Capítulo 10

Momentos angulares

10.1. Momentos angulares y rotaciones

Recordemos las propiedades fundamentales de un momento angular. Las componentes J_j $(j = 1, 2, 3)$ de $\mathbf{J}$ satisfacen

$$[J_j, J_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} J_\ell \ ;$$

de aqui se deduce que $\mathbf{J}^2$ conmuta con cada J_j y que eligiendo la tercera componente J_3 y definiendo

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \ ,$$

se tiene: Si ψ es autovector normalizado de $\mathbf{J}^2$ al autovalor $\hbar^2\mu$ y de J_3 al autovalor $\hbar\lambda$ entonces se tienen las tres propiedades: (1) $\mu \geq 0$; (2) $\|J_\pm\psi\| = \hbar\sqrt{\mu - \lambda(\lambda \pm 1)}$; y (3) Si $J_\pm\Psi$ no es nulo entonces es autovector de $\mathbf{J}^2$ al mismo autovalor $\hbar^2\mu$ y de J_3 al autovalor $\hbar(\lambda \pm 1)$. De estas tres propiedades se deduce que$\mu = j(j+1)$ para algún semientero $j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \cdots\}$, que cada autovalor de $\mathbf{J}^2$ es degenerado con una multiplicidad que es múltiplo de $2j+1$ y que los autovalores de J_3 son $\hbar m$ con $m \in \{-j, -j+1, \cdots j-1, j\}$ para todos los j que aparezcan y con la multiplicidad acorde al número de veces que aparezcan estos j.

Para cualquier semientero k escribimos $\mathbb{M}_k$ para el conjunto de los $2k+1$ semienteros $-k, -k+1, \cdots, k-1, k$; observe que estos números son enteros o genuinamente semienteros junto con k.

Decimos que un momento angular $\mathbf{J}$ actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ es *irreducible* si $[J_k, A] = 0$ para $k = 1, 2, 3$ y un operador A actuando sobre $\mathfrak{H}$ implica que A es un múltiplo de la identidad. Como $\mathbf{J}^2$ siempre conmuta con $\mathbf{J}$, en el caso irreducible $\mathbf{J}^2$ es un múltiplo de la identidad y, necesariamente $\mathbf{J}^2 = \hbar j(j+1)\mathbf{1}$ donde $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ y la dimensión de de $\mathfrak{H}$ es $2j+1$. Decimos que $\mathbf{J}$ es de magnitud j.

Si la multiplicidad del autovalor de $\mathbf{J}^2$ asociado a j es $2j+1$ se puede entonces elegir una base ortonormal $\{\psi_{j,m} : m \in \mathbb{M}_j\}$ del correspondiente autoespacio $\mathfrak{E}_j$ tal que:

$$J_3\psi_{j,m} = \hbar\psi_{j,m} \ , \quad J_\pm\psi_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\psi_{j,m\pm1} \ . \tag{10.1}$$

Observese que una base ortonormal con esta propiedad no es unívoca, pero si $\{\chi_{j,m} : m \in \mathbb{M}_j\}$ es otra base ortonormal que satisface (10.1) entonces existe un complejo z de módulo 1 independiente de m tal que $\chi_{j,m} = z\psi_{j,m}$ para todo $m \in \mathbb{M}_j$. Con esta salvedad, hablamos de la *base ortonormal estandard* del momento angular irreducible de magnitud j.

Consideramos un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ donde actuan las componentes de un momento angular $\mathbf{J}$ y, dada una rotación $D(\mathbf{e}, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$ (alrededor del eje unimodular $\mathbf{e}$ por el ángulo α), escribimos

$$U_{(\mathbf{e},\alpha)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \mathbf{e}\cdot\mathbf{J}} \ ,$$

que es un operador unitario sobre $\mathfrak{H}$. Cuando $\mathbf{J}$ es un momento angular orbital dado por $\widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{p}}$ entonces hemos visto (**??**) que $D(\mathbf{e}, \alpha) \mapsto U_{(\mathbf{e},\alpha)}$ es una representación, i.e.,

$$U_{(\mathbf{e},\alpha)} U_{(\mathbf{f},\beta)} = U_{(\mathbf{e},\alpha)\circ(\mathbf{f},\beta)} \ , \tag{10.2}$$

unitaria, del grupo de rotaciones $SO(3)$ de $\mathbb{R}^3$. Esto ¿sigue siendo cierto para un momento angular arbitario? Tenemos desde luego que

$$\frac{d}{d\alpha} U_{(\mathbf{e},\alpha)} = \left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} \right) U_{(\mathbf{e},\alpha)}$$

por lo cual (**??**)

$$U_{(\mathbf{e},\alpha)} U_{(\mathbf{e},\beta)} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}(\alpha + \beta)\mathbf{e} \cdot \mathbf{J}\} \ .$$

Pero debemos recordar que la rotación alrededor de cualquier eje por 2π es la identidad: $(\mathbf{e}, 2\pi) \circ (\mathbf{e}, \alpha) = (\mathbf{e}, \alpha)$. No tenemos ninguna garantia de que

$$U_{(\mathbf{e},\alpha+2\pi)} = U_{(\mathbf{e},\alpha)} \ .$$

Un ejemplo inmediato es el siguiente: considere un spin $\mathbf{S}$ de magnitud s, entonces tendremos calculando en la base ortonormal estandard $\{\psi_{s,m} : \ m \in \mathbb{M}_s\}$,

$$U_{D((0,0,1),\alpha)} = e^{-i\alpha S_3/\hbar} = \begin{pmatrix} e^{-is\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-i(s-1)\alpha/2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{is\alpha} \end{pmatrix} \ ;$$

i.e., $U_{D((0,0,1),\alpha)}$ es diagonal con elementos diagonales

$$\langle \psi_{s,m}, U_{D((0,0,1),\alpha)} \psi_{s,m} \rangle = e^{-i\alpha m} \ , \ \ m \in \{-p/2, \cdots, p/2\} \ .$$

Si $\alpha = 2\pi$ tenemos

$$\langle \psi_{s,m}, U_{D((0,0,1),2\pi)} \psi_{s,m} \rangle = e^{-i2\pi m} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } s \in \{0, 1, 2, \cdots\} \\ -1 & , \quad \text{si } s \in \{1/2, 3/2, 5/2, \cdots\} \end{cases} \ .$$

Los spins genuinamente semienteros no conducirán a representaciones.

Se puede demostrar que:

- $(\mathbf{e},\alpha)\mapsto U_{(\mathbf{e},\alpha)}$ es una representación si y solo si $U_{(\mathbf{e},2\pi)}=\mathbf{1}$ para todo vector unimodular $\mathbf{e}$.
- Si *todos* los autovalores de $\mathbf{J}^2$ que son siempre de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ se obtienen con $j\in\{0,1,2,\cdots\}$ entonces $U_{(\mathbf{e},2\pi)}=\mathbf{1}$ para todo vector unimodular $\mathbf{e}$.
- Si algún autovalor $\mathbf{J}^2$ es de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ con $j\in\{1/2,3/2,\cdots,(2n+1)/2,\cdots\cdots\}$ entonces $U_{(\mathbf{e},2\pi)}\neq\mathbf{1}$ para todo vector unimodular $\mathbf{e}$.
- Si *todos* los autovalores de $\mathbf{J}^2$ que son siempre de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ se obtienen con $j\in\{1/2,3/2,\cdots,(2n+1)/2,\cdots\cdots\}$ entonces $U_{(\mathbf{e},2\pi)}=-\mathbf{1}$ para todo vector unimodular $\mathbf{e}$.

Por lo tanto solamente se obtiene una representación del grupo de rotaciones con $\exp\{-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{J}/\hbar\}$ cuando los autovalores de $\mathbf{J}^2$ son todos "naturales", o sea de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ con $j\in\{0,1,2,\cdots\}$. En caso contrario se obtiene lo que se llama una representación proyectiva de $SO(3)$. Esto es

$$U_{D(\mathbf{e},\alpha)}U_{D(\mathbf{f},\beta)}=\omega(D(\mathbf{e},\alpha),D(\mathbf{f},\beta))\;U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}\ ,$$

donde $\omega(D(\mathbf{e},\alpha),D(\mathbf{f},\beta))$ es un número complejo de módulo 1 con ciertas propiedades particulares que no necesitaremos ( ). Observese que

$$\begin{aligned}&\langle(U_{D(\mathbf{e},\alpha)}U_{D(\mathbf{f},\beta)}\Phi),A(U_{D(\mathbf{e},\alpha)}U_{D(\mathbf{f},\beta)}\Phi)\rangle\\ =\ &\overline{\omega(D(\mathbf{e},\alpha),D(\mathbf{f},\beta))}\omega(D(\mathbf{e},\alpha),D(\mathbf{f},\beta))\langle(U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}\Phi),A(U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}\Phi)\rangle\\ =\ &\langle(U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}\Phi),A(U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}\Phi)\rangle\ ,\end{aligned}$$

por lo cual la diferencia entre $U_{D(\mathbf{e},\alpha)}U_{D(\mathbf{f},\beta)}$ y $U_{D(\mathbf{e},\alpha)\circ D(\mathbf{f},\beta)}$ nunca se manifiesta al calcular valores esperados.

Otra manera de racionalizar la situación cuando $\mathbf{J}$ tiene autovalores asociados a valores genuinamente semienteros de j es asociarle a cada rotación $D(\mathbf{e},\alpha)$ *no uno sino dos* operadores unitarios: $U_{(\mathbf{e},\alpha)}$ y $U_{(\mathbf{e},\alpha+2\pi)}$. Identificando luego a estos dos unitarios y escribiendo $[U_{(\mathbf{e},\alpha)}]$ para esta identificación, se tiene $[U_{(\mathbf{e},\alpha)}][U_{(\mathbf{f},\beta)}]=[U_{(\mathbf{e},\alpha)\circ(\mathbf{f},\beta)}]$.

