# Práctico 2

## Espacio Tangente y Particiones de la Unidad

**1.** Sea $M$ una variedad diferenciable, $I$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable. La velocidad de $\gamma$ en el instante $t \in I$, que se denota por $\gamma'(t)$, es por definición el vector tangente que satisface $\gamma'(t)(f) = \frac{d}{ds}\Big|_0 f(\gamma(t+s))$ para toda función diferenciable definida en un entorno abierto de $\gamma(t)$ en $M$.

(a) Mostrar que efectivamente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

(b) Probar que $\gamma'(t) = (d\gamma)_t \left( \frac{\partial}{\partial s}\Big|_t \right) \in T_{\gamma(t)}M$, donde $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_t \in T_t\mathbb{R}$ es el vector tangente a $\mathbb{R}$ en $t$ asociado al sistema coordenado canónico $(\mathbb{R}, \mathrm{id} = s)$.

(c) Mostrar que si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de $M$ alrededor de $\gamma(0)$ y $(\varphi \circ \gamma)(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ para $t$ próximo a cero, entonces

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} r_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(0)}.$$

(d) Mostrar que para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$ se cumple que $v = \sigma'(0)$ para alguna curva diferenciable $\sigma$ en $M$ con $\sigma(0) = p$.

**2.** Sea $\pi$ la proyección canónica de $S^2$ al proyectivo $P^2$. Mostrar que la función $f : P^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(\pi(x,y,z)) = x^6yz + 3x^4y^3z$ está bien definida y es diferenciable. Probar que $v(f) = 0$ para todo $v \in T_{\pi(1,0,0)}P^2$.

**3.** Sean $M$ y $N$ variedades diferenciables, y sean $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Considerar en $M \times N$ la estructura diferenciable producto.

(a) Mostrar que una función $f$ de una variedad diferenciable en $M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.

(b) Fijamos $p \in M$ y $q \in N$. Se definen $i_q : M \to M \times N$ por $i_q(p') = (p', q)$, e $i_p$ análogamente. Se definen también las aplicaciones $F : T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ por

$$F(X,Y)(f) = X(f \circ i_q) + Y(f \circ i_p),$$

y $G : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ por

$$G(v) = (d\pi_1(v), d\pi_2(v)).$$

Mostrar que, en efecto, $F(X,Y) \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Probar que $G \circ F = \mathrm{id}_{T_pM \times T_qN}$ y deducir de allí que $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_pM \times T_qN$ son isomorfos.

**4.** Mostrar que si $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces $df : TM \to TN$ es diferenciable.

**5.** Probar que $TS^1$ es difeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

**6.** Sea $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id} = (x,y,z))$ el sistema coordenado canónico de $\mathbb{R}^3$. Encontrar otro sistema coordenado $(\mathbb{R}^3, \varphi = (\xi, \eta, \zeta))$ con $x = \xi$ pero tal que $\frac{\partial}{\partial x}\big|_0 \neq \frac{\partial}{\partial \xi}\big|_0$. De hecho, usualmente abusamos de la notación no escribiendo a cuál sistema coordenado corresponde un vector tangente dado. Cuando esto no está claro, como en este caso, conviene indicarlo, por ejemplo, con un supraíndice,

$$\left.\frac{\partial^{\mathrm{id}}}{\partial x}\right|_0, \qquad \left.\frac{\partial^{\varphi}}{\partial \xi}\right|_0.$$

**7.** Demostrar que la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

es de clase $C^\infty$. *Sugerencia*: Probar que para $t > 0$, $f^{(n)}(t) = q_n(1/t)e^{-1/t}$ para cierto polinomio $q_n$.

**8.** (a) Dar explícitamente una partición de la unidad subordinada al cubrimiento

$$\{S^1 - \{(0,1)\}, S^1 - \{(-1,0)\}\}$$

de $S^1$.

(b) Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable. Mostrar que existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para todo $\alpha$. *Sugerencia*: usar particiones de la unidad.

**9.** (a) Sea $M$ una variedad diferenciable. Mostrar que $M$ admite una *estructura riemanniana*, es decir, existe una aplicación $B$ que a cada punto $p \in M$ le asigna un producto interno $B_p$ en $T_pM$ de tal forma que si $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de $M$, entonces se cumple que la función de $U$ en $\mathbb{R}$ dada por $p \mapsto B_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$ es diferenciable para todos $i, j$. *Sugerencia*: usar particiones de la unidad.

(b) ¿Cómo se definiría la longitud de una curva diferenciable $\alpha : [0,1] \to M$?