Capítulo 11

Partículas en campos electromagnéticos

Consideramos partículas en campos electromagnéticos. La descripción que sigue es semiclásica; el campo electromagnético debería tratarse cuanticamente. Esta aproximación resulta razonable cuando las magnitudes de los campos son mucho mayores que los campos característicos generados por las partículas.

11.1. El campo electromagnético clásico. Calibración.

El campo electromagnético se describe por medio de los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en vacio

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0\ ,\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0\ ,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\epsilon_o}\rho_e\ ,\quad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{1}{c^2\epsilon_o}\mathbf{J}_e\ ,$$

donde trabajamos en el sistema SI, c es la velocidad de la luz en vacio, ϵ_o es la constante de permisividad del vacio $\epsilon_o=\frac{10^7}{4\pi c^2}C^2N^{-1}s^{-2}$, $\rho_e(\mathbf{r},t)$ es la densidad de carga y $\mathbf{J}_e(\mathbf{r},t)$ la densidad de corriente; se tiene la ecuación de continuidad $\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_e=0$. Localmente los campos pueden expresarse en términos de un potencial escalar $\phi(\mathbf{r},t)$ y un potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$,

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi\ ,\quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{11.1}$$

que no están univocamente determinados. Si se realiza una transformación de calibre

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\ ,\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi\ , \tag{11.2}$$

por medio de una función (de calibre) arbitraria $\chi(\mathbf{r},t)$, entonces los campos eléctrico $\mathbf{E}'$ y magnético $\mathbf{B}'$ que se obtienen de (11.1) son idénticos a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. Siempre es posible elegir el par $(\phi, \mathbf{A})$ de potenciales de manera tal que se satisface la condición de Lorentz:

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \; .$$

Y, en tal caso, tanto $\mathbf{A}$ como ϕ satisfacen una ecuación de onda: $(\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2) - c^2 \Delta \mathbf{A} = \epsilon_o^{-1} \mathbf{J}_e$; $c^{-2}(\partial^2 \phi/\partial t^2) - \Delta\phi = \epsilon_o^{-1} \rho_e$. E.g., en el caso en el cual $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son constantes (independientes de posición y tiempo), $\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2$.

La ecuación de movimiento de una partícula de carga q y masa m es entonces

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \; ,$$

para la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, y es independiente del calibre. El Langrangiano es

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - q \left(\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right) \; ,$$

y el momento conjugado $\mathbf{p}$ es entonces

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} = m v_j + q A_j \; , \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \; .$$

Por lo tanto el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \; .$$

Al hacer una transformación de calibre (11.2) con la función χ, se obtiene

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \; , \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} \; , \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} + q\nabla\chi \; , \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} - q\frac{\partial \chi}{\partial t} \; . \tag{11.3}$$

Dado un campo electromagnético $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ y alguna elección de calibre para $(\phi, \mathbf{A})$, una función $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \phi, \mathbf{A}; t)$ será invariante ante calibración si cualquiera sea la transformación (11.2) se tiene

$$F(\mathbf{r}', \mathbf{p}', \phi', \mathbf{A}'; t) = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \phi, \mathbf{A}; t) \; .$$

En particular, si F no depende de ϕ y la dependencia en $\mathbf{p}$ y en $\mathbf{A}$ es via $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ ($= m\mathbf{v}$), o sea $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \phi, \mathbf{A}; t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p} - q\mathbf{A}; t)$, entonces F es invariante. El Hamiltoniano no es invariante ante calibración salvo cuando no depende del potencial escalar ϕ.