Ahora bien, es un resultado matemático sumamente fundamental en sus aplicaciones a la mecánica cuántica, que toda representación unitaria proyectiva del grupo de rotaciones se descompone en una suma directa de representaciones unitarias proyectivas irreducibles,i.e. *RUPI*, de modo que el espacio de Hilbert subyacente $\mathcal{H}$ se descompone en una suma directa de subespacios $\mathcal{H}_\beta$, $\beta\in\mathfrak{A}$, donde cada $\mathcal{H}_\beta$ es invariante bajo cada $U_{(\widehat{\mathbf{e}},\alpha)}$ y la restricción a este subespacio de $\{U_{(\widehat{\mathbf{e}},\alpha)}:\widehat{\mathbf{e}}\in\mathbb{R}^3\ ,\ \ |\widehat{\mathbf{e}}|=1\ ,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\}$ es irreducible. Por otro lado,las RUPIs son todas de dimensión finita (i.e. el espacio de Hilbert subyacente es de dimensión finita) y están univocamente determinadas hasta equivalencia unitaria por su dimensión n de modo que el generador asociado es (unitariamente equivalente) a un spin de magnitud $s=(n-1)/2$. Entonces el conjunto $\mathfrak{A}$ se puede identificar con algún subconjunto $\mathbb{J}$ de los semienteros $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ y entonces

$$\{U_{(\widehat{\mathbf{e}},\alpha)}=\exp\{-i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{J}\}:\widehat{\mathbf{e}}\in\mathbb{R}^3\ ,\ \ |\widehat{\mathbf{e}}|=1\ ,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

$$= \bigoplus_{j\in\mathbb{J}} m(j)\{U^{[j]}_{(\widehat{\mathbf{e}},\alpha)} = \exp\{-i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{J}^{[j]}\} : \widehat{\mathbf{e}}\in\mathbb{R}^3\ ,\quad |\widehat{\mathbf{e}}| = 1\ ,\quad \alpha\in\mathbb{R}\}$$

donde $\mathbf{J}^{[j]}$ es un spin/momento angular irreducible actuando en un espacio de dimensión $2j+1$. Las multiplicidades $m(j)$ tienen en cuenta cuantas veces aparece la j-RUPI en la descomposición. Esta descomposición en suma directa es a la vez la diagonalización simultanea de $\mathbf{J}^2$ y J_3.

10.2. Suma de momentos angulares acoplados

El problema que nos planteamos ahora es el siguiente. Supongamos que tenemos dos momentos angulares $\mathbf{J}^{(1)}$ y $\mathbf{J}^{(2)}$ que actuan sobre los espacios $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ respectivamente. El operador

$$\mathbf{J} := \mathbf{J}^{(1)}\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{J}^{(2)}$$

actuando sobre $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ satisface las reglas de conmutación de un momento angular ya que

$$[J_1, J_2] = [J_1^{(1)}, J_2^{(1)}]\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes[J_1^{(2)}, J_2^{(2)}] = i\hbar J_3^{(1)}\otimes\mathbf{1} + i\hbar\mathbf{1}\otimes J_3^{(2)} = i\hbar J_3\ .$$

¿Como se obtienen autovalores y autofunciones de $\mathbf{J}^2$ y J_3 a partir de aquellas de los dos momentos angulares que sumamos? Unos minutos de reflexión[1] convencen que el problema planteado se resuelve por combinación de la solución del problema más simple que se obtiene suponiendo que $\mathfrak{H}_1 = \mathcal{E}_{j_1}$ y $\mathfrak{H}_2 = \mathcal{E}_{j_2}$, i.e. o sea que los espacios donde actuan los momentos angulares a sumar, son respectivos autoespacios minimales de $\mathbf{J}^{(1)}$ y de $\mathbf{J}^{(2)}$. O, con la nomenclatura ya introducida, basta entender el caso donde los momentos angulares a sumar son irreducibles.
Si sumamos entonces dos momentos angulares irreducibles, se tiene que $\mathcal{E}_{j_1}\otimes\mathcal{E}_{j_2}$ tiene dimensión $(2j_1+1)(2j_2+1)$, $\left(\mathbf{J}^{(1)}\right)^2\otimes\mathbf{1} = \hbar^2 j_1(j_1+1)\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbf{1}\otimes\left(\mathbf{J}^{(2)}\right)^2 = \hbar^2 j_2(j_2+1)\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, y

$$\{\psi_{j_1,m_1}\otimes\psi_{j_2,m_2}\ :\ m_1 = -j_1,\cdots,j_1\ ;\ m_2 = -j_2,\cdots,j_2\} \tag{10.3}$$

es un base ortonormal de este espacio. Esta base ortonormal diagonaliza a J_3 ya que

$$\begin{aligned} J_3\psi_{j_1,m_1}\otimes\psi_{j_2,m_2} &= (J_3^{(1)}\psi_{j_1,m_1}\otimes\psi_{j_2,m_2}) + (\psi_{j_1,m_1}\otimes J_3^{(2)}\psi_{j_2,m_2}) \\ &= \hbar(m_1+m_2)\psi_{j_1,m_1}\otimes\psi_{j_2,m_2}\ ; \end{aligned}$$

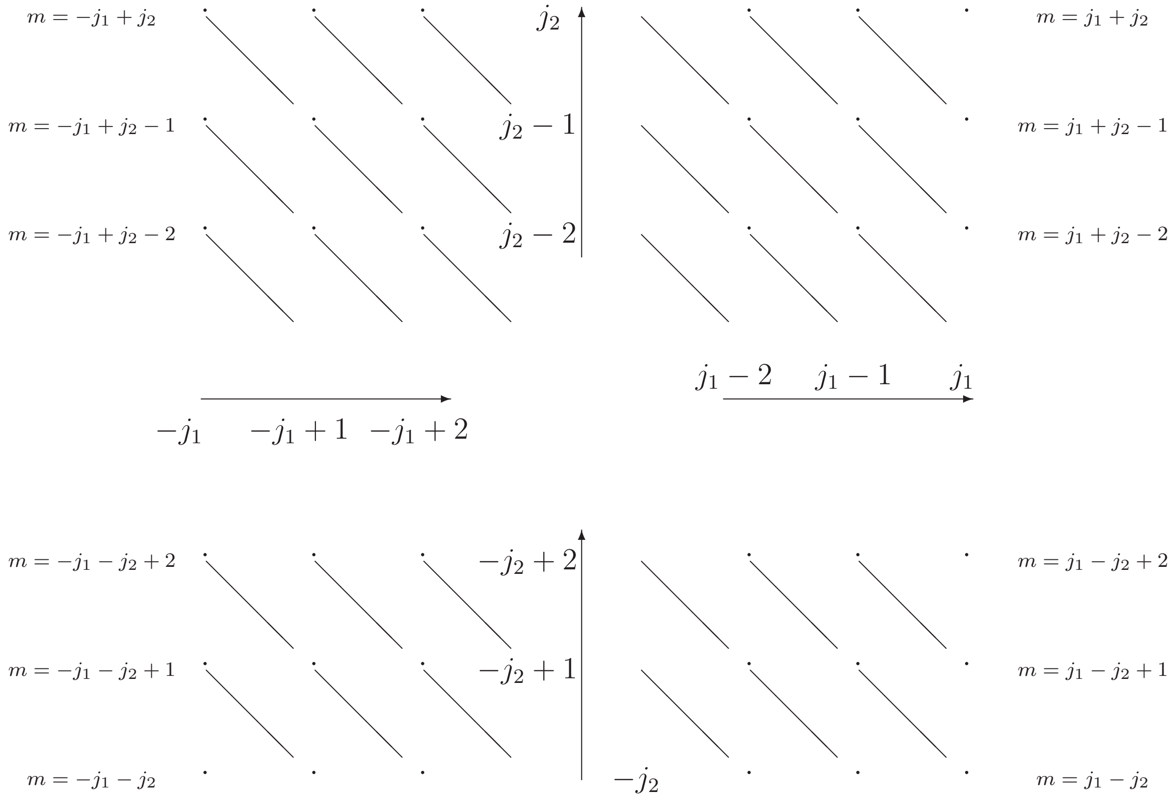
por lo tanto los autovalores de J_3 son de la forma $\hbar m$ con $m = m_1+m_2$ y tienen multiplicidad

$$\begin{cases} j_1+j_2+1-|m| & ,\quad \text{para } |j_1-j_2|\le|m|\le j_1+j_2 \\ 2\min\{j_1,j_2\}+1 & ,\quad \text{para } -|j_1-j_2|\le|m|\le|j_1-j_2| \end{cases}\ . \tag{10.4}$$

El espectro de J_3 es el conjunto $\{\hbar m:\ m = -j_1-j_2, -j_1-j_2+1,\cdots,j_1+j_2-1, j_1+j_2\}$. Como el espacio es de dimensión finita y $\mathbf{J}^2$ es autoadjunto, este operador es diagonalizable. Sin embargo, esta base no diagonaliza a $\mathbf{J}^2 = \left(\mathbf{J}^{(1)}\right)^2\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\left(\mathbf{J}^{(2)}\right)^2 + 2(J_1^{(1)}\otimes J_1^{(2)} + J_2^{(1)}\otimes J_2^{(2)} + J_3^{(1)}\otimes J_3^{(2)})$.

La situación se presenta graficamente asi:

[1]



Cada punto (m_1, m_2) del retículo representa un vector $\psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}$ de la base (10.3); en las diagonales se hallan todos los estados de esta base que son autoestados de J_3 al autovalor $\hbar m = \hbar(m_1 + m_2)$. El número de puntos del retículo en cada diagonal $m = const.$ es igual a la dimensión del autoespacio $\mathcal{F}_m$ de J_3 al autovalor $\hbar m$; esto da la fórmula (10.4) para la multiplicidad. Este subespacio es invariante ante $\mathbf{J}^2$ y por ende existe una base ortonormal de $\mathcal{F}_m$ que diagonaliza a la restricción de $\mathbf{J}^2$ a $\mathcal{F}_m$. Hay entonces que elegir, en cada "diagonal" (i.e. $\mathcal{F}_m$ autoespacio de J_3), combinaciones lineales de estados que sean autoestados de $\mathbf{J}^2$. Explicitamente, si $\psi_{j,m}$ es autovector común de $\mathbf{J}^2$ al autovalor $\hbar j(j+1)$ y J_3 al autovalor $\hbar m$, entonces en el desarrollo

$$\psi_{j,m} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} < \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m} > \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2} \tag{10.5}$$

solamente los coeficientes $< \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m} >$ donde $m_1 + m_2 = m$ pueden ser no nulos (¡aplique J_3!).

