Práctico 3

Subvariedades y el
Teorema de la Función Inversa

1. Sea $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ la inclusión y sea (U,x) el sistema coordenado dado por la inversa de la función $(\cos t, \sin t)$ en el intervalo $(-\pi,\pi)$. Calcular $di_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right) \in T_{i(p)}\mathbb{R}^2$ para todo $p \in S^1 - \{(-1,0)\}$.

2. Sea $\varphi : (-\pi/4, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(t) = \sin(2t)(\cos t, \sin t).$$

Graficar la imagen de φ. Probar que φ es una subvariedad que no es incrustada (recurrir a sucesiones).

3. Sea $M \subset N$ una subvariedad. Sea $\gamma : (a,b) \to N$ una curva diferenciable tal que $\gamma(a,b) \subset M$. Mostrar que no es necesariamente verdadero que $\gamma'(t) \in di_{\gamma(t)}(T_{\gamma(t)}M)$ para todo $t \in (a,b)$, donde $i : M \to N$ es la inclusión.

4. Sea (M,ψ) una subvariedad de N. Mostrar que si M es compacta, entonces es incrustada.

5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $p \in M$. Demostrar los siguientes enunciados:

(a) Supongamos que $y_1,\dots,y_n$, con $n < m$, es un conjunto de funciones independientes en p (i.e. funciones C^∞ definidas en un entorno abierto de p y tales que sus diferenciales en p son linealmente independientes). Entonces $y_1,\dots,y_n$ forman parte de un sistema coordenado en un entorno abierto de p.

(b) Sea $f : M \to N$ una función C^∞ y supongamos que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva. Sea $(x_1,\dots,x_n)$ un sistema coordenado en un entorno abierto de $f(p) \in N$. Entonces $x_1 \circ f, \dots, x_n \circ f$ forman parte de un sistema coordenado en un entorno abierto de p.

6. Una función diferenciable $\pi : M \to N$ se dice una *submersión* si $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in M$.

(a) **Forma local de una submersión.** Probar que si $\pi : M^m \to N^n$ es una submersión, entonces dado $p \in M$ existen sistemas coordenados (U,φ) alrededor de p en M y (V,ψ) alrededor de $\pi(p)$ en N tales que

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_n)$$

es la proyección sobre las primeras n coordenadas.

(b) Probar que toda submersión es abierta.

7. Sean S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$ y T^2 el toro $S^1 \times S^1$. Se define la función $\varphi : \mathbb{R} \to T^2$ por $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, donde α es un número irracional. Mostrar que $(\mathbb{R},\varphi)$ es una subvariedad densa de T^2 que no es una incrustación. Verificar que φ es un homomorfismo de grupos.

8. (a) Asociando a cada elemento de P^2 una proyección ortogonal, o equivalentemente una matriz simétrica 3×3, encontrar una incrustación de P^2 en $\mathbb{R}^6$.
(b) Encontrar una incrustación de P^2 en $\mathbb{R}^5$ notando que la imagen de la incrustación de (a) está en un hiperplano de $\mathbb{R}^6$. (*Sugerencia*: considerar un conjunto de nivel de la función traza.)

9. De la teoría se conoce la siguiente proposición:

Sea (M,ψ) una subvariedad de N. Si M es incrustada y $\psi(M)$ es cerrado en N, entonces para toda $g \in C^\infty(M)$ existe $f \in C^\infty(N)$ tal que $f \circ \psi = g$.

Probar que la proposición no es verdadera si quitamos la hipótesis que ψ es una incrustación o la hipótesis que $\psi(M)$ es cerrado en N.

10. Mostrar que la esfera menos los polos y el hiperboloide de revolución de una hoja son subvariedades de $\mathbb{R}^3$. Mostrar que además son difeomorfas.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^4 - 5\|x\|^2 + 4$. Mostrar que existe $r > 0$ que satisface $df_x = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $\|x\| = r$. Mostrar que $f^{-1}(\{4\})$ no es subvariedad pero es unión de dos subvariedades disjuntas, y que $f^{-1}(\{r^4 - 5r^2 + 4\})$ y $f^{-1}(\{4\}) - \{0\}$ son subvariedades incrustadas. ¿En qué casos se puede aplicar el teorema de la función implícita a la función f?

12. (a) Sea $\mathrm{O}(3) = \{A \in M(3,\mathbb{R}) : AA^t = I\}$ el conjunto de matrices ortogonales 3×3. Mostrar que $\mathrm{O}(3)$ es una subvariedad incrustada de $M(3,\mathbb{R})$. ¿Es una subvariedad incrustada de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) := \{A \in M(3,\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$?
(b) Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(3)$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es γ diferenciable?

13. (a) Sea $f : N \to Q$ una función diferenciable entre variedades diferenciables y sea $q \in Q$ un valor regular de f en su imagen. Sea M la subvariedad $f^{-1}(\{q\})$. Mostrar que

$$T_pM \simeq di_p(T_pM) = \ker(df_p)$$

para todo $p \in M$ (i denota la inclusión de M en N).
(b) Sea $p \in S^n$. Mostrar que T_pS^n es naturalmente isomorfo al subespacio ortogonal a p, es decir $\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}$.

14. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y sea

$$U = \{p \in M : \text{rango}\, df_p \geq \text{rango}\, df_q \text{ para todo } q \in M\},$$

es decir, U es el subconjunto de M donde el rango de la diferencial de f alcanza su máximo. Mostrar que U es abierto. (*Sugerencia:* el rango no disminuye localmente.)