11.2. Cuantización.

Una vez elegido el calibre, i.e., el par $(\phi, \mathbf{A})$, la cuantización no presenta problemas. Describimos a la partícula por una función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ y sabemos como cuantizar la posición y el momento. Luego, la cuantización de $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ es entonces $\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t) = -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)$, lo que conduce al Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_{\phi,\mathbf{A}} &= \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)^2 + q\phi(\widehat{\mathbf{r}}, t) \\ &= \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^{\,2} + q\phi(\widehat{\mathbf{r}}, t) - \frac{q}{2m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)\cdot\widehat{\mathbf{p}} - \frac{q}{2m}\widehat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t) + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)^2 \\ &= \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^{\,2} + q\phi(\widehat{\mathbf{r}}, t) - \frac{q}{m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)\cdot\widehat{\mathbf{p}} + i\frac{\hbar q}{2m}(\nabla\cdot\mathbf{A})(\widehat{\mathbf{r}}, t) + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)^2 \ . \end{aligned}$$

La ecuación de Schrödinger es

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

y la densidad de probabilidad local $\rho(t) = |\psi(t)|^2$ satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \ ,$$

donde la densidad de corriente de probabilidad es

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\overline{\psi(\mathbf{r}, t)}(\nabla\psi)(\mathbf{r}, t) - \overline{(\nabla\psi)(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{2iq}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t)\right) \ .$$

Todo esto por supuesto depende de la calibración elegida y hay que ver explicitamente como es esta dependencia. Si se realiza una transformación de calibre (11.2) con la función χ y denotamos la correspondiente función de onda por ψ' debemos tener

$$\langle\psi, \widehat{\mathbf{r}}\psi\rangle = \langle\psi', \widehat{\mathbf{r}}\,'\psi'\rangle \ , \quad \langle\psi, \left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)\psi\rangle = \langle\psi', \left(\widehat{\mathbf{p}}\,' - q\mathbf{A}'(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)\psi'\rangle \ ,$$

ya que el par canónico $(\mathbf{r}, m\mathbf{v})$ es invariante ante calibraciones. Buscamos entonces, como de costumbre, implementar la transformación de calibre por medio de un operador unitario U_χ, i.e., $\psi' = U_\chi\psi$. Entonces, debemos tener,

$$\begin{aligned} U_\chi^*\,\widehat{\mathbf{r}}\,U_\chi &= \widehat{\mathbf{r}} \ , \\ U_\chi^*\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}'(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)U_\chi = U_\chi^*\left(\widehat{\mathbf{p}}\,' - q\mathbf{A}'(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)U_\chi &= \widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t) \ , \end{aligned}$$

donde usamos que $\widehat{\mathbf{p}}\,' = -i\hbar\nabla\,' = -i\hbar\nabla = \widehat{\mathbf{p}}$. Ya que U_χ conmuta con $\widehat{\mathbf{r}}$ deducimos que $U_\chi = \exp\left(iG_\chi(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)$ para alguna función a valores reales $G_\chi(\mathbf{r}, t)$. La segunda igualdad da entonces

$$U_\chi^*\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t) - q(\nabla\chi)(\widehat{\mathbf{r}}, t)\right)U_\chi = \widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}, t) \ ;$$

o sea

$$U_\chi^*\,\widehat{\mathbf{p}}\,U_\chi = \widehat{\mathbf{p}} + q(\nabla\chi)(\widehat{\mathbf{r}}, t) \ .$$

Ya que $\nabla U_\chi = i(\nabla G_\chi)U_\chi$ obtenemos

$$\hbar\nabla G_\chi = q\nabla\chi \ ,$$

de donde $G_\chi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{\hbar}\chi(\mathbf{r},t) + f(t)$ y eligiendo $f = 0$,

$$U_\chi = \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi(\widehat{\mathbf{r}},t)\right) .$$

Se tienen entonces las leyes de transformación

$$U_\chi\, \widehat{\mathbf{r}}\, U_\chi^* = \widehat{\mathbf{r}} \ , \ \ U_\chi\, \widehat{\mathbf{p}}\, U_\chi^* = \widehat{\mathbf{p}} - q(\nabla\chi)(\widehat{\mathbf{r}},t) \ , \ \ U_\chi H_{\phi,\mathbf{A}} U_\chi^* = H_{\phi',\mathbf{A}'} + q\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)(\widehat{\mathbf{r}},t) \ .$$