Arriba a la derecha tenemos la diagonal $m = j_1 + j_2$ con un solo estado. Afirmamos que:

El máximo autovalor de $\mathbf{J}^2$ *es* $\hbar^2 j(j+1)$ *con* $j = j_1 + j_2$ *y* $\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2}$ *es autovector a ese autovalor.*

Ya que $\mathcal{F}_{j_1+j_2} = \{\alpha(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2}) : \alpha \in \mathbb{C}\}$ es unidimensional e invariante ante $\mathbf{J}^2$, tenemos que $\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2}$ es autovector de $\mathbf{J}^2$ y el autovalor asociado tiene la forma $\hbar^2 j_o(j_o+1)$ para un semientero j_o. Demostramos que $j_o = j_1 + j_2$ y que $\hbar^2 j_o(j_o+1)$ es el máximo autovalor de $\mathbf{J}^2$. Por un lado, $J_+(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2})$ debe ser nulo pues sino obtendriamos un autovector de J_3 a un autovalor mayor a $\hbar(j_1+j_2)$; por lo tanto $j_o(j_o+1) = (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$ de donde $j_o = j_1 + j_2$. Por otro lado, si j_{max} es el número semientero que nos da el autovalor máximo $\hbar^2 j_{max}(j_{max}+1)$ de $\mathbf{J}^2$ –por lo tanto $j_o \leq j_{max}$– entonces, aplicando J_+ sucesivamente obtenemos un autovector de J_3 al autovalor $\hbar j_{max}$, lo cual implica que $j_{max} \leq (j_1 + j_2)$ y entonces $j_{max} = j_o$.

Hemos encontrado entonces el primer autovector $\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2} = \psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2}$ simultaneo de $\mathbf{J}^2$ y J_3 a los autovalores $\hbar^2(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$ y $\hbar(j_1+j_2)$ respectivamente y también hemos identificado el autovalor maximal de $\mathbf{J}$. Podemos ahora aplicar sucesivamente J_- a $\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2}$ para obtener $(2(j_1+j_2)+1)$ autovectores $\psi_{j_1+j_2,m}$ simultaneos de $\mathbf{J}^2$ –al autovalor maximal $\hbar^2(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$– y de J_3 a los autovalores $\hbar m$ con $m = j_1+j_2, j_1+j_2-1, \cdots, -j_1-j_2+1, -j_1-j_2$. Se tiene $J_-^{j_1+j_2-m}\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2} \propto \psi_{j_1+j_2,m} \in \mathcal{F}_m$. O sea que hemos eliminado una dimensión en cada "diagonal" $\mathcal{F}_m$. También podemos deducir que hemos agotado el autoespacio $\mathcal{E}_{j_1+j_2}$ de $\mathbf{J}$ al autovalor maximal pues si esto no fuera el caso podriamos generar otro autovector de J_3 al autovalor máximo $\hbar(j_1+j_2)$ linealmente independiente de $\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2}$.

Ahora repetimos el procedimiento. El subespacio $\mathcal{F}_{j_1+j_2-1}$ asociado a la segunda diagonal arriba a la derecha tiene dimensión 2. Ya hemos eliminado una dimensión; aquella correspondiente al vector $J_-\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2}$. Cualquier vector ϕ de este subespacio que es ortogonal a $J_-\psi_{j_1+j_2,j_1+j_2}$ es autovector de J_3 al autovalor $\hbar(j_1+j_2-1)$. Como no hay más lugar en este subespacio, ϕ debe ser autovector de $\mathbf{J}^2$ al máximo autovalor no eliminado, o sea $\hbar^2(j_o-1)j_o$. ϕ está determinado hasta una fase; la elegimos de tal manera que ϕ este normalizado y sea combinación lineal *real* de $\psi_{j_1,j_2-1} \otimes \psi_{j_1-1,j_2}$ y $\psi_{j_1-1,j_2} \otimes \psi_{j_1,j_2-1}$ lo que determina a ϕ salvo multiplicación por -1. Actuando sucesivamente con J_- sobre ϕ obtenemos $2(j_{max}-1)+1$ vectores (uno para cada diagonal no agotada) que son proporcionales a $\psi_{j_1+j_2-1,m}$, $m = -(j_1+j_2-1), \cdots, j_1+j_2-1$. Nuevamente hemos eliminado exactamente una dimensión en cada un de los subespacio $\mathcal{F}_m$ para $m = j_1+j_2-1, \cdots, -j_1-j_2+1$ agotando asi las segundas diagonales arriba a la derecha y abajo a la izquierda. Además hemos agotado el subespacio $\mathcal{E}_{j_1+j_2-1}$. Podemos repetir este juego con la tercera(cuarta , etc.) diagonal de arriba a la derecha. En cada juego eliminamos exactamente una dimensión de cada uno de los subespacios asociados a cada una de las diagonales no agotadas en un juego previo. Pero no podemos seguir jugando para siempre; en algún momento agotaremos todas las diagonales. En efecto en cada juego eliminamos

$$2(j_1+j_2-\ell)+1 \ , \quad \ell = 0, 1, \cdots, k$$

dimensiones. Debemos tener que

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{\ell=0}^{k}(2(j_1+j_2-\ell)+1) = (2j_1+2j_2+1)(k+1) - 2\frac{k(k+1)}{2} \ ;$$

esto nos da la ecuación $k^2 - 2(j_1+j_2)k + 4j_1j_2 = 0$ cuyas soluciónes son $k_\pm = j_1+j_2 \pm \mid j_1-j_2 \mid$.

Además, j_1+j_2-k está asociado al mínimo autovalor de $\mathbf{J}^2$: $\hbar^2(j_1+j_2-k)(j_1+j_2-k+1)$. Como

$$j_1 + j_2 - k_\pm = \mp \mid j_1 - j_2 \mid ,$$

y $j_1 + j_2 - k \geq 0$, debemos tener $k = k_-$ y $\hbar^2 \mid j_1 - j_2 \mid (\mid j_1 - j_2 \mid +1)$ es el autovalor mínimo de $\mathbf{J}^2$.

En resumen, los autovaloresde $\mathbf{J}^2$ en $\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}$ son:

$$\hbar^2 j(j+1) \quad , \quad j = \mid j_1 - j_2 \mid, \mid j_1 - j_2 \mid +1, \cdots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 \ ,$$

y tienen multiplicidad $2j + 1$.

ɔs

d

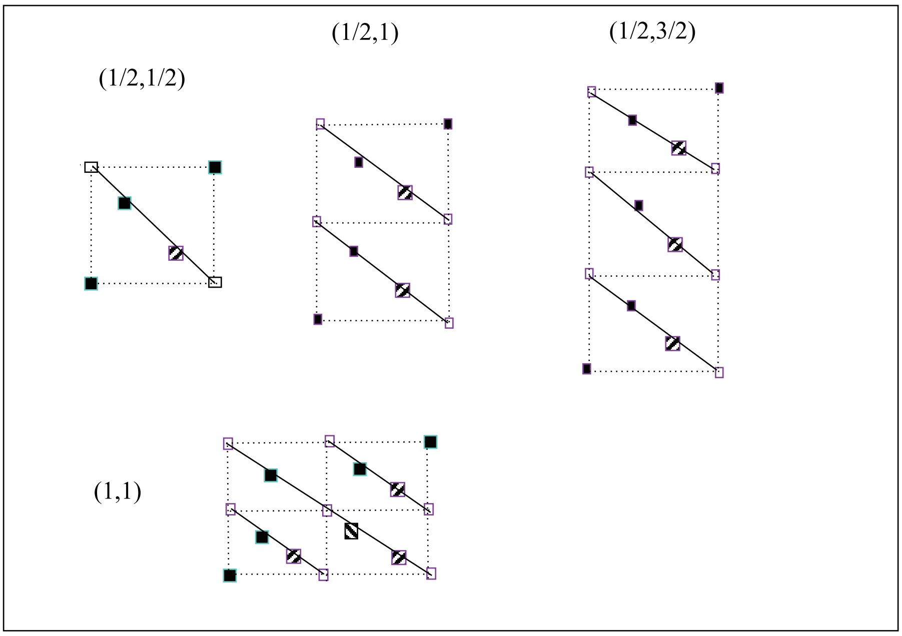


Figura 10.1: Los cuatro casos (j_1, j_2) de menor dimensión posibles. Los cuadraditos rellenados igual representan los autovectores de $\mathbf{J}^2$ a autovalores iguales obtenidos en cada “juego” aplicando J_-.

En cuanto al valor de los coeficientes (llamados coeficientes de *Clebsch-Gordan*) no-nulos en el desarrollo (10.5), tenemos siempre que empezamos el juego ℓ la posibilidad de elegir una fase arbitraria. La convención usual (vea los libros) está concebida para producir coeficientes reales lo que los determina módulo multiplicación de todos ellos por -1. Estos coeficientes están tabulados en dependencia de j_1 y j_2.

Veamos algo más explicitamente el caso más simple y no trivial de la suma de dos spins 1/2. Escribimos

$$\psi_{1/2,m/2} \otimes \psi_{1/2,m'/2} = |m, m'\rangle \ , \quad m, m' \in \{1, -1\} \ ,$$

para simplificar la notación. En esta base, el operador S_3 es diagonal

$$S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

con autovalores simples $\pm\hbar$ y un autovalor doble 0. Ya que $\vec{S}^2$ conmuta con S_3 los autoespacios $\mathcal{F}_m$ ($m = 1, 0, -1$) de S_3 al autovalor $\hbar m$ son invariantes ante $\mathbf{S}^2$. Por lo tanto, $|+,+\rangle$ y $|-,-\rangle$ son autovectores de $\mathbf{S}^2$. ¿A que autovalores? Podemos contestar la pregunta bestialmente calculando la matriz 4×4 asociada a $\mathbf{S}^2$:

$$\mathbf{S}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Pero, procediendo como en el análisis general vemos que los autovalores buscados son de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ con algún semientero j y que si $j \neq (1/2) + (1/2) = 1$ entonces debería aparecer (operando con S_+ sucesivamente sobre $|+,+\rangle$ o $|-,-\rangle$) un autovalor de S_3 de módulo mayor que $\hbar$ cosa que no es el caso. Entonces $|\pm,\pm\rangle$ es autovector simultaneo de $\mathbf{S}^2$ asociado a $j = 1$ y de S_3 al autovalor $\pm\hbar$ ($m + m' = \pm 1$). Ahora tenemos dos opciones para generar $(2j+1) = 3$ autovectores de $\mathbf{S}^2$ al mismo autovalor: podemos hacer $(S_-)^n|+,+\rangle$ o bien $(S_+)^n|-,-\rangle$. En el procedimiento general elegimos $|+,+\rangle$ y entonces bajamos por el espectro de S_3 *conservando* el autovalor de $\mathbf{S}^2$ asociado a $j = 1$.

