MATEMÁTICA I
Fac. de Ciencias Económicas
Cátedra FaMAF
Año 2010

PRÁCTICO N^o 2

- Límites infinitos y límites en el infinito.
- Derivada: definición y reglas de derivación.
- Relación del signo de la derivada con el crecimiento de la función.
- Función exponencial y función logaritmo. Diferenciación logarítmica
- Regla de L'Hopital

1. Determinar las asíntotas horizontales y verticales a las curvas determinadas por las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-1}$

   c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3x-10}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3+x}$

   e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

2. Hallar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Bosquejar un gráfico aproximado teniendo en cuenta los cortes en los ejes coordenados:

   a) $f(x) = x^2(x-2)\,(1-x)$

   b) $f(x) = (2+x)^3(1-x)(3-x)$

3. Encontrar la ecuación de la asíntota oblicua y determinar las asíntotas horizontales y verticales si existen:

   a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

   b) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$

4. Calcular por definición las derivadas de:

   a) $f(x) = 5x+3$

   b) $f(x) = \sqrt{6-x}$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

5. Bosquejar el gráfico de una función $f(x)$ tal que $f'(x) < 0$ para todo x. ¿Cuál es mayor: $f(0)$ o $f(1)$?

6. Bosquejar el gráfico de una función $f(x)$ definida para $0 \leq x \leq 2$ que satisface $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $1 < x < 2$. ¿Para qué valor de x alcanza $f(x)$ su máximo valor?

7. Graficar la función

   a) $f(x)$ tal que $f'(x) = 0$ para todo x cuyo gráfico contiene al punto $(0{,}5,\ 1)$.

   b) $g(x)$ tal que $g'(x) = 1$ para todo x cuyo gráfico contiene al punto $(1,\ 0{,}5)$.

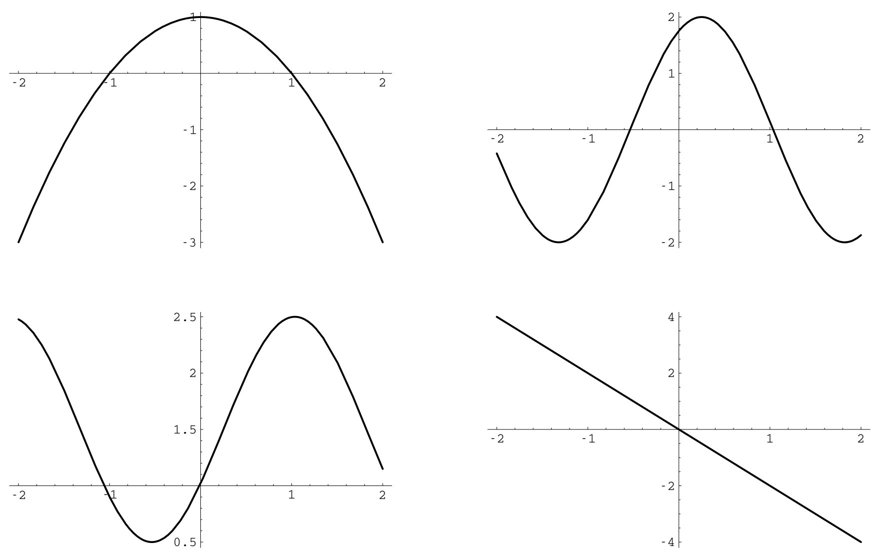


Figura 1:

c) $h(x)$ tal que $h'(x) = -0{,}5$ para todo x cuyo gráfico contiene al punto $(1,\ 0{,}5)$.

8. Dos de los gráficos de la Fig. 1 muestran las derivadas de las funciones graficadas en los dos restantes. Establecer la correspondencia entre el gráfico de cada función con el de su derivada.

9. Si $f(x)$ es una función derivable que satisface $f'(0) > 0,\ f'(1) < 0$, demostrar que existe al menos un s, $0 < s < 1$, tal que $f'(s) = 0$.

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas (todas las funciones que aparecen son derivables).

    a) Si $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ entonces $f'(x) = \cos(g(x))\, g'(x)$.

    b) Si $h(x) = f(x) + g(x)$ entonces $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

    c) Si $h(x) = f(x)\, g(x)$ entonces $h'(x) = f'(x)\, g'(x)$.

11. Calcular la derivada respecto de x de las siguientes funciones:

    a) $\operatorname{sen}(x)$

    b) $\cos(x)$

    c) x^2

    d) e^{2x}

    e) xe^{-2x}

    f) $x\log(x)$

    g) $\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

    h) $\cos(e^x)$

    i) $\operatorname{sen}(x^2)$

    j) $\dfrac{\cos(x^2)}{x}$

    k) $x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right)$

    l) $\operatorname{sen}(\log(x))$

    m) $e^{-x}\operatorname{sen}(6x)$

    n) $(\operatorname{sen}(7x))^2$

    ñ) $e^{\cos(3x)}$

    o) $(1 - x + x^2)^{24}$

    p) $\log(1 - 3x)$

    q) x^e

    r) $\dfrac{(1 + 8x - x^3)^2}{1 + x}$

    s) $\sqrt{1 + x^2}$

t) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^5$

u) $\dfrac{e^{ax}}{1+e^{ax}}$

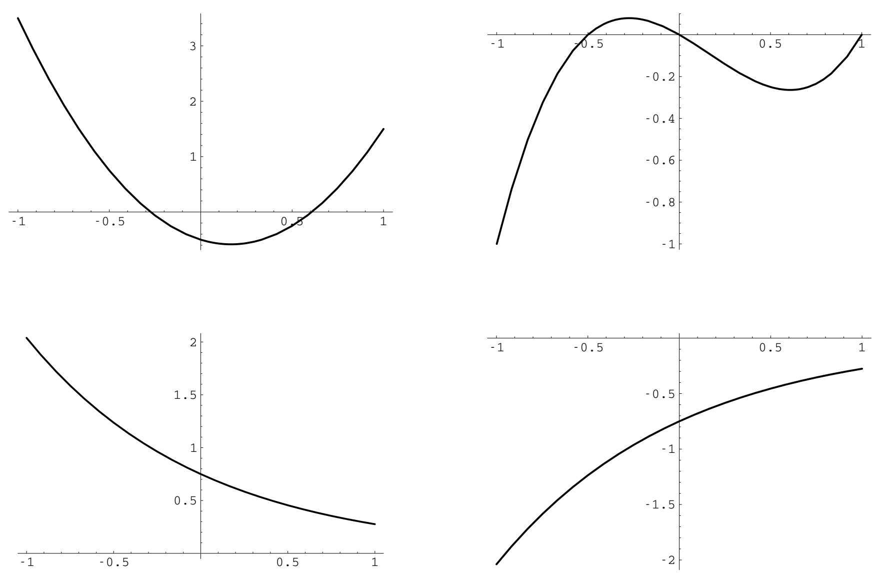
v) $x\log(x) - x$

w) $-\log(\cos(x))$

x) x^x

y) $x^{\log(x)}$

12. Dos de los siguientes gráficos muestran las derivadas de las funciones graficadas en los dos restantes. Establecer la correspondencia entre el gráfico de cada función con el de su derivada.



13. *a*) Hallar la función $f(x)$ que crece un 25 % cuando x avanza en una unidad y cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0{,}5)$. Graficar $f(x)$.

    b) Hallar la función $g(x)$ que decrece un 20 % cuando x avanza 2 unidades y cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 3)$. Graficar $g(x)$.

14. Si la inflación es del 2.3 % anual y un producto cuesta actualmente $50, ¿cuánto costará este producto dentro de t años? Graficar la función costo.

15. El banco A ofrece una tasa de interés del 6 % capitalizable mensualmente y el banco B una tasa del 6.1 % capitalizable anualmente. ¿Cuál de las dos opciones es más conveniente para el inversor?

16. Una persona invierte $3000 en un banco que le pagará un interés del 6.3 % capitalizable diariamente (365 veces al año).

    a) ¿Cuánto dinero tendrá cuando hayan transcurrido t años?

    b) Calcular la tasa efectiva anual.

    c) Determinar cuánto tiempo tardará en triplicarse la inversión inicial.

17. Si se efectúa un depósito en un banco que ofrece una tasa de interés del 5.9 % capitalizable continuamente, ¿cuál deberá ser el depósito inicial para tener $12000 al cabo de 15 años?

18. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hopital:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0^+} x\,\log(x)$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(m\,x)}{\operatorname{sen}(n\,x)}$

f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\log(1+e^x)}{5\,x}$

g) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

h) $\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x\to \infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{r}{x}\right)^{tx}$

19. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4x^5+50\log(x)}{2x^5+3x^2+1}$

b) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{6x^{0,05}+8\,\log(x)}{3x^{0,005}+4\,\log(x)}$

c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{720x^{81}-123\,\cos(x)+6\,\log(x)}{e^{0,04x}}$

d) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1-e^{0,1x}}{x+\log(1+x^2)}$

20. Dada $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$, analizar $f'(x)$ para deducir si el gráfico de $f(x)$ desciende en algún momento. ¿Es verdad que $x \geq \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \geq 0$?

21. Dada la función $f(x) = x^2\,e^{1-x^2}$, analizar $f'(x)$ para graficar $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar $f(x)$?

22. Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen $f'(x) > 0,\ g'(x) > 0$ para todo x entonces $f(x)$ y $g(x)$ son funciones crecientes. ¿Implica esto que el producto $f(x)\,g(x)$ es una función creciente? ¿Qué se puede decir si, además, $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ para todo x?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

23. *a*) Derivar ambos miembros de la identidad trigonométrica

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} = \operatorname{sen}(x)\,\cos(x).$$

De esta forma se obtiene la fórmula para $\cos(2x)$ en términos de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

b) Derivar con respecto a x ambos miembros de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\,\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\,\cos(x).$$

De esta forma se obtiene la fórmula para $\cos(x+y)$ en términos de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

24. Se sabe que cierta función $f(x)$ tiene derivada $f'(x) = (x-1)\,e^{-x}$ y que $(0,0)$ pertenece al gráfico de $f(x)$. Bosquejar el gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2$.

25. **Funciones trigonométricas inversas.**

a) La función $\operatorname{sen}(x)$ tiene inversa para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Dicha inversa, definida para $-1 \leq x \leq 1$, se denota por $\operatorname{arc\,sen}(x)$. Graficar ambas funciones. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1.$$

Ayuda: Como $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x$ para $-1 \leq x \leq 1$, derivar ambos miembros aplicando la regla de la cadena en el miembro de la izquierda. Luego usar que

$$\cos(y) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(y)} \quad \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

y por último reemplazar y por $\operatorname{arc\,sen}(x)$.

b) La función $\cos(x)$ tiene inversa para $0 \leq x \leq \pi$. Dicha inversa, definida para $-1 \leq x \leq 1$, se denota por $\operatorname{arc\,cos}(x)$. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos}(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1.$$

Ayuda: Similar a (a), usando que $\cos(\operatorname{arc\,cos}(x)) = x$ para $-1 \leq x \leq 1$ y que

$$\operatorname{sen}(y) = -\sqrt{1-\cos^2(y)} \quad \text{si } 0 \leq y \leq \pi.$$

Luego reemplazar y por $\operatorname{arc\,cos}(x)$.

c) La función $\tan(x)$ tiene inversa para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Dicha inversa, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, se denota por $\arctan(x)$. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ayuda: Similar a (b), usando que $\tan(\arctan(x)) = x$ para $x \in \mathbb{R}$ y que

$$\cos^2(y) = \frac{\cos^2(y)}{\cos^2(y)+\operatorname{sen}^2(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, reemplazar y por $\arctan(x)$.