Observe que el momento angular no es invariante ante calibraciones

$$U_\chi \mathbf{L} U_\chi^* = \mathbf{L} - q\,(\widehat{\mathbf{r}} \times (\nabla\chi)(\widehat{\mathbf{r}},t)) \ .$$

La ecuación de Schrödinger debe resultar invariante ante calibraciones y, en efecto,

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = i\hbar\left(\frac{\partial U_\chi}{\partial t}\psi + U_\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = -q\frac{\partial\chi}{\partial t}U_\chi\psi + U_\chi H_{\phi,\mathbf{A}}\ \psi = -q\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi' + U_\chi H_{\phi,\mathbf{A}} U_\chi^*\psi'$$

$$= -q\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi' + H_{\phi',\mathbf{A}'}\psi' + q\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi' = H_{\phi',\mathbf{A}'}\psi' \ .$$

Una función $F(\mathbf{r},\mathbf{p},\phi,\mathbf{A},t)$ dará al cuantizar una observable invariante ante calibraciones si

$$U_\chi F(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{p}},\phi(\widehat{\mathbf{r}},t),\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t),t)U_\chi^* = F(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{p}},\phi(\widehat{\mathbf{r}},t) - (\partial\chi/\partial t)(\widehat{\mathbf{r}},t),\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t) + (\nabla\chi)(\widehat{\mathbf{r}},t),t) \ .$$

En el caso de un campo electromagnético independiente del tiempo, siempre hay una calibración independiente del tiempo y resulta poco natural elegir un par $(\phi,\mathbf{A})$ que dependa del tiempo. Si nos restringimos a transformaciones de calibre con funciones χ independientes del tiempo, entonces el Hamiltoniano resulta independiente del tiempo y además invariante ante estas transformaciones de calibre independientes del tiempo. En este caso y sentido, el hamiltoniano puede interpretarse como magnitud física invariante y asociarse con la energía de la partícula.

11.2.1. Partícula cargada en un campo magnético constante.

Tomemos el caso de un campo magnético constante $\mathbf{B} = (0,0,B)$ (con $B > 0$). Entonces con $\phi \equiv 0$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0,Bx,0)$, se tiene $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ y además, $\nabla\mathbf{A} = 0$ con lo cual el Hamiltoniano en esta calibración es

$$H = \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^{\,2} - \frac{q}{m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}})\cdot\widehat{\mathbf{p}} + \frac{q^2}{2m}B^2\widehat{x}^2 = \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^{\,2} - \frac{qB}{m}\widehat{x}\widehat{p}_y + \frac{q^2B^2}{2m}\widehat{x}^2$$

$$= \frac{1}{2m}\widehat{p}_z^2 + \frac{1}{2m}\widehat{p}_x^2 + \frac{q^2B^2}{2m}\left(\widehat{x} - \frac{1}{qB}\widehat{p}_y\right)^2 \ .$$

El Hamiltoniano conmuta con $\widehat{p}_z$ y con $\widehat{p}_y$.

Analicemos primeramente la dinámica del sistema[1]; esto nos permitirá ilustrar la llamada representación de interacción. También escribiremos todo, pedantemente, en términos de productos tensoriales. Tenemos, con $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ que

$$H = \underbrace{\frac{1}{2m}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \widehat{p}^2)}_{=H_o} + \frac{1}{2m}(\widehat{p}^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(\widehat{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{qB} \mathbf{1} \otimes \widehat{p} \otimes \mathbf{1} \right)^2 .$$

Si ψ_t es el estado de sistema al tiempo t, entonces en la representación de interacción el estado es $\phi_t = e^{iH_o t/\hbar}\psi_t$ que satisface