$$S_-|+,+\rangle = (S_-^{(1)}\psi_{1/2,1/2}) \otimes \psi_{1/2,1/2} + \psi_{1/2,1/2} \otimes (S_-^{(2)}\psi_{1/2,1/2})$$
$$= \hbar(\psi_{1/2,-1/2}) \otimes \psi_{1/2,1/2} + \psi_{1/2,1/2} \otimes \psi_{1/2,-1/2}) = \hbar(|-,+\rangle + |+,-\rangle) \ ,$$
$$(S_-)^2|+,+\rangle = \hbar S_-(|-,+\rangle + |+,-\rangle) = \hbar^2 2|-,-\rangle \ .$$

O sea que

$$\psi_{1,1} = |+,+\rangle \ , \quad \psi_{1,0} = (|+,-\rangle + |-.+\rangle)/\sqrt{2} \ , \quad \psi_{1,-1} = |-,-\rangle \ ,$$

son 3 autovectores dos-a-dos ortogonales y normalizados de $\mathbf{S}^2$ al autovalor $\hbar^2 2$ ($j = 1$), que son también autovectores de S_3. Con esto hemos agotado 3 de las 4 dimensiones del espacio. La que queda es ortogonal a $\psi_{1,0}$ en el subespacio $\mathcal{F}_0$. El complemento ortogonal de $\psi_{1,0}$ en $\mathcal{F}_0$ es el subespacio unidimensional $\mathcal{G} = \{\alpha(|+,-\rangle - |-,+\rangle) : \ \alpha \in \mathbb{C}\}$. Ya que $S^2\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$, y que $\psi_{1,0}$ es autovector de $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^2\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ y ya que $\mathcal{G}$ es unidimensional, deducimos que $|+,-\rangle - |-,+\rangle$ es autovector de $\mathbf{S}^2$. ¿A que autovalor $\hbar^2 j'(j'+1)$? La respuesta es barata (porque no queda mas nada en el espacio) ya que calculando explicitamente

$$S_\pm(|+,-\rangle - |-,+\rangle) = 0$$

con lo cual $\sqrt{j'(j'+1)} = 0$ y por ende $j' = 0$. Por lo tanto,

$$\psi_{0,0} = e^{i\phi}(|+,-\rangle - |-,+\rangle)/\sqrt{2}$$

es autovector de S_3 y de $\mathbf{S}^2$ al autovalor 0 de ambos operadores. En resumén, los autovalores de $\mathbf{S}^2$ son $\hbar^2 j(j+1)$ donde $j = (1/2) + (1/2) = 1$ o $j = (1/2) - (1/2) = 0$ y tienen multiplicidad $2j+1$; la descomposición espectral es

$$\mathbf{S}^2 = 2\hbar^2 P_1 + 0.P_0$$

donde P_1 es el proyector ortogonal al subespacio $\mathcal{E}_1$ de $\mathbf{S}^2$ asociado al autovalor $2\hbar^2$ y P_0 es el proyector ortogonal al subespacio $\mathcal{E}_0$ asociado al autovalor 0 de $\mathbf{S}^2$. También,

$$S_3 = \hbar(Q_1 + 0.Q_0 - Q_{-1}) + 0.P_0 \ ,$$

es la descomposición espectral de S_3, donde Q_m es el proyector ortogonal unidimensional $Q_m\psi = \langle\psi_{1,m}|\psi\rangle\psi_{1,m}$ y P_0 es el proyector ortogonal unidimensional $P_0\psi = \langle\psi_{0,0}|\psi\rangle\psi_{0,0}$. Se tiene: $Q_m P_1 = Q_m$, $Q_m P_0 = 0$, $Q_1 + Q_0 + Q_{-1} = P_1 = \mathbf{1} - P_0$, y $Q_0 + P_0$ es el proyector ortogonal (bidimensional) al autoespacio $\mathcal{F}_0$ de S_3.

Volvemos a los coeficientes de Clebsch-Gordan para analizarlos en más detalle. En el desarrollo (10.5) aparecen solamente los coeficientes

$$\langle\psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m}\rangle$$

donde $m_1 + m_2 = m$ correspondiendo al hecho de que $\psi_{j,m}$ está en $\mathcal{F}_m$. Observamos también que

$$\begin{aligned} J_-\psi_{j_{max},j_{max}} &= (J_-^{(1)} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J_-^{(2)})(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2}) \\ &= \hbar\sqrt{2j_1}(\psi_{j_1,j_1-1} \otimes \psi_{j_2,j_2}) + \hbar\sqrt{2j_2}(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2-1}) \ , \end{aligned}$$

y que si seguimos aplicando J_- sucesivamente obtendremos siempre combinaciones lineales con *coeficientes positivos* de la base ortonormal producto $\{\psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2} : \ m_1 + m_2 = m\}$:

$$\langle\psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j_{max},m_1+m_2}\rangle \geq 0 \ .$$

Después de terminar con el autovalor máximo de $\mathbf{J}^2$ asociado a j_{max} nos queda en $\mathcal{F}_{j_{max}-1}$ una sola dimensión correspondiente al complemento ortogonal del vector $\psi_{j_{max},j_{max}-1} \propto J_-\psi_{j_{max},j_{max}}$. Concretamente,

$$\psi_{j_{max},j_{max}-1} = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}(\psi_{j_1,j_1-1} \otimes \psi_{j_2,j_2}) + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2-1}) \ .$$

Ahora, el vector más general en $\mathcal{F}_{j_{max}-1}$ ortogonal a $\psi_{j_{max},j_{max}-1}$ es :

$$\alpha(\psi_{j_1,j_1-1} \otimes \psi_{j_2,j_2}) + \beta(\psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j_2-1}) \ , \quad \alpha\sqrt{j_1} + \beta\sqrt{j_2} = 0 \ ;$$

podemos elegir α y β reales con $\beta = -\sqrt{j_1/j_2}\alpha$; si ahora normalizamos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tanto α como β quedan univocamente determinados salvo multiplicación de ambos por -1:

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \ , \quad \beta = \mp\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \ .$$

Con esto $\psi_{j_{max}-1,j_{max}-1}$ es combinación lineal real (aunque ya no de coeficientes positivos) de la base ortonormal producto de $\mathcal{F}_{j_{max}-1}$. Aplicando sucesivamente J_- siempre obtenemos a $\psi_{j_{max}-1,j_{max}-1-m} \propto (J_-)^m \psi_{j_{max}-1,j_{max}-1}$ como combinación lineal real de la base ortonormal producto de $\mathcal{F}_m$. Si seguimos con este procedimiento queda claro que cada vez que terminamos con un valor j^* de j nos queda solo una dimensión en $\mathcal{F}_{j^*-1}$ y que podemos elegir un vector ψ_{j^*-1,j^*-1} ortogonal a todos los construidos para valores de j mayores que j^* (y por ende autovector de $\mathbf{J}^2$ al autovalor asociado con j^*-1) de tal forma que los coeficientes de la expansion de ψ_{j^*-1,j^*-1} en la base producto de $\mathcal{F}_{j^*-1}$ sean reales. Pero entonces, $(J_-)^k \psi_{j^*-1,j^*-1}$ también es combinacion lineal real de la base ortonormal producto de $\mathcal{F}_{j^*-1-k}$. De hecho, dado que la dimensión no eliminada de $\mathcal{F}_{j^*-1}$ es 1, los coeficientes reales de la expansión de ψ_{j^*-1,j^*-1} en la base producto estań univocamente determinados por la normalización módulo multiplicación de todos ellos por -1. Con esto queda entonces (creo que) suficientemente motivado que los coeficientes de Clebsch-Gordan siempre pueden elegirse reales.

Veamos explicitamente como se determinan los coeficientes de Clebsch-Gordan para algún j fijo iterativamente a partir de alguno de elllos. Aplicando el operador $J_\pm$ al desarrollo (10.5), usando la relación general (10.1) y tomando el producto escalar con $\psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m\pm 1}\rangle \\
&= \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\mp 1)}\langle \psi_{j_1,m_1\mp 1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m}\rangle \\
&+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2\mp 1)}\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2\mp 1}, \psi_{j,m}\rangle \ .
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Este sistema recursivo debe ser suplementado por las condiciones $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, $m_1 + m_2 \mp 1 = m$ y $j \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \cdots, j_1 + j_2\}$ sobre los semienteros positivos j_1, j_2, j y los semienteros m_1, m_2, m. A j fijo, el sistema determina completamente todos los coeficientes para ese j, salvo multiplicación de todos ellos por un número complejo arbitario. La ambiguedad en el signo puede eliminarse si pedimos que

$$\langle \psi_{j_1,j_1} \otimes \psi_{j_2,j-j_1}, \psi_{j,j}\rangle \ \geq 0 \ , \ j = |j_1 - j_2|, \cdots, j_1 + j_2$$ [2].

Notese que $\psi_{j,j}$ es justamente el estado en la "esquina superior derecha" desde la cual se comienza cada uno de los "juegos" descriptos anteriormente. Esta condición, junto con la normalización determina univocamente a todos los coeficientes. Esta es la convención usada casi universalmente; con ella se obtienen las siguientes propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m}\rangle &= (-)^{j_1+j_2-j}\langle \psi_{j_1,-m_1} \otimes \psi_{j_2,-m_2}, \psi_{j,-m}\rangle \ ; \\
\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m}\rangle &= (-)^{j_1+j_2-j}\langle \psi_{j_2,m_2} \otimes \psi_{j_1,m_1}, \psi_{j,m}\rangle \ ; \\
\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m_2}, \psi_{j,m}\rangle &= (-)^{j_1-m_1}\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j,-m}, \psi_{j_2,m_2}\rangle \ ; \\
\sum_{m_1} \langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m-m_1}, \psi_{j,m}\rangle \ &\langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m-m_1}, \psi_{j',m}\rangle = \delta_{j,j'} \ ;
\end{aligned}$$

[2] Verifique por ejemplo que con esto, se tendra $\beta = +\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}$ en el desarrollo de $\psi_{j_{max}-1,j_{max}-1}$.

$$\sum_j \langle \psi_{j_1,m_1} \otimes \psi_{j_2,m-m_1}, \psi_{j,m}\rangle \, \langle \psi_{j_1,m_1'} \otimes \psi_{j_2,m'-m_1'}, \psi_{j',m}\rangle = \delta_{m_1,m_1'}\delta_{m,m'} \ .$$

10.3. Operadores escalares, vectoriales y tensoriales irreducibles

En esta sección estudiaremos operadores que tienen buen comportamiento ante rotaciones. Supongamos, que en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ tenemos un momento angular $\mathbf{J}$, i.e.

