# $\boldsymbol{\sigma}$-Cálculo para sistemas de dos niveles

*Mecánica Cuántica, G.A. Raggio*

Para un sistema cuántico de dos niveles, i.e. el espacio de Hilbert $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2$ es bidimensional, se tiene:

*Teorema: Todos los trios* $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ *de operadores autoadjuntos que satisfacen*

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} \sigma_\ell \ ,$$

*son unitariamente equivalentes; vale decir dados dos trios* $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \sigma_3^{(1)})$ *y* $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = (\sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}, \sigma_3^{(2)})$ *hay un operador unitario* $U$ *tal que* $U^* \sigma_j^{(1)} U = \sigma_j^{(2)}$ *para* $j = 1, 2, 3$. *Además, hay una base ortonormal de* $\mathfrak{H}$ *tal que*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Usaremos las siguientes definiciones para vectores $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^3$:

$$\overline{\mathbf{a}} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \ ;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \ , \ \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \overline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \ ,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \ , \ \ \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle \overline{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \rangle \ ;$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_\ell = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} \, a_j b_k \ , \ \ \ell = 1, 2, 3 \ .$$

En lo que sigue suponemos dado un terceto $\boldsymbol{\sigma}$; las propiedades que se listan no dependen de la elección de una base ortonormal.

1. $$\sigma_j \sigma_k = \delta_{j,k} \mathbf{1} + i \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k\ell} \sigma_\ell \ .$$

2. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$:

   *a)* $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{1} + i(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$;

   *b)* $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{\sigma}$;

   *c)* $[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 2i(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$;

   *d)* $[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}] = -2i(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{\sigma})$;

   *e)* $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{a} - i(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})\} \, \mathbf{1} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{\sigma}$.

3. Todo operador $A$ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ puede escribirse *univocamente* como
$$A = a_o\mathbf{1} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} \ ;$$
en tal caso,
$$a_o = \frac{1}{2}tr(A) \ , \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2}tr(A\boldsymbol{\sigma}) \ .$$
Decimos que al operador $A$ le corresponde el 4-vector $(a_o, \mathbf{a}) \in \mathbb{C}^4$ y escribimos $A \Bumpeq (a_o, \mathbf{a})$. Se tiene $0 \Bumpeq (0, \mathbf{0})$ y $\alpha\mathbf{1} \Bumpeq (\alpha, \mathbf{0})$ para $\alpha \in \mathbb{C}$.

4. Si $A \Bumpeq (a_o, \mathbf{a})$ y $B \Bumpeq (b_o, \mathbf{b})$ entonces, $A^* \Bumpeq (\overline{a_o}, \overline{\mathbf{a}})$ y $AB \Bumpeq (a_o b_o + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, a_o\mathbf{b} + b_o\mathbf{a} + i(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$.

5. $det(A)$ *–que es independiente de la base ortonormal elegida para calcular la matriz asociada con* $A$– está dada por
$$det(A) = a_o^2 - \mathbf{a}^2 \ .$$

6. $A \Bumpeq (a_o, \mathbf{a})$ es *normal*, i.e. $A^*A = AA^*$, si y solo si $\overline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$, si y solo si $\overline{\mathbf{a}} = e^{i\alpha}\mathbf{a}$ con $\alpha$ real, si y solo si $\mathbf{a} = e^{-i\alpha/2}\mathbf{c}$ donde $\alpha$ es real y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

7. $U \Bumpeq (u_o, \mathbf{u})$ es *unitario* si y solo si $(u_o, \mathbf{u}) = \lambda(v_o, -i\mathbf{v})$ con $|\lambda| = 1$, $v_o \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y $v_o^2 + |\mathbf{v}|^2 = 1$. Se tiene $det(U) = \lambda^2$.

8. $P \Bumpeq (p_o, \mathbf{p})$ es un *proyector* distinto de 0 y distinto de $\mathbf{1}$, i.e. $P^2 = P$ pero $0 \neq P \neq \mathbf{1}$, si y solo si $p_o = 1/2$ y $\mathbf{p}^2 = 1/4$.

9. $P \Bumpeq (p_o, \mathbf{p})$ es un *proyector ortogonal* distinto de 0 y distinto de $\mathbf{1}$, i.e. $P^2 = P = P^*$ pero $0 \neq P \neq \mathbf{1}$, si y solo si $p_o = 1/2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ y $|\mathbf{p}| = 1/2$.

10. Si $A \Bumpeq (a_o, \mathbf{a})$, los *autovalores* de $A$ son los números
$$\lambda_\pm = a_o \pm \sqrt{\mathbf{a}^2} \ ,$$
donde la raiz cuadrada compleja se define como más le guste.

    *a*) Si $\mathbf{a}^2 \neq 0$ entonces $A$ es *diagonalizable* y con la misma definición de la raiz cuadrada, poniendo
    $$P_\pm = \frac{1}{2}\mathbf{1} \pm \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}^2}}\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} \ ,$$
    se tiene $P_\pm^2 = P_\pm$ y
    $$A = \lambda_+ P_+ + \lambda_- P_- \ , \quad P_- + P_+ = \mathbf{1} \ , \quad P_- P_+ = P_+ P_- = 0 \ .$$

    *b*) Si $\mathbf{a}^2 = 0$ entonces el operador $N$ asociado con el 4-vector $(0, \mathbf{a})$ es *nilpotente*, i.e. $N^2 = 0$; y ni $N$ ni $A$ son diagonalizables salvo cuando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

11. Si $A \Bumpeq (a_o, \mathbf{a})$, entonces
$$e^A \ \Bumpeq \ \left( e^{a_o}\cosh(\sqrt{\mathbf{a}^2}), \frac{e^{a_o}\sinh(\sqrt{\mathbf{a}^2})}{\sqrt{\mathbf{a}^2}}\ \mathbf{a} \right) \ ,$$
con la defnición de la raiz cuadrada que más le guste, incluso en el caso $\mathbf{a}^2 = 0$ tomando el correspondiente límite de las funciones hiperbólicas.

    Si $B \Bumpeq (b_o, \mathbf{b})$ es autoadjunto, entonces
$$e^{iB} \ \Bumpeq \ \left( e^{ib_o}\cos(|\mathbf{b}|), \frac{ie^{ib_o}\sin(|\mathbf{b}|)}{|\mathbf{b}|}\ \mathbf{b} \right) \ .$$