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = e^{iH_o t/\hbar} H_L e^{-iH_o t/\hbar} \phi ,$$

donde

$$\begin{aligned} H_L = H - H_o &= \frac{1}{2m}(\widehat{p}^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(\widehat{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{qB} \mathbf{1} \otimes \widehat{p} \otimes \mathbf{1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m}\widehat{p}_x^2 + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(\widehat{x} - \frac{1}{qB}\widehat{p}_y \right)^2 . \end{aligned}$$

Ahora, $[H_o, H_L] = 0$ y en nuestro caso el Hamiltoniano $H_L(t) = e^{iH_o t/\hbar} H_L e^{-iH_o t/\hbar}$ en la representacion de interacción es independiente del tiempo; con lo cual

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = H_L \phi .$$

Hemos separado entonces la energía de movimiento en dirección z; conviene reescribir

$$H_L = \mathbf{1} \otimes K_L \ , \quad K_L = \frac{1}{2m}(\widehat{p}^2 \otimes \mathbf{1}) + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(\widehat{x} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{qB} \mathbf{1} \otimes \widehat{p} \right)^2 ;$$

K_L actua en $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ o sea sobre los dos grados de libertad no triviales asociados a x e y. Considere el operador unitario

$$U(\lambda) = e^{-i\lambda(\widehat{p}\otimes\widehat{p})/\hbar} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Obviamente, $U(\lambda)^*(\widehat{p} \otimes \mathbf{1})U(\lambda) = (\widehat{p} \otimes \mathbf{1})$; pero

$$U(\lambda)^*(\widehat{x} \otimes \mathbf{1})U(\lambda) = (\widehat{x} \otimes \mathbf{1}) + \lambda(\mathbf{1} \otimes \widehat{p}) ;$$

como puede verificarse asi: poniendo $G(\lambda) = U(\lambda)^*(\widehat{x} \otimes \mathbf{1})U(\lambda)$ y derivando con respecto a λ se obtiene

$$\frac{dG}{d\lambda} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{p} \otimes \widehat{p}, G(\lambda)] = \frac{i}{\hbar} U(\lambda)^* [\widehat{p} \otimes \widehat{p}, \widehat{x} \otimes \mathbf{1}] U(\lambda)$$

[1] Recordemos brevemente la dinámica clásica. La fuerza de Lorentz es $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ y por ende $(d\mathbf{v}/dt) = -\frac{q}{m}(\mathbf{B} \times \mathbf{v})$ implica que $|\mathbf{v}|$ es constante y que $\mathbf{v}$ precesa alrededor de $\mathbf{B}$ con frecuenci angular constante $\omega = |q||\mathbf{B}|/m$ (frecuencia de ciclotrón) con sentido determinado por el signo de la carga. La trayectoria es $\mathbf{r}(t) = (x(0) + \omega^{-1}v_y(0) + \omega^{-1}v_\perp(0)\sin(\omega t + \alpha), y(0) - \omega^{-1}v_x(0) + \omega^{-1}v_\perp(0)\cos(\omega t + \alpha), z(0) + v_z(0)t)$; o sea una espiral en la superficie de un cilindro de radio $\omega^{-1}v_\perp(0) = \omega^{-1}\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}$ con eje $(x(0) + \omega^{-1}v_y(0), y(0) - \omega^{-1}v_x(0), z(0) + v_z(0)t)$; la fase está determinada por $v_\perp(0)e^{i\alpha} = v_x(0) - iv_y(0)$.