$$[J_j, J_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} J_\ell \ ;$$

$$U_{\vec{\alpha}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\mathbf{J}} \ ,$$

donde hemos acortado algo la notación poniendo $\vec{\alpha} = \alpha\mathbf{e}$. Podemos elegir una base ortonormal $\{\psi_{j,m;\mu(j)} : \ j \in \mathcal{J} \ , \ m \in \{-j, -j+1, \cdots, j-1, j\} \ , \ \mu(j) \in \mathcal{B}_j\}$ de $\mathfrak{H}$, donde el conjunto $\mathcal{J}$ describe los autovalores de $\mathbf{J}^2$ que aparecen, y $\mathbf{J}^2\psi_{j,m;\mu(j)} = \hbar^2 j(j+1)\psi_{j,m;\mu(j)}$; m describe los $2j+1$ autovalores de J_3 asociados al valor de j y $J_3\psi_{j,m;\mu(j)} = \hbar m \psi_{j,m;\mu(j)}$; y $\mu(j) \in \mathcal{B}_j$ es el índice que cuenta las multiplicidad del valor de $j \in \mathcal{J}$. En tal caso, la multiplicidad de $j \in \mathcal{J}$ es $(2j+1)$ por la cardinalidad de $\mathcal{B}_j$. Es importante que esto se entienda bien para luego no mal intrepretar ciertos resultados como el Teorema de Wigner-Eckart. Veamos un ejemplo concreto que ilustra la nomenclatura. Al discutir el momento angular orbital $\vec{L}$ vimos que los autovalores de $\vec{L}^2$ son los números $\hbar^2\ell(\ell+1)$ donde ℓ recorre los números naturales $\{0, 1, 2, \cdots\}$; cada valor de ℓ aparece una sola vez y con cada uno de estos valores hay asociado $(2\ell+1)$ autovalores de L_3 de magnitud $\hbar m$ con $m \in \{-\ell, -\ell+1, \cdots, \ell-1, \ell\}$ con autovectores correspondientes en el autoespacio de $\vec{L}^2$ asociado al valor de ℓ correspondiente. Pero $\vec{L}$ actua solamente sobre las variables angulares; con $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2([0,\infty); r^2dr) \otimes L^2(\mathcal{S})$, $\vec{L}$ actua sobre el espacio de funcionesde módulo cuadrado integrable sobre la esfera $\mathcal{S}$ en 3 dimensiones. Por ende, cada autovalor de $\vec{L}^2$ asociado a ℓ tiene multiplicidad infinita. Podemos tomar a $\mathcal{B}_j$ como cualquier conjunto de indices que enumera una base ortonormal de "espacio radial" $L^2([0,\infty); r^2dr)$. O sea, volviendo a nuestra nomenclatura que pretendemos ilustrar, en este caso $\mathcal{J} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ y $\mathcal{B}_\ell$ cualquier conjunto infinito denumerable, i.e. $\{1, 2, \cdots\}$ para todo ℓ.

Con esta nomenclatura tenemos entonces

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{J}\psi_{j',m';\nu(j')}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{\mu(j),\nu(j)}\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{J}\psi_{j,m';\mu(j)}\rangle \ .$$

10.3.1. Operadores escalares

Decimos en un operador A que actua sobre $\mathfrak{H}$ es *escalar* si

$$U_{\vec{\alpha}}^* A U_{\vec{\alpha}} = A \quad , \quad \text{para todo } \vec{\alpha} \ .$$

Tomando $\vec{\alpha} = \alpha\mathbf{u}$ con $\parallel \mathbf{u} \parallel = 1$, derivando con respecto al ángulo de rotación α y poniendo $\alpha = 0$, obtenemos:

$$\frac{-i}{\hbar}[\mathbf{u}\cdot\mathbf{J}, A] = \frac{-i}{\hbar}\mathbf{u}\cdot[\mathbf{J}, A] = 0 \quad , \quad \text{para todo } \mathbf{u} \text{ unimodular} \ .$$

O sea,

$$[\mathbf{J}, A] = \mathbf{0} \, .$$

Si $\mathbf{J}$ es irreducible, esto indica que $A = \alpha\mathbf{1}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. ¿Que podemos decir en el caso general? Calculemos los elementos de matriz $\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j',m';\nu(j')} \rangle$. Como $[\mathbf{J}^2, A] = 0$, $A\psi_{j,m;\mu(j)}$ es autovector de $\mathbf{J}^2$ al mismo autovalor que $\psi_{j,m;\mu(j)}$; luego

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j',m';\nu(j')} \rangle = \delta_{j,j'} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m';\nu(j)} \rangle \, .$$

Como $[J_3, A] = 0$, $A\psi_{j,m;\mu(j)}$ es autovector de J_3 al mismo autovalor que $\psi_{j,m;\mu(j)}$; luego

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m';\nu(j)} \rangle = \delta_{m,m'} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m;\nu(j)} \rangle \, .$$

En definitiva, tenemos:

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j',m';\nu(j')} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m;\nu(j)} \rangle \, .$$

Veamos que el elemento de matriz $\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m;\nu(j)} \rangle$, *no depende* de m. Tenemos que

$$J_+ \psi_{j,m;\mu(j)} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \psi_{j,m+1;\mu(j)} \; ;$$

además $(J_-)^* = J_+$ y $J_- J_+ = J_1^2 + J_2^2 - \hbar J_3 = \mathbf{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3$. Si $m \neq -j$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j,m;\nu(j)} \rangle &= \hbar^{-2} \left(j(j+1) - m(m-1) \right)^{-1} \langle J_+ \psi_{j,m-1;\mu(j)}, A J_+ \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \\
&= \hbar^{-2} \left(j(j+1) - m(m-1) \right)^{-1} \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, J_- A J_+ \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \\
&= \hbar^{-2} \left(j(j+1) - m(m-1) \right)^{-1} \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, A J_- J_+ \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \\
&= \hbar^{-2} \left(j(j+1) - m(m-1) \right)^{-1} \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, A \left(\mathbf{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3 \right) \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \\
&= \hbar^{-2} \left(j(j+1) - m(m-1) \right)^{-1} \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, A \left(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 (m-1)^2 \right. \\
&\qquad \left. - \hbar^2 (m-1) \right) \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle = \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, A\psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \, .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier operador escalar A,

$$\boxed{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, A\psi_{j',m';\nu(j')} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \alpha(j; \mu(j), \nu(j))} \, ,$$

donde la constante $\alpha(j; \mu(j), \nu(j))$ depende solamente de j (y de $\mu(j)$ y $\nu(j)$).

Ejemplo: Sea $\mathbf{S}$ un spin 1/2. En el espacio $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{pmatrix} \, ,$$

o sea $\mathbf{J}(\psi \oplus \phi) = (\mathbf{S}\psi) \oplus (\mathbf{S}\phi)$. Cualquier operador M de $\mathfrak{H}$ en si mismo es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \, ,$$

donde A, B, C y D son operadores de $\mathbb{C}^2$ en si mismo. El cálculo del conmutador $[\mathbf{J}, M]$ da que este conmutador se anula si y solo si $[A, \mathbf{S}] = [B, \mathbf{S}] = [C, \mathbf{S}] = [D, \mathbf{S}] = 0$ y la irreducibildad de $\mathbf{S}$ (i.e., un operador conmuta con las tres componentes de $\mathbf{S}$ si y solo si es un múltiplo de la identidad), indica que A, B, C y D son múltiplos de la identidad. Por lo tanto,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{1} & \beta\mathbf{1} \\ \gamma\mathbf{1} & \delta\mathbf{1} \end{pmatrix} ,$$

con α, β, γ y δ complejos arbitrarios es el operador escalar general con respecto a $\mathbf{J}$. Aca tenemos $\mathcal{J} = \{1/2\}$ y el único valor de j aparece dos veces con lo cual, por ejemplo, $\mathcal{B}_{1/2} = \{1, 2\}$ y

$$\psi_{1/2,m;1} = |m\rangle \oplus 0 \ , \quad \psi_{1/2,m;2} = 0 \oplus |m\rangle \ ,$$

donde $S_3|m\rangle = \hbar m|m\rangle$, $m \in \{1/2, -1/2\}$. Los elementos de matriz de M son inmediatos y se verifica claramente el resultado general. Notese que si β y γ no son ambos nulos, M no es diagonal, pero inclusive en este caso hay operadores diagonales escalares no triviales correspondiendo a $\alpha \neq \delta$.

10.3.2. Operadores vectoriales I

Decimos que tres operadores $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ autoadjuntos que actuan sobre $\mathfrak{H}$ son las componentes cartesianas de un operador *vectorial* si

$$U_{\vec{\alpha}}^* \mathbf{V} U_{\vec{\alpha}} = D(\vec{\alpha})\mathbf{V} \quad , \quad \text{para todo } \vec{\alpha} \ . \tag{10.7}$$

Recordando que $D(\vec{\alpha})$ es la rotación asociada con $\vec{\alpha}$ en tres dimensiones, la fórmula (10.7) nos dice que el operador transforma ante rotaciones como un vector. No hay perdida de generalidad en suponer que las componentes son autoadjuntas, pues si $\mathbf{V}$ satisface (10.7) entonces $\mathbf{V}^*$ también lo hace y por ende $\mathbf{V} + \mathbf{V}^*$ y $i(\mathbf{V} - \mathbf{V}^*)$ también satisfacen (10.7). Nuevamente, tomando $\mathbf{u}$ fijo y diferenciando con respecto a α, obtenemos que (10.7) es equivalente a:

$$\frac{i}{\hbar}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{V}] = \mathbf{u} \times \mathbf{V} \ , \quad \text{para todo } \mathbf{u} \text{ unimodular} \ ;$$

vale decir

$$[J_j, V_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} V_\ell \ . \tag{10.8}$$

Obviamente, $\mathbf{J}$ es un operador vectorial. En general, no es el caso que un operador vectorial conmuta con $\mathbf{J}^2$; considere por ejemplo el operador $\widehat{\mathbf{r}}$ que es vectorial con respecto al momento angular orbital $\vec{L}$.

