + 12\,e^{0,3x}}{3x^{12} + 6\,e^{0,3x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{37x^3 - 123\ \mathrm{sen}(x) + 16x^2}{e^{0,1x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-0,1x}(1 + 15x^8)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - 4\,e^{100x}}{0,5\,e^{0,1x} - 4}$

9. Ordenar las siguientes funciones de menor a mayor según su dominancia para $x \to \infty$:

$$0{,}001x^{15}, \quad 0{,}0004\,e^{0{,}01x}, \quad 128x^2, \quad \sqrt{x},$$
$$23x, \quad 0{,}04x^3, \quad 0{,}00000013\,e^{2x}, \quad 100x^{0{,}06}.$$

10. La tasa de crecimiento porcentual de la función $f(x)$ cuando x avanza en una unidad desde x a $x+1$ se define por

$$\text{porcen}_f(x) = 100\left(\frac{f(x+1)}{f(x)} - 1\right).$$

Considerar $f(x) = x^k$, $g(x) = 3e^{rx},\ r > 0$ y calcular $\text{porcen}_f(x)$, $\text{porcen}_g(x)$. ¿Cuál de estas tasas es mayor para valores grandes de x? ¿Cómo explica esto el comportamiento dominante en escala global de la función exponencial sobre las funciones potenciales cuando $x \to \infty$?

11. Graficar $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$. ¿Existe algún número real x tal que $e^x < 0$? ¿Es $e^{-x} < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$?

12. Graficar $f(x) = \log(e^x)$ y $g(x) = \log(e^{-x})$.

13. ¿Cómo se relaciona el crecimiento exponencial con una tasa de inflación constante? ¿Cómo explica el crecimiento exponencial el hecho de que las altas tasas de inflación sean alarmantes?

14. Una persona realiza gastos por una suma de \$4500 con su tarjeta de crédito y no efectúa ningún pago por un año. La tasa de interés publicada es del 15.3 % anual, por lo tanto la persona supone que su deuda con la entidad financiera al cabo de un año es de

$$4500 + 0{,}153\ 4500 = 5188{,}5$$

Pero su sorpresa es grande cuando recibe el resumen indicando que su deuda es de \$5238.89. ¿A qué se debe esta diferencia?

15. Explicar la siguiente afirmación, extraída de la sección de Economía de un conocido periódico:

“Las tasas de interés de las tarjetas de crédito por lo general no tienen en cuenta que las cargas financieras se componen mensualmente y en algunos casos diariamente. En promedio, la tasa de interés de las tarjetas de crédito es del 18.5 %, pero la mayoría de los clientes paga una tasa efectiva anual igual o superior al 20 %, dependiendo de la forma en que se compone el interés.”

16. Si una tasa de interés anual del 6 % se compone mensualmente, ¿cuál es la tasa efectiva anual?

17. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) $b = e^{\log(b)}$ para todo $b > 0$.

    b) $b = \log(e^b)$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

18. Muchos libros viejos de matemática consideran las funciones exponenciales

$$f(x) = a\, b^{rx}$$

con $b > 0$ en lugar de $b = e$. Tal vez esto confunda un poco a los estudiantes. Dado un número $b > 0$, determinar s en términos de

$$\log(b) \quad \text{y} \quad r$$

de modo que en vez de calcular $f(x)$ a través de la fórmula

$$f(x) = a\, b^{rx}$$

se pueda calcular $f(x)$ a través de la fórmula

$$f(x) = a\, e^{sx}.$$

19. Deducir una fórmula que permita convertir logaritmos naturales (base e) a logaritmos en base 10.

20. Calcular los siguientes límites, aclarando qué propiedad se usa en cada paso:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

(c) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2}+h)^2-2}{h}$ (d) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to (-2)^-} \sqrt{x^2+x-2}$ (f) $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+9}-3}{t}$

(g) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\right)$ (h) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\right)$

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ (j) $\displaystyle \lim_{x\to -4} \frac{x^3+64}{x+4}$

21. Sea

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}.$$

a) Calcular

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x)$, (ii) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

c) Graficar $f(x)$.

22. Considerar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 1, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

a) ¿Es $f(x)$ continua en $a = 2$?

b) Graficar $f(x)$.

23. El salario mensual de una persona es actualmente de \$1600 y se le garantiza un aumento del 3 % cada 6 meses. Graficar la función salario $S(t)$, donde t se mide en meses, para $0 \leq t \leq 24$ y analizar su continuidad.

24. Considerar

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{x}{2}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) ¿Es $f(x)$ continua en $a = 1$?

b) Graficar $f(x)$.