$$= \frac{i}{\hbar} U(\lambda)^* ([\widehat{p}, \widehat{x}] \otimes \widehat{p}) U(\lambda) = U(\lambda)^* (\mathbf{1} \otimes \widehat{p}) U(\lambda) = \mathbf{1} \otimes \widehat{p}$$

que es la derivada del miembro izquierdo de la expresión. Por lo tanto, $\widehat{x} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{qB} \mathbf{1} \otimes \widehat{p} = U(1/qB) \widehat{x} \otimes \mathbf{1} U(-1/qB)$ y luego

$$\begin{aligned} K_L &= \frac{1}{2m} (\widehat{p}^2 \otimes \mathbf{1}) + \frac{q^2 B^2}{2m} \left(U(1/qB)(\widehat{x} \otimes \mathbf{1}) U(-1/qB) \right)^2 \\ &= U(1/qB) \left(\frac{1}{2m} (\widehat{p}^2 \otimes \mathbf{1}) + \frac{q^2 B^2}{2m} \widehat{x}^2 \otimes \mathbf{1} \right) U(-1/qB) \\ &= U(1/qB) \left(\left(\frac{1}{2m} \widehat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \widehat{x}^2 \right) \otimes \mathbf{1} \right) U(-1/qB) \; . \end{aligned}$$

Esto indica que K_L es unitariamente equivalente a un oscilador armónico unidimensional (!) H_{osc} de frecuencia angular

$$\omega = |q| B/m$$

la frecuencia de ciclotrón clásica. Por lo tanto, siendo el espectro invariante ante transformaciones unitarias aunque sin preservar multiplicidades, el espectro de K_L es $\{\hbar\omega(n + \frac{1}{2}) : \; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ y cada autovalor es de multiplicidad infinita. También, ya que $(\widehat{p} \otimes \widehat{p})$ conmuta con H_o,

$$H = (\mathbf{1} \otimes U(1/qB))(H_o + \mathbf{1} \otimes H_{osc} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes U(-1/qB))$$

y el espectro de H es entonces $\{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) : k \in \mathbb{R} \; , \;\; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ de multiplicidad infinita.

Una versión alternativa del resultado –sin pasar a la representación de interacción– es: $\Phi_t = (\mathbf{1} \otimes U(1/qB))\psi_t$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\Phi}{dt} = (H_o + \mathbf{1} \otimes H_{osc} \otimes \mathbf{1})\Phi \; , \;\; \Phi(0) = (\mathbf{1} \otimes U(1/qB))\psi_0 \; .$$

Los valores espectrales $E(k, n) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ que no son autovalores debido a la parte continua $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ asociada al movimiento libre en dirección z se llaman niveles de Landau.

El lector debe resolver este mismo problema en una calibración que trate a las dos direcciones ortogonales al campo de manera más simétrica; por ejemplo $\phi \equiv 0$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$.

11.3. Incorporación del spin. Ecuación de Pauli.

Ya que el spin de una partícula está asociado a un momento magnético intrinseco, uno espera que en presencia de un campo electromagnético el hamiltoniano incorpore un término de interacción proporcional a $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$.

En el caso particular de un spin 1/2, la incoporación de la interacción entre el spin y el campo se puede racionalizar parcialmente usando acoplamiento mínimo y el siguiente truco infame. Para cualquier vector (cuyas componentes pueden ser a su vez operadores siempre que estas conmuten entre si) $\mathbf{a}$ se tiene (8.5), $(\mathbf{a}\cdot\sigma)^2 = \mathbf{a}^2$, con lo cual para un spinor $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^2$,

$$\widehat{\mathbf{p}}^2 \otimes \mathbf{1} = \left[(\widehat{\mathbf{p}}\otimes\mathbf{1})\cdot(\mathbf{1}\otimes\sigma)\right]^2 ,$$

u obviando la notación tensorial $\widehat{p}^2 = (\widehat{\mathbf{p}}\cdot\sigma)^2$; aplicando acoplamiento mínimo, o sea reemplazando $\widehat{\mathbf{p}}$ por $\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t)$, al Hamiltoniano $(1/2m)\widehat{\mathbf{p}}^2 + V(\widehat{\mathbf{r}})$, obtenemos

$$H = \frac{1}{2m}\left((\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t))\cdot\sigma\right)^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + \phi(\widehat{\mathbf{r}},t) .$$

