Práctico 1

Variedades Diferenciables

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(u,v) = (u^2e^{2v}, u+v^2)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $f'(3,0)$. Escribir la aproximación afín de f en $(3,0)$ y usarla para aproximar $f(3.1,0.2)$.

2. (a) Sean $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = u_o$ para todo x. Mostrar que dg_x es la transformación nula.

(b) Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Mostrar que $df_x = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

3. (a) Mostrar que si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces

$$df_p(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(\alpha(t))$$

para cualquier curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$.

(b) Sea $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la función determinante. Mostrar que $d\det_I = \mathrm{tr}$. Calcular $d\det_A$, donde A es una matriz $n\times n$ no singular.

4. (a) Mostrar que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.

(b) Sea X el cociente $(\mathbb{R}\times\{0,1\})/\!\sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, en donde $(x,0)\sim(x,1)$ para $x<0$ (y cada punto está relacionado consigo mismo, por supuesto). Mostrar que X es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.

5. Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U,φ) tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$.

6. (a) Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas "casquetes" y las cartas "estereográficas" coinciden.

(b) Mostrar que S^2 con la estructura diferenciable dada en (a) es difeomorfa a $(M,\mathscr{F})$, en donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞, y $\mathscr{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U,φ) y (V,ψ), donde $U = \mathbb{C}$, $\varphi = \mathrm{id}$, $V = (\mathbb{C}-\{0\})\cup\{\infty\}$ y $\psi(z) = 1/z$ si $z\in\mathbb{C}-\{0\}$, $\psi(\infty) = 0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

7. Considerar el cociente P^2 de S^2 por la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x\sim\pm x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en P^2 tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

8. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente T^2 la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que T^2 es difeomorfo a $S^1\times S^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

9. Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfas pero $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$.

10. Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite una estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

11. Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2/\sim$, donde $x \sim x + 2k\pi e_1$, con k entero, es difeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y a la siguiente superficie de $\mathbb{R}^3$, cuya construcción es análoga a la de la banda de Möebius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

12. Probar que las aplicaciones $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ definidas por $(A,B) \mapsto AB$ y $A \mapsto A^{-1}$ respectivamente, son diferenciables.

13. Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto de rectas orientadas en el plano.

Ejercicios opcionales.

14. Sean M_i variedades diferenciables $(i = 1, 2, 3)$.
(a) Probar que $(M_1 \times M_2) \times M_3$ es difeomorfa a $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ y que $M_1 \times M_2$ es difeomorfa a $M_2 \times M_1$.
(b) Probar que las inclusiones $M_1, M_2 \to M_1 \times M_2$ dadas por $p_1 \mapsto (p_1, \bar{p}_2)$ y $p_2 \mapsto (\bar{p}_1, p_2)$ respectivamente, son diferenciables para todos $\bar{p}_1 \in M_1$, $\bar{p}_2 \in M_2$.

15. Acción discontinua de un grupo. Sea G un subgrupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable M. Decimos que la acción de G en M es *propiamente discontinua* si cada $p \in M$ tiene un entorno $U \subset M$ tal que $U \cap g(U) = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Sea M/G el conjunto de clases de equivalencia de la relación inducida por la acción de G en M. Supongamos también que dados dos puntos no-equivalentes $p, q \in M$ existen entornos U, V de p y q respectivamente tales que $U \cap g(V) = \emptyset$ para todo $g \in G$.
(a) Demostrar que el cociente M/G es un espacio localmente euclídeo (de dimensión $\dim M$) que admite una estructura diferenciable que hace de la proyección canónica $\pi : M \to M/G$ un difeomorfismo local.
(b) Concluir que el espacio proyectivo real $P^n = S^n/\sim$ (en donde $x \sim \pm x$) admite una estructura de variedad diferenciable tal que la proyección $\pi : S^n \to P^n$ es un difeomorfismo local.