Si *suponemos* que $[\mathbf{J}^2, V_k] = 0$, $k = 1, 2, 3$, entonces V_k deja invariante el autoespacio $\mathcal{E}_j$ generado por $\{\psi_{j,m;\mu(j)} : m \in \{-j, \cdots, j\} \ , \ \mu(j) \in \mathcal{B}_j\}$, y

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_k \psi_{j',m';\nu(j')} \rangle = \delta_{j,j'} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_k \psi_{j,m';\nu(j)} \rangle \ .$$

Como V_3 conmuta con J_3 obtenemos (por el argumento de siempre):

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_3 \psi_{j,m';\nu(j)} \rangle = \delta_{m,m'} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_3 \psi_{j,m;\nu(j)} \rangle \ .$$

Para obtener información sobre los elementos de matriz de V_k, $k = 1, 2$, conviene trabajar con los operadores

$$V_\pm := V_1 \pm i V_2 \ .$$

Para ellos tenemos las siguientes relaciones de conmutación:

$$\left. \begin{array}{l} [J_1, V_\pm] = \mp \hbar V_3 \\ [J_2, V_\pm] = -i\hbar V_3 \\ [J_3, V_\pm] = \pm \hbar V_\pm \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [J_\pm, V_\pm] = 0 \\ [J_\pm, V_\mp] = \pm 2\hbar V_3 \end{array} \right. \ .$$

Tenemos,

$$J_3 V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)} = V_\pm J_3 \psi_{j,m;\mu(j)} \pm \hbar V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)}$$
$$= \hbar m V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)} \pm \hbar V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)} = \hbar (m \pm 1) V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)} \ ;$$

con lo cual $V_\pm \psi_{j,m;\mu(j)} \propto \psi_{j,m\pm 1;\gamma(j)}$ para algún $\gamma(j) \in \mathcal{B}_j$. Entonces,

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_\pm \psi_{j',m';\nu(j)} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'\pm 1} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_\pm \psi_{j,m\mp 1;\nu(j)} \rangle \ .$$

Tenemos

$$0 = \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, (J_+ V_+ - V_+ J_+) \, \psi_{j',m-2;\nu(j')} \rangle \ .$$

Intercalando entre J_+ y V_+ en ambos sumandos el operador

$$\mathbf{1} = \sum_{j'' \in \mathcal{J}} \sum_{\ell=-j''}^{j''} \sum_{\tau(j'') \in \mathcal{B}_{j''}} P_{j'',\ell;\tau(j'')} \quad , \quad P_{j'',\ell;\tau(j'')} \phi = \langle \psi_{j'',\ell;\tau(j'')}, \phi \rangle \psi_{j'',\ell;\tau(j'')} \ ;$$

obtenemos:

$$0 = \sum_{j'' \in \mathcal{J}} \sum_{\ell=-j''}^{j''} \sum_{\tau(j'') \in \mathcal{B}_{j''}} \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \left(J_+ P_{j'',\ell;\tau(j'')} V_+ - V_+ P_{j'',\ell;\tau(j'')} J_+ \right) \psi_{j',m-2;\nu(j')} \rangle$$

$$= \sum_{j'' \in \mathcal{J}} \sum_{\ell=-j''}^{j''} \sum_{\tau(j'') \in \mathcal{B}_{j''}} \Big(\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+ \psi_{j'',\ell;\tau(j'')} \rangle \langle \psi_{j'',\ell;\tau(j'')}, V_+ \psi_{j',m-2;\nu(j')} \rangle$$
$$- \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+ \psi_{j'',\ell;\tau(j'')} \rangle \langle \psi_{j'',\ell;\tau(j'')}, J_+ \psi_{j',m-2;\nu(j')} \rangle \Big)$$
$$= \delta_{j,j'} \Big(\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+ \psi_{j,m-1;\mu(j)} \rangle \langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, V_+ \psi_{j,m-2;\nu(j)} \rangle$$
$$- \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+ \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle \langle \psi_{j,m-1;\nu(j)}, J_+ \psi_{j,m-2;\nu(j)} \rangle \Big) \ .$$

Cuando los elementos de matriz de J_+ que aqui aparecen no son nulos, y teniendo en cuenta que $\langle \psi_{j,m;\nu(j)}, J_+ \psi_{j,n;\nu(j)} \rangle$ no depende de $\nu(j)$, obtenemos:

$$\frac{\langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, V_+ \psi_{j,m-2;\nu(j)} \rangle}{\langle \psi_{j,m-1;\mu(j)}, J_+ \psi_{j,m-2;\mu(j)} \rangle} = \frac{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+ \psi_{j,m-1;\nu(j)} \rangle}{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+ \psi_{j,m-1;\mu(j)} \rangle} \ , \ \ 2 - j \le m \le j \ .$$

Por lo tanto el cociente
$$\frac{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m-1,\nu(j)}\rangle}{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+\psi_{j,m-1;\mu(j)}\rangle}$$
no depende de m y

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m';\nu(j)}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'+1}\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+\psi_{j,m-1,\mu(j)}\rangle \ , \tag{10.9}$$

donde $\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))$ es una constante que solo depende de $\mathcal{E}_j$ y de los índices de multiplicidad. Procediendo análogamente con $[J_-, V_-] = 0$ se obtiene:

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_-\psi_{j,m';\nu(j)}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'-1}\alpha_-(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_-\psi_{j,m+1;\mu(j)}\rangle \ , \tag{10.10}$$

donde $\alpha_-(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))$ es una constante que solo depende de $\mathcal{E}_j$ y de los índices de multiplicidad.

Usando la relación $[J_-, V_+] = -2\hbar V_3$ y (10.9)

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_3\psi_{j,m;\nu(j)}\rangle &= (-2\hbar)^{-1}\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, (J_-V_+ - V_+J_-)\,\psi_{j,m;\nu(j)}\rangle \\
&= (-2\hbar)^{-1}\Big(\langle J_+\psi_{j,m;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m;\nu(j)}\rangle - \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m-1,\nu(j)}\rangle\Big) \\
&= -2^{-1}\Big(\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\langle \psi_{j,m+1;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m,\nu(j)}\rangle \\
&\quad -\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_+\psi_{j,m-1;\nu(j)}\rangle\Big) \\
&= -2^{-1}\Big(\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\langle \psi_{j,m+1;\mu(j)}, J_+\psi_{j,m;\mu(j)}\rangle \\
&\quad -\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_+\psi_{j,m-1;\mu(j)}\rangle\Big) \\
&= -2^{-1}\hbar\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\,(j(j+1)-m(m+1)-j(j+1)+m(m-1)) \\
&= \hbar m\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\ ;
\end{aligned}$$

o sea:

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_3\psi_{j,m;\nu(j)}\rangle = \alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_3\psi_{j,m;\mu(j)}\rangle \ . \tag{10.11}$$

El mismo cálculo con la relación $[J_+, V_-] = -2\hbar V_3$, y (10.10) nos da:

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, V_3\psi_{j,m;\nu(j)}\rangle = \alpha_-(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, J_3\psi_{j,m;\mu(j)}\rangle \ . \tag{10.12}$$

Comparando, (10.11) y(10.12) deducimos que:

$$\alpha_+(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j)) = \alpha_-(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j)) =: \alpha(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j)) \ . \tag{10.13}$$

Luego, combinando toda la información obtenida:

$$\boxed{\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{V}\psi_{j',m';\nu(j)}\rangle = \delta_{j,j'}\alpha(\mathcal{E}_j;\mu(j),\nu(j))\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{J}\psi_{j,m';\mu(j)}\rangle} \ .$$

Un operador vectorial que conmuta con $\mathbf{J}^2$ es proporcional a un momento angular irreducible $\mathbf{J}^{[j]}$ en cada subbloque $(\mu(j),\nu(j))$ de $\mathcal{E}_j$ de dimensión $2j+1$.

El caso general, cuando $[\mathbf{J}^2, \mathbf{V}] \neq \mathbf{0}$, se analizará inmediatmente en el contexto de los llamados operadores tensoriales esféricos irreducibles de rango 1.

Ejemplo Retomamos el ejemplo analizado al ilustrar el caso de operadores escalares. Sea $\mathbf{S}$ un spin $1/2$ y, en el espacio $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{pmatrix} ,$$

o sea $\mathbf{J}(\psi \oplus \phi) = (\mathbf{S}\psi) \oplus (\mathbf{S}\phi)$. Cualquier operador M de $\mathfrak{H}$ en si mismo es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

donde A, B, C y D son operadores de $\mathbb{C}^2$ en si mismo. Puesto que $\mathbf{J}^2 = 3\hbar^2/4)$, todo operador vectorial $\mathbf{V}$ conmuta con $\mathbf{J}^2$. Usando la irreducibilidad y la dimensión[3] de $\mathbf{S}$, se encuentran todas las soluciones de las relaciones de conmutación (10.8) y son:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{S} & \beta\mathbf{S} \\ \gamma\mathbf{S} & \delta\mathbf{S} \end{pmatrix} ,$$

donde α, β, γ y δ son complejos arbitrarios. Luego todos los operadores vectoriales respecto de $\mathbf{J}$ son aquelos donde α y δ son reales y $\gamma = \overline{\beta}$.
Los elementos de matriz de $\mathbf{V}$ en la base $\{\psi_{1/2,m,\mu} : \ m = \pm 1/2 \ , \ \ \mu = 1, 2\}$ son inmediatos y se verifica claramente el resultado general. Notese que los únicos operadores vectoriales proporcionales a $\mathbf{J}$ son aquellos con $\alpha = \delta$ y $\beta = 0$.

10.3.3. Operadores tensoriales esféricos irreducibles

Lo que acabamos de hacer admite generalización a conjuntos de más operadores que transforman apropiadamente entre si ante rotaciones. La idea es la siguiente. Considere un momento angular irreducible de magnitud s, o sea $\mathbf{S}^{(s)}$ que actua sobre $\mathbb{C}^{2s+1}$ (tal que $(\mathbf{S}^{(s)})^2 = \hbar^2 s(s+1)\mathbf{1}$). Sea $\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})$ la matriz asociada a $e^{-i\vec{\alpha}\cdot\mathbf{S}^{(s)}}$ en la base estandard $\{\psi_{s,k} : k = -s, -s+1, \cdots, s-1, s\}$ para la cual $S_3^{(s)}\psi_{s,k} = \hbar k \psi_{s,k}$, etc.; i.e.

$$\mathbf{D}^{(s)}_{k,k'}(\vec{\alpha}) = \langle \psi_{s,k}, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\mathbf{S}} \psi_{s,k'} \rangle \ .$$

Observe que por el comentario sobre la unicidad de la base estandard –vea (10.1)– esta matriz es independiente de la base estandard elegida. Entonces,

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\mathbf{S}^{(s)}} \psi_{s,m} = \sum_{n=-s}^{s} \mathbf{D}^{(s)}_{n,m}(\vec{\alpha}) \psi_{s,n} \ .$$

Decimos que $2s+1$ operadores $T^{(s)}_m$, $m = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$, que actuan todos sobre el mismo espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ son las componentes esféricas de un *operador tensorial irreducible de rango s* respecto a un momento angular $\mathbf{J}$, que actua sobre $\mathfrak{H}$, si con $U_{\vec{\alpha}} = \exp -i\vec{\alpha}\cdot\mathbf{J}/\hbar$,

[3]Toda representación irreducible de las relaciones de conmutación en $\mathbb{C}^2$ son proporcionales; no así en dimensiones mayores.

$$U_{\vec{\alpha}}\, T_m^{(s)}\, U_{\vec{\alpha}}^* = \sum_{n=-s}^{s} D_{n,m}^{(s)}(\vec{\alpha})\; T_n^{(s)}\;; \tag{10.14}$$

o sea que estos $(2s+1)$ operadores transforman entre si como los elementos de la base estandard del momento angular irreducible $\mathbf{S}^{(s)}$. Esta definición merece algunos comentarios, después de reescribirla en notación vectorial más compacta:

$$U_{\vec{\alpha}} \mathbf{T}^{(s)} U_{\vec{\alpha}}^* = [\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})]^T \mathbf{T}^{(s)}\;, \tag{10.15}$$

donde ^{T} denota la transposición matricial.