Ahora, con (8.5),

$$\left((\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t))\cdot\sigma\right)^2 = (\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t))^2 + i\left([(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t))\times(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t))]\right)\cdot\sigma ;$$

y

$$i\left([(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})\times(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})]\right)\cdot\sigma = i\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}(\widehat{p}_j - qA_j)(\widehat{p}_k - qA_k)\sigma_\ell$$

$$= i\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\left\{\widehat{p}_j\widehat{p}_k + q^2A_jA_k - q(\widehat{p}_jA_k + A_j\widehat{p}_k)\right\}\sigma_\ell$$

$$= i\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\left\{\widehat{p}_j\widehat{p}_k + q^2A_jA_k - q(A_k\widehat{p}_j + A_j\widehat{p}_k)\right\}\sigma_\ell - \hbar q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}(\partial A_k/\partial r_j))\sigma_\ell ;$$

para la primera suma tenemos

$$\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\left\{\widehat{p}_j\widehat{p}_k + q^2A_jA_k - q(A_k\widehat{p}_j + A_j\widehat{p}_k)\right\}\sigma_\ell$$

$$= \widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}} + q^2\widehat{\mathbf{A}}\wedge\widehat{\mathbf{A}} - q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\left\{A_k\widehat{p}_j + A_j\widehat{p}_k)\right\}\sigma_\ell$$

$$= -q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{k,j,\ell}A_j\widehat{p}_k\sigma_\ell - q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}A_j\widehat{p}_k)\sigma_\ell$$

$$= -q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}(-\epsilon_{j,k,\ell})A_j\widehat{p}_k\sigma_\ell - q\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}A_j\widehat{p}_k)\sigma_\ell = 0 ,$$

y para la segunda tenemos

$$\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}(\partial A_k/\partial r_j))\sigma_\ell = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\sigma = \hbar\mathbf{B}\cdot\sigma ;$$

con lo cual

$$H = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t)\right)^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + \phi(\widehat{\mathbf{r}},t) - \frac{\hbar q}{2m}\sigma\cdot\mathbf{B}(\widehat{\mathbf{r}},t)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t)\right)^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + \phi(\widehat{\mathbf{r}},t) - \frac{q}{m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\widehat{\mathbf{r}},t)\ .$$

Este es el Hamiltoniano (fenomenológico) de Pauli para una partícula de spin 1/2 en un campo electromagnético. Observese que toda la dependencia en $(\phi, \mathbf{A})$ se pone de manifiesto exactamente de la misma manera que en ausencia del spin; la parte que involucra al spin depende de $\mathbf{B}$ y es por ende invariante ante transformaciones de calibre.

Para spins generales $\mathbf{S}$ de magnitud s se escribe en total analogía el Hamiltoniano fenomenológico

$$H = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}},t)\right)^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + \phi(\widehat{\mathbf{r}},t) - \gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\widehat{\mathbf{r}},t)\ ,$$

donde el parámetro γ es característico de la partícula. Es conveniente escribir

$$\hbar\gamma = g\frac{\hbar q}{2m}\ ,$$

donde el *magnetón*

$$\mu = \frac{\hbar q}{2m}\ ,$$

de dimensión (energía/densidad de flujo magnético)[2] , se obtiene a partir de la carga q y de la masa m de la partícula; y donde la *razón o factor giromagnético* g es una constante adimensional característica de la partícula en cuestión. Observese que la frecuencia angular clásica de Larmor para la precesión de una partícula cargada en un campo magnético constante de magnitud B es precisamente $\mu B/\hbar$.

