Práctico 4

Campos Vectoriales, Distribuciones y el Teorema de Frobenius

1. (a) *Restricción de campos a lo largo de una inmersión.* Sea $\varphi : M \to N$ una inmersión. Sea Y un campo diferenciable en N tal que $Y_{\varphi(p)}$ pertenece a la imagen de $d\varphi_p$ para todo $p \in M$. Para cada $p \in M$, sea X_p el único vector tangente a M en p tal que $d\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}$. Mostrar que X define un campo diferenciable en M. *Ayuda*: recurrir a la forma local de una inmersión.

(b) En $\mathbb{R}^{2n}$ definimos el campo

$$Y(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n} -y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Mostrar que existe un campo X en la esfera S^{2n-1} tal que $(d\iota) \circ X = Y \circ \iota$, donde $\iota : S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ es la inclusión. Verificar que $t \mapsto \gamma_p(t)$, la curva integral de X que en $t = 0$ pasa por p, describe un círculo máximo para todo $p \in S^{2n-1}$.

2. Sea γ una curva integral de un campo vectorial X en una variedad diferenciable M, tal que $\gamma'(t) = 0$ para algún t. Mostrar que γ es constante.

3. Probar que no todo campo en $\mathbb{R}$ es completo. Encontrar el intervalo maximal de definición de una curva integral del campo contraejemplo elegido.

4. Sean M una variedad diferenciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, y $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

(a) Probar que $[X,Y]_p \in T_pM$ para todo p en M. Concluir que $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Probar que $[X, gY] = g[X,Y] + X(g)Y$. Deducir una fórmula para $[fX, gY]$.

(c) Si $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema coordenado, mostrar que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ para todos i, j.

(d) En $\mathbb{R}^2$ definimos los campos V y W por $V \equiv e_1$, $W(x,y) = e^x e_2$. Mostrar que no existe un sistema coordenado $\psi = (u,v)$ tal que $\frac{\partial}{\partial u} = V$ y $\frac{\partial}{\partial v} = W$.

5. Sea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ y sea X el campo vectorial definido por $X(z) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_z$. Mostrar que no existe un intervalo de tiempo uniforme alrededor de cero donde estén definidas todas las curvas integrales de X.

6. En $\mathbb{C} - \{0\}$ definimos el campo $V(z) = 1/\bar{z}$. Dibujarlo y mostrar que no es completo. Hallar $\theta_t(A)$ para $t > 0$, donde A es el anillo $1 < |z| < 2$ y θ_t es el flujo local asociado a V.

7. Probar que todo campo vectorial en una variedad compacta es completo.

8. Sean M una variedad diferenciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $p \in M$. Probar que

$$t \mapsto (d\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)})$$

define una curva C^∞ en T_pM, en donde θ_t es el flujo local asociado a X. (Recordar de la teoría que derivando esta curva en $t=0$, obtenemos el corchete $[X,Y]_p$, con las identificaciones usuales.)

9. Las posiciones de un uniciclo ideal pueden describirse con coordenadas $(x,y,\theta) \in \mathbb{R}^3$, donde (x,y) es la proyección al piso del centro de la rueda y θ es el ángulo que forma la rueda con el eje equis, según indica la Figura 1 (el uniciclo visto de arriba).

(a) Convencerse de que un movimiento ideal $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ es admisible si y sólo si $(x', y') = \lambda(\cos\theta, \sin\theta)$ para cierta función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Mostrar que un movimiento γ es admisible si y sólo si $\gamma'(t) \in \mathscr{D}_{\gamma(t)}$ para todo t, donde $\mathscr{D}$ es la distribución de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathscr{D}_{(x,y,\theta)} = \operatorname{span}\{(\cos\theta, \sin\theta, 0), (0,0,1)\}$$

(c) Representar gráficamente la distribución $\mathscr{D}$ y verificar que no es integrable.

(d) Encontrar una curva admisible a trozos que una los puntos $(0,0,0)$ y $(0,1,0)$.

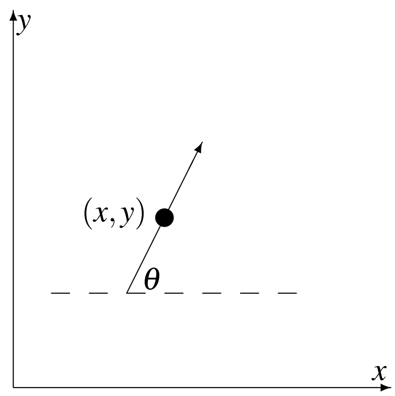

FIGURA 1. El uniciclo visto de arriba.

10. (a) Probar que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces X es arcoconexo*. *Sugerencia*: dado $p \in X$, mostrar que el conjunto de los puntos en X que pueden ser unidos a p mediante una curva continua es abierto y cerrado.

(b) Probar que dados dos puntos de una variedad diferenciable conexa, es posible encontrar una curva diferenciable a trozos que los une.

11. Hallar la subvariedad integral conexa maximal que contiene a $(0,0)$ para la distribución $\mathscr{D}$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $\mathscr{D} = \mathbb{R}e_1$ (no usar ejercicio **13**).

12. (a) Probar que la recta densa en el toro $\varphi : \mathbb{R} \to T^2$ es una subvariedad integral de alguna distribución en T^2.

(b) Sea M una variedad diferenciable y sea $f : M \to T^2$ una función diferenciable tal que $f(M) \subset \varphi(\mathbb{R})$. Mostrar que $\varphi^{-1} \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

13. Sea (M, φ) una subvariedad integral conexa de una distribución involutiva en una variedad N. Probar que si $\varphi(M)$ es cerrada en N, entonces M es conexa maximal.

---

*Un espacio topológico X se dice *arcoconexo* si dados dos puntos $p, q \in X$, existe una curva continua γ que los une, o sea, $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. El espacio X se dice *localmente arcoconexo* si todo punto de X tiene una base de entornos arcoconexos.

14. Sea X un campo nunca nulo en una variedad M, sea γ la curva integral de X tal que $\gamma(0) = p \in M$, y sea $\mathscr{D}$ la distribución en M definida por $\mathscr{D}(q) = \mathbb{R