Primeramente, el caso $s=0$, indica que $U_{\vec{\alpha}} T_0^{(0)} U_{\vec{\alpha}}^* = T_0^{(0)}$, o sea que $T_0^{(0)}$ es un operador escalar.

Lo segundo es un asunto de convenciones. (10.14) es la convención canónica aunque no me guste porque hubiese yo preferido: o bien

$$U_{\vec{\alpha}}^*\, T_m^{(s)}\, U_{\vec{\alpha}} = \sum_{n=-s}^{s} \mathbf{D}_{n,m}^{(s)}(\vec{\alpha})\; T_n^{(s)}$$

aquí tenemos a la izquierda la transformación canónica (de Heisenberg) del operador $T_m^{(s)}$ asociada con la "rotación" $\psi \mapsto U_\alpha \psi$ y a la derecha lo mismo que en (10.14); o sino

$$U_{\vec{\alpha}}^*\, T_m^{(s)}\, U_{\vec{\alpha}} = \sum_{n=-s}^{s} \mathbf{D}_{m,n}^{(s)}(\vec{\alpha})\; T_n^{(s)}$$

donde tendremos a la izquierda la transformación canónica de Heisenberg, pero a la derecha la transformación del "vector" con componentes $(T_s^{(s)}, T_{s-1}^{(s)}, \cdots, T_{-s}^{(s)})$ en la base $\psi_{s,m}$ bajo la acción de $e^{-i\vec{\alpha}\cdot\mathbf{S}^{(s)}}$. Cualquiera de estas dos definiciones hubiese conducido a una teoría análoga a la que se discurre en casi todos los libros y que se basa en (10.14).

Para entrar en calor, veamos que en el caso $s=1$, $T_m^{(1)}$ son las componentes esféricas de un operador vectorial. En efecto, $\mathbf{D}^{(1)}(\vec{\alpha})$ es la matriz asociada a la rotación en $\mathbb{C}^3$ en la base $\{\psi_{1,m} \;:\; m = 1, 0, -1\}$ para la cual

$$S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\;,\quad S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\;,\quad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\;.$$

Si $\mathbf{W}$ es la matriz asociada a un operador unitario arbitrario en la base estandard, entonces –con notación matricial– si $\mathbf{V} = \mathbf{W}\mathbf{T}^{(1)}$ tendremos

$$U_{\vec{\alpha}} \mathbf{V} U_{\vec{\alpha}}^* = \mathbf{W}\left(U_{\vec{\alpha}} \mathbf{T}^{(1)} U_{\vec{\alpha}}^*\right) = \mathbf{W}\left(\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})\right)^T \mathbf{T}^{(1)} = \left(\mathbf{W}\left(\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})\right)^T \mathbf{W}^*\right)\mathbf{V}$$

donde el superindice ^{T} denota transposición. El vector de operadores $\mathbf{V}$ sera un operador vectorial si

$$U_{\vec{\alpha}}\mathbf{V}U^*_{\vec{\alpha}} = \mathbf{D}(-\vec{\alpha})\mathbf{V} ,$$

donde la matriz $\mathbf{D}(\vec{\alpha})$ denota la matriz asociada con la rotación en $\mathbb{R}^3$ (o bien $\mathbb{C}^3$) en la base cartesiana (vea el Capítulo correspondiente) en la cual

$$\widetilde{S}_3 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \widetilde{S}_1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \widetilde{S}_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ahora $\mathbf{D}(\vec{\alpha})$ es real y ortogonal por lo cual $\mathbf{D}(-\vec{\alpha}) = \mathbf{D}(\vec{\alpha})^T$. Por lo tanto,

$$\mathbf{W}\left(\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})\right)^T \mathbf{W}^* = \mathbf{D}(\vec{\alpha})^T ,$$

es la condición sobre $\mathbf{W}$ para que $\mathbf{V} = \mathbf{W}\mathbf{T}^{(1)}$ sea un operador vectorial. Esta condición es por transposición equivalente a

$$((\mathbf{W})^*)^T\mathbf{D}^{(s)}(\vec{\alpha})\mathbf{W}^T = \mathbf{D}(\vec{\alpha}) .$$

Calculando $\mathbf{W}$ mediante diagonalización de $\mathbf{S}_3$ se obtiene

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Poniendo

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}T^{(1)} ,$$

o sea

$$V_1 = (T^{(1)}_{-1} - T^{(1)}_1)/\sqrt{2} , \quad V_2 = i(T^{(1)}_1 + T^{(1)}_{-1})/\sqrt{2} , \quad V_3 = T^{(1)}_0 ,$$

se concluye que

$$U^*_{\vec{\alpha}}\mathbf{V}U_{\vec{\alpha}} = D(\vec{\alpha})\mathbf{V}$$

es un operador vectorial.

Volvemos ahora a la teoría que genera la ecuación definitoria de transformación ante rotaciones. (10.14) es equivalente a[4]:

(10.16)
$$[J_3, T^{(s)}_k] = \hbar k\, T^{(s)}_k ,$$

(10.17)
$$[J_\pm, T^{(s)}_k] = \hbar\sqrt{s(s+1) - k(k \pm 1)}\, T^{(s)}_{k\pm1} .$$

De manera análoga –posponemos la demostración hasta el final– a la que deducimos la propiedades de los elementos de matriz de un operador escalar, o vectorial, se obtiene el siguiente resultado conocido como Teorema de Wigner-Eckart: *Los elementos de matriz de*

[4]¡haga este ejecicio!

cualquier componente esférica de un operador tensorial irreducible son proporcionales a un coeficiente de Clebsch-Gordan:

$$\boxed{\langle \psi_{j,m;\mu}, T_k^{(s)} \psi_{j',m';\nu} \rangle = \alpha(j';\nu|j;\mu)\, \langle \psi_{j',m'} \otimes \psi_{s,k}, \psi_{j,m} \rangle} \ ,$$

donde la constante $\alpha(j';\nu|j;\mu)$ no dependede m, m'. El cálculo de los elementos de matriz se reduce entonces a la suma de dos momentos angulares de magnitud j' y s y al cálculo de la constante $\alpha(j';\nu|j,\mu)$. En particular, el elemento de matriz *puede ser no nulo solamente si*:

$$\boxed{m' + k = m \text{ y } |\ j' - s \ | \leq \ j \ \leq \ s + j'} \ .$$

Este resultado es extremadamente útil y veremos como nos facilitará la vida en innumerables ocasiones.

Otro resultado útil es el siguiente:

Si $M_k^{(s_1)}$, $k = -s_1, -s_1+1, \cdots, s_1$ son las componentes esféricas de un operador tensorial irreducible de rango s_1 y $N_p^{(s_2)}$, $p = -s_2, -s_2+1, \cdots, s_2$ aquellas de un operador tensorial irreducible de rango s_2 actuando sobre el mismo espacio y con respecto al mismo momento angular $\mathbf{J}$, entonces para cada $s \in \{s_1+s_2, s_1+s_2-1, \cdots, |s_1-s_2|\}$ los $2s+1$ operadores

$$T_m^{(s)} = \sum_{m_1=-s_1}^{s_1} \ \sum_{m_2=-s_2\,,\, m_1+m_2=m}^{s_2} \langle \psi_{s_1,m_1} \otimes \psi_{s_2,m_2}, \psi_{s,m} \rangle M_{m_1}^{(s_1)} N_{m_2}^{(s_2)} \ , \quad m = -s, -s+1, \cdots, s \ ,$$

son las componentes esféricas de un operador tensorial irreducible de rango s con respecto a $\mathbf{J}$. La demostración de esto es inmediata y la dejamos para un ejercicio.

10.3.4. Operadores vectoriales

Si $T_m^{(1)}$, $m = \pm, 0$ son las componentes esféricas de un operador tensorial esférico irreducible de rango 1 entonces,

$$T_1 = (T_-^{(1)} - T_+^{(1)})/\sqrt{2} \ , \quad T_2 = i(T_-^{(1)} + T_+^{(1)})/\sqrt{2} \ , \quad T_3 = T_0^{(1)} \ ,$$

son las componentes (cartesianas) de un operador vectorial.

Considere dos operadores vectoriales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ con respecto al mismo momento angular $\mathbf{J}$, i.e.,

$$[J_j, A_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} A_\ell \ , \quad [J_j, B_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} B_\ell \ , \quad j,k \in \{1,2,3\} \ .$$

Entonces, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es un operador escalar pues

$$[J_j, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = \sum_{k=1}^{3} [J_j, A_k B_k] = \sum_{k=1}^{3} A_k [J_j, B_k] + [J_j, A_k] B_k = i\hbar \sum_{k,\ell=1}^{3} (\epsilon_{j,k,\ell} A_k B_\ell + \epsilon_{j,k,\ell} A_\ell B_k)$$

$$= i\hbar \sum_{k,\ell=1}^{3} (\epsilon_{j,k,\ell} A_k B_\ell + \epsilon_{j,\ell,k} A_k B_\ell) = 0 \ .$$

Vimos que si $\mathbf{V}$ es un operador vectorial con respecto al momento angular $\mathbf{J}$ y que además conmuta con $\mathbf{J}^2$, entonces

$$\langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{V}\psi_{j',m';\nu(j)} \rangle = \delta_{j,j'} \alpha(\mathfrak{E}_j; \mu(j), \nu(j)) \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{J}\psi_{j,m';\nu(j)} \rangle \ ,$$

donde la constante $\alpha((\mathfrak{E}_j; \mu(j), \nu(j))$ depende solamente del subespacio $\mathfrak{E}_j$ y de los índices de multiplicidad. Calculando directamente el valor esperado del operador $\mathbf{J} \cdot \mathbf{V}$ que es escalar con respecto a $\mathbf{J}$, obtenemos

$$\hbar\alpha(\mathfrak{E}_j; \mu(j), \nu(j)) j(j+1) = \langle \psi_{j,m;\mu(j)}, \mathbf{J} \cdot \mathbf{V}\psi_{j,m;\nu(j)} \rangle \ .$$

Considere nuevamente dos operadores vectoriales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ con respecto al mismo momento angular $\mathbf{J}$; entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un operador vectorial; pues

$$[J_j, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k] = \sum_{\ell,m=1}^{3} \epsilon_{\ell,m,k} [J_j, A_\ell B_m] = \sum_{\ell,m=1}^{3} \epsilon_{\ell,m,k} \left(A_\ell [J_j, B_m] + [J_j, A_\ell] B_m \right)$$

$$= i\hbar \sum_{\ell,m,n=1}^{3} \epsilon_{\ell,m,k} \left(\epsilon_{j,m,n} A_\ell B_n + \epsilon_{j,\ell,n} A_n B_m \right) = i\hbar \sum_{\ell,n=1}^{3} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{\ell,m,k} \epsilon_{j,m,n} + \epsilon_{m,n,k} \epsilon_{j,m\ell} \right)}_{=\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{j,k,m} \epsilon_{\ell,n,m}} A_\ell B_n$$

$$= i\hbar \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{j,k,m} \underbrace{\left(\sum_{\ell,n=1}^{3} \epsilon_{\ell,n,m} A_\ell B_n \right)}_{=(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_m} = i\hbar \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{j,k,m} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_m \ .$$

Si $A_m^{(1)}$ y $B_m^{(1)}$ son las componentes esféricas de estos operadores, i.e.,

$$A_1^{(1)} = -(A_1 + iA_2)/\sqrt{2} \ , \quad A_0^{(1)} = A_3 \ , \quad A_{-1}^{(1)} = (A_1 - iA_2)/\sqrt{2} \ ,$$

y similarmente para $\mathbf{B}$, entonces por el resultado general

$$T_m^{(2)} = \sum_{m_1, m_2 = -1 \ , \ m_1 + m_2 = m}^{1} \langle \psi_{1,m_1} \otimes \psi_{1,m_2} | \psi_{2,m} \rangle A_{m_1}^{(1)} B_{m_2}^{(1)}$$

son las componentes esféricas de un operador tensorial irreducible de rango 2. Con los coeficientes de Clebsch-Gordan obtenemos

$$T_2^{(2)} = A_1^{(1)} B_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left(A_1 B_1 - A_2 B_2 + iA_1 B_2 + iA_2 B_1 \right) \ ,$$

$$T_{-2}^{(2)} = A_{-1}^{(1)}B_{-1}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(A_1B_1 - A_2B_2 - iA_1B_2 - iA_2B_1\right) \ ,$$

$$T_1^{(2)} = (A_0^{(1)}B_1^{(1)} + A_1^{(1)}B_0^{(1)})/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(-A_3B_1 - A_1B_3 - iA_3B_2 - iA_2B_3\right) \ ,$$

$$T_{-1}^{(2)} = (A_0^{(1)}B_{-1}^{(1)} + A_{-1}^{(1)}B_0^{(1)})/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(A_3B_1 + A_1B_3 - iA_3B_2 - iA_2B_3\right) \ ,$$

$$T_0^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}A_0^{(1)}B_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}}(A_1^{(1)}B_{-1}^{(1)} + A_{-1}^{(1)}B_1^{(1)}) = \sqrt{\frac{2}{3}}A_3B_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(A_1B_1 + A_2B_2\right) \ .$$

Con las componentes cartesianas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se forman 9 productos A_jB_k y estos se pueden expresar como combinaciones lineales de las componentes de 3 operadores tensoriales irreducibles: el operador escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, las tres componentes del operador vectorial $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ y las cinco componentes del operador irreducible $T^{(2)}$ de rango 2. Alternativamente, las componentes de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ pueden expresarse en términos de componentes esféricas.

$$A_1B_2 = \frac{i}{2}(T_{-2}^{(2)} - T_2^{(2)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3 \ , \quad A_2B_1 = \frac{i}{2}(T_{-2}^{(2)} - T_2^{(2)}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3 \ ,$$

$$A_1B_3 = \frac{1}{2}(T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2 \ , \quad A_3B_1 = \frac{1}{2}(T_{-1}^{(2)} - T_1^{(2)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2 \ ,$$

$$A_2B_3 = \frac{i}{2}(T_{-1}^{(2)} + T_1^{(2)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1 \ , \quad A_3B_2 = \frac{i}{2}(T_{-1}^{(2)} + T_1^{(2)}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1 \ ,$$

$$A_1B_1 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{2}(T_{-2}^{(2)} + T_2^{(2)}) - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0^{(2)} \ ,$$

$$A_2B_2 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \frac{1}{2}(T_{-2}^{(2)} + T_2^{(2)}) - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0^{(2)} \ ,$$

$$A_3B_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \frac{2}{\sqrt{6}}T_0^{(2)} \ .$$

Ejemplo: Sumamos dos spins 1/2 (i.e. $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$) para obtener un spin 1 y un spin 0 : $\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathbf{S}$ al operador correspondiente al spin $s=1$ que actua sobre $\mathbb{C}^3$ y escribimos $\{e_\nu \ : \ \nu = \pm, 0\}$ para la base de $\mathbb{C}^3$ tal que:

$$S_3e_\nu = \hbar\nu e_\nu \, ; \quad S_\pm e_\nu = \hbar\sqrt{2-\nu(\nu\pm 1)}\, e_{\nu\pm 1} \, .$$

Escribimos $\phi\oplus z$, $\phi\in\mathbb{C}^3$, $z\in\mathbb{C}$ para el elemento general de $\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}$. Entonces, [5] los operadores

$$T_\pm^{(1)}\,(\phi\oplus z) = (\mp S_\mp\phi + \alpha z e_\mp) \oplus (-\beta\langle e_\pm, \phi\rangle) \ ,$$

$$T_0^{(1)}\,(\phi\oplus z) = (S_3\phi - \alpha z e_o) \oplus (\beta\langle e_o, \phi\rangle) \ ;$$

$$\mathbf{J}\,(\phi\oplus z) = (\mathbf{S}\phi)\oplus 0 \ ;$$

[5] ¡ verifiquelo!

para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, son las componentes de un operador tensorial esférico irreducible de rango 2 con respecto a las rotaciones inducidas por el spin total $\mathbf{J} = \mathbf{S} \oplus 0$. En forma matricial estos operadores toman la forma:

$$T_{\pm}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mp S_{\mp}/\sqrt{2} & \alpha|e_{\mp}\rangle \\ -\beta\langle e_{\pm}| & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$T_0^{(1)} = \begin{pmatrix} S_3 & -\alpha|e_o\rangle \\ \beta\langle e_o| & 0 \end{pmatrix} ;$$

Obviamente, ninguno de estos operadores conmuta con $\mathbf{J}^2$ a no ser que $\alpha = \beta = 0$. Además,

$$V_1 = \frac{1}{2}\left(T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} S_1 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|e_+\rangle - |e_-\rangle) \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\langle e_+| - \langle e_-|) & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$V_2 = \frac{-i}{2}\left(T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} S_2 & \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}}(|e_+\rangle + |e_-\rangle) \\ \frac{i\beta}{\sqrt{2}}(\langle e_-| + \langle e_+|)^* & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$V_3 = T_0^{(1)} = \begin{pmatrix} S_3 & -\alpha|e_o\rangle \\ \beta\langle e_o| & 0 \end{pmatrix} ,$$

son las componentes de un operador vectorial que no conmuta con $\vec{J}^2$ salvo cuando $\alpha = \beta = 0$. Observe que $V_j = V_j^*$ si y solo si $\beta = \overline{\alpha}$.

Demostración del Teorema de Wigner-Eckart:

El primer paso consiste en cerciorarse que si no se tiene $|j' - s| \leq j \leq j' + s$ entonces el elemento de matriz es nulo.

En el segundo paso, suponemos entonces que tanto$j$ como j' son fijos y se tiene $|j' - s| \leq j \leq j' + s$. De (10.17) obtenemos con aplicación de (10.1)

$$\begin{aligned} \sqrt{s(s+1) - k(k \pm 1)}\langle \psi_{j,m;\mu}, T_{k\pm1}^{(s)}\psi_{j',m',\mu'}\rangle &= \langle J_{\mp}\psi_{j,m;\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m',\mu'}\rangle \\ &-\sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \pm 1)}\langle \psi_{j,m,\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m'\pm1;\mu'}\rangle \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}\langle \psi_{j,m\mp1,\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m';\mu'}\rangle \\ &-\sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \pm 1)}\langle \psi_{j,m,\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m'\pm1;\mu'}\rangle , \end{aligned}$$

vale decir

$$\begin{aligned} &\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\langle \psi_{j,m\pm1,\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m';\mu'}\rangle \\ &= \sqrt{s(s+1) - k(k \mp 1)}\langle \psi_{j,m;\mu}, T_{k\mp1}^{(s)}\psi_{j',m',\mu'}\rangle \\ &+\sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \mp 1)}\langle \psi_{j,m,\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m'\mp1;\mu'}\rangle . \end{aligned}$$

Esta última relación puede compararse directamente con (10.6) con lo cual el conjunto formado por los números $\langle \psi_{j,m;\mu}, T_k^{(s)}\psi_{j',m';\mu'}\rangle$ obtenido cuando j, j, m, m' y k recorren

$$\{|j' - s| \leq j \leq j' + s\ ,\ \ m \in \{-j, \cdots, j\}\ ,\ \ m' \in \{-j', \cdots, j'\}\ ,\ \ k \in \{-s, \cdots, s\}\}$$

satisface las mismas relaciones de recurrencia que los coeficientes de Clebsch-Gordan, o sea los números $\langle \psi_{j',m'} \otimes \psi_{s,k}, \psi_{j,m} \rangle$ obtenidos recorriendo el mismo conjunto. Se sigue entonces que a j, j', μ y μ' fijos, los números mencionados deben ser proporcionales entre si.