Escribamos el Hamiltoniano en el caso de un campo electromagnético estático y constante en la calibración $\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{A} = -(\mathbf{r}\times\mathbf{B})/2$, que satisface la condición de Lorentz. Aquí se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\widehat{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})\cdot\widehat{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\widehat{r}_j B_k \widehat{p}_\ell$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,\ell,k}\widehat{r}_j\widehat{p}_\ell B_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\widehat{\mathbf{r}}\times\widehat{\mathbf{p}})_k B_k = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{r}}\times\widehat{\mathbf{p}})\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{B}\ ;$$

con lo cual

$$H = \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^2 - \frac{q}{2m}\widehat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{B} + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}})^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + q\phi(\widehat{\mathbf{r}}) - \gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^2 - \frac{\mu}{\hbar}(\widehat{\mathbf{L}} + g\mathbf{S})\cdot\mathbf{B} + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}})^2 + V(\widehat{\mathbf{r}}) + q\phi(\widehat{\mathbf{r}})\ .$$

$$= \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^2 - \frac{\mu}{\hbar}(\widehat{\mathbf{L}} + g\mathbf{S})\cdot\mathbf{B} + \frac{q^2}{8m}(\widehat{\mathbf{r}}^2\mathbf{B}^2 - (\widehat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{B})^2) + V(\widehat{\mathbf{r}}) - q\widehat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E}\ .$$

Aqui vemos explicitamente que el magnetón μ conecta el momento angular orbital $\mathbf{L}$ de una partícula cargada con el momento magnético asociado.

[2]En el sistema SI que estamos usando, $[\mu] = J.T^{-1} = Am^2$.

El pasaje de una sola partícula a varias no presenta mayores problemas. El Hamiltoniano fenomenológico para N partículas de masas m_j y cargas q_j será

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j}(\widehat{\mathbf{p}}_j - q_j\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{r}}_j, t))^2 + \sum_{j=1}^{N} q_j\phi(\widehat{\mathbf{r}}_j, t) + V(\widehat{\mathbf{r}}_1, \widehat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{r}}_N) - \frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} g_j\mu_j\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{r}}, t) \ .$$

En el caso estático y constante con $\phi = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{A} = -(\mathbf{r}\times\mathbf{B})/2$, se obtiene

$$H = \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_j}\widehat{\mathbf{p}}_j^2 - \mu_j(\widehat{\mathbf{L}}_j + g_j\mathbf{S}_j)\cdot\mathbf{B} - q_j\widehat{\mathbf{r}}_j\cdot\mathbf{E} + \frac{q_j^2}{8m_j}(\widehat{\mathbf{r}}_j^2\mathbf{B}^2 - (\widehat{\mathbf{r}}_j\cdot\mathbf{B})^2)\right\}$$

$$+V(\widehat{\mathbf{r}}_1, \widehat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{r}}_N) \ .$$

Este último Hamiltoniano es la base de la discusión de los importantes efectos Stark, respectivamente Zeeman, en campos eléctricos, respectivamente magnéticos, estáticos y constantes. Como veremos estos Hamiltonianos fenomenológicos desprecian la interacción entre el momento magnético intrinseco asociado con el spin y el momento magnético orbital que están acoplados via $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$.

11.4. Efecto Aharanov-Bohm.

El efecto Aharanov-Bohm (19), ya discutido antes por (1949) se pone de manifiesto en la situación de la figura. A un interferometro de Young se le agrega un solenoide muy bien apantallado de modo que el campo magnético fuera del solenoide sea cero.

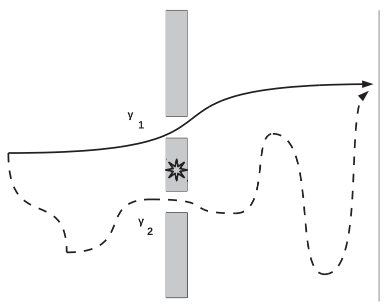

Figura 11.1: Un solenoide entre las dos rendijas de un interferometro.

