PRÁCTICO N^o 3

- Gráfico de funciones
- Teorema de los valores extremos - de los valores intermedios - de Rolle - del Valor Medio
- Aplicaciones a la economía

1. Esboce el gráfico de cada una de las siguientes funciones, teniendo en cuenta en cada caso las siguientes características:
   - Dominio de la función.
   - Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, (si existen).
   - Intersección del gráfico con los ejes cartesianos, (cuando sea posible).
   - Puntos críticos, zonas de crecimiento y decrecimiento.
   - Máximos y mínimos, locales y absolutos.
   - Puntos de inflexión, zonas de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

   a) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 6$
   b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$
   c) $f(x) = x\ \log(x)$
   d) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$
   e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$
   f) $f(x) = \dfrac{x^2}{2\,x+5}$
   g) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \log(x)$
   h) $f(x) = x\,e^{-x^2}$
   i) $f(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \qquad x \in [0, 4\pi]$
   j) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1.$

2. Resolver los siguientes problemas:
   a) Hallar dos números cuya suma sea 4 y su producto sea máximo.
   b) Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de área máxima es el cuadrado.
   c) Si se dispone de $1200\ cm^2$ de material para hacer una caja con base cuadrada y sin tapa, calcula el volumen máximo posible de esa caja.

3. Dado $t > 0$ fijo, sea $f(x) = \dfrac{x^t}{e^x},\ x > 0$. Hallar el máximo absoluto de $f(x)$ para $x > 0$.

4. Si $f'(x) = 0$ en un único punto del intervalo $[0, 1]$, ¿cuántos puntos x_0 puede haber en dicho intervalo tales que $f(x_0) = 0$?

5. Dadas dos constantes positivas A y B, hallar el mínimo absoluto de $f(x) = A\,x + \dfrac{B}{x}$ para $x > 0$.

6. *a*) Considerar $f(x) = x^3 - 2x + 1$ en el intevalo $[-1, 1]$. ¿Posee el gráfico de f en dicho intervalo una recta tangente que sea paralela a la recta $y = -x$? (Sugerencia: usar el *Teorema del valor medio*).

   b) Considerar $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$. ¿Existe $-1 < c < 1$ tal que $g'(c) = 0$? ¿Por qué no se puede aplicar el *Teorema del valor medio*?

7. *a*) Dada $f(x) = x^5 + 10\,x + 3$, demostrar que hay un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.

   b) Demostrar que la ecuación $x^5 - 6\,x + b = 0$ tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

   c) Demostrar que la ecuación $x^4 + 4\,x + b = 0$ tiene a lo sumo dos soluciones reales.

8. ¿Existe una función $f(x)$ derivable tal que $f(0) = -1,\ f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para todo x?

9. Recordar que una función $f(x)$ se dice *impar* si satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Demostrar que si $f(x)$ es impar y derivable, entonces para todo $b > 0$ existe $-b < c < b$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)}{b}$.

10. Si $f(x)$ es dos veces derivable, positiva y cóncava hacia arriba en (a, b), demostrar que $g(x) = f(x)^2$ es cóncava hacia arriba en (a, b).

11. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos veces derivables, crecientes, positivas y cóncavas hacia arriba en (a, b), demostrar que el producto $f(x)\,g(x)$ es cóncava hacia arriba en (a, b).

12. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos veces derivables y cóncavas hacia arriba en $\mathbb{R}$, dar una condición sobre $f(x)$ que garantice que la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ sea cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$.

13. Se sabe que $f(x)$ tiene derivada $f'(x) = e^{x^2+2{,}5x}\, x(x + 2{,}5)$ y $f(0) = -1$.

    a) Calcular $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$.

    b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos locales de $f(x)$.

    c) Hallar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. ¿Tiene f puntos de inflexión?

    d) Esbozar el gráfico de $f(x)$.

14. Para las siguientes funciones costo $C(q)$ y demanda $p(q)$, hallar el nivel de producción que maximiza el beneficio y calcular el beneficio máximo.

    Recordar que $C(q)$ es el costo de producción de q unidades de cierto producto y $p(q)$ es el precio unitario que puede cobrar la compañía cuando vende q unidades. El ingreso total es

$$I(q) = q\,p(q)$$

y el beneficio (o ganancia) total es

$$B(q) = I(q) - C(q).$$

a) $C(q) = 900 + 110\,q - 0{,}1\,q^2 + 0{,}02\,q^3,\ p(q) = 260 - 0{,}1\,q$

b) $C(q) = 1450 + 36\,q - q^2 + 0{,}001\,q^3,\ p(q) = 60 - 0{,}01\,q$

c) $C(q) = 10000 + 28\,q - 0{,}01\,q^2 + 0{,}002\,q^3,\ p(q) = 90 - 0{,}02\,q$

15. Una empresa fabrica cierto producto con un costo $C(q) = 0{,}6q^2 + 12q + 1200$ y la demanda está dada por $q(p) = 200 - \frac{p}{6}$. Calcular el beneficio máximo, el nivel de producción que lo maximiza y el precio de venta correspondiente en los siguientes casos:

    a) Si no se aplica impuesto.

    b) Si la empresa debe pagar un impuesto de \$20 por unidad producida.

16. Un fabricante ha vendido 1000 bicicletas por mes a \$450 cada una. Según un estudio de mercado, por cada \$10 de descuento ofrecido al comprador, el número de rodados vendidos aumentará en 100 por mes.

    a) Hallar la función demanda.

    b) ¿Qué descuento debe ofrecer la compañía al comprador para maximizar sus ingresos?

    c) Si la función costo mensual es $C(q) = 68000 + 150q$, ¿cuál debe ser el descuento para maximizar las ganancias?

17. Determinar si la demanda es elástica, inelástica o unitaria en los siguientes casos y calcular la variación porcentual de la demanda, suponiendo que el precio dado aumenta un 2 %:

    a) $q(p) = 5000 - 100\,p$ en $p_0 = 25$

    b) $q(p) = \sqrt{36 - p}$ en $p_0 = 30$

    c) $q(p) = 14 - \log(p^2)$ en $p_0 = 1$

18. Para las funciones demanda $q(p)$ del ejercicio anterior, determinar los intervalos donde $q(p)$ es elástica e inelástica y deducir en qué intervalos el ingreso
$I(p) = p\,q(p)$ es creciente o decreciente.