Recordemos el conocido ejercicio de análisis vectorial: el potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{|\mathbf{a}\times\mathbf{r}|^2}\ \mathbf{a}\times\mathbf{r}\ ,\ \ \mathbf{a}\times\mathbf{r}\neq\mathbf{0}\ ,$$

produce un campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ que se anula identicamente salvo cuando $\mathbf{r} \propto \mathbf{a}$ (en cuyo caso es infinito). Además, si Σ es una superficie delimitada por una curva cerrada simple C se tiene, por el Teorema de Stokes, que el flujo de $\mathbf{B}$ por la superficie es igual a

$$\int_\Sigma \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\Sigma = \int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{A})(\mathbf{r}) \cdot d\Sigma = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(\mathbf{s})) \cdot d\mathbf{s} \, .$$

Si C no encierra ni corta a $\mathbf{a}$ la integral de linea da 0; si en cambio, C encierra a $\mathbf{a}$ y, respecto de $\mathbf{a}$, la orientación de C es positiva, se obtiene el flujo $2\pi\alpha$.

Tomemos como dado el potencial vector $\mathbf{A}$ independiente del tiempo de modo que el campo sea $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Aquí hay una libertad de calibración.
Si la rendija superior (la 1) está abierta y la inferior (la 2) cerrada entonces la función de onda para una partícula de carga q será

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{ i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right\} \; \Psi_1^{(0)}(\mathbf{r}, t)$$

donde la función de onda $\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ describe la situación a campo nulo (con 1 abierto y 2 cerrado) y el factor exponencial tiene en cuenta que estamos trabajando con un potencial vector no nulo $\mathbf{A}$; aquí $\mathbf{r}_o$ es un punto de referencia arbitrario y γ_1 es un camino (suave) que une a este punto de referencia con $\mathbf{r}$. La integral en el exponente depende unicamente de los extremos y no de el camino elegido ya que este –estando la rendija inferior cerrada– no puede rodear a la zona donde $\mathbf{B}$ no es cero pues: En una región simplemente conexa todo campo irrotacional es conservativo.
En el otro caso, rendija 2 abierta y rendija 1 cerrada, la función de onda es

$$\Psi_2(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{ i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right\} \; \Psi_2^{(0)}(\mathbf{r}, t)$$

donde el camino γ_2 une $\mathbf{r}_o$ a $\mathbf{r}$ por la rendija inferior; y $\Psi_2^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ es la función de onda para esta sitiuación a campo nulo. NUevamente, la integral en el exponente no depende del camino γ_2 sino solo de los extremos.
Ahora, en la situación donde ambas rendijas están abiertas, la función de onda es la superposición

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \alpha\Psi_1(\mathbf{r}, t) + \beta\Psi_2(\mathbf{r}, t) \, .$$

La correspondiente densidad de probabilidad tiene entonces un sumando (de interferencia)

$$2\Re\left[\alpha\overline{\beta}\Psi_1(\mathbf{r}, t)\overline{\Psi_2(\mathbf{r}, t)} \exp\left\{ i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s}\} \right\} \right] \, .$$

Pero

$$i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - i\frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_o, \gamma_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = i\frac{q}{\hbar} \oint_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s}$$

donde $-\gamma_2$ es el camino γ_2 recorrido en sentido inverso (de $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}_o$) y $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ es entonces la curva cerrada formada concatenando γ_1 con $-\gamma_2$. Esta curva encierra (una vez) a la zona donde el campo magnético no es nulo y, por el Teorema de Stokes,

$$i\frac{q}{\hbar} \oint_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = i\frac{q}{\hbar} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{F}$$

donde $\Phi_B := \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{F}$ es el flujo del campo magnético a traves de cualquier superficie F delimitada por $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$. Con respecto al caso de campo nulo el sumando de interferencia tiene otro factor de fase dado por $\exp\{iq\Phi_B/\hbar\}$; este factor cambia, por ejemplo, con la magnitud del campo magnético y, concomitantemente, debe correrse el patrón de interferencia. Obervese que el flujo Φ_B es independiente de la curvas γ_1 y γ_2 mientras estas tengan extremos coincidentes y γ_1 no "pase por la rendija 2" mientras γ_2 no pase por la rendija 1 (cada camino puede ser no plano y tener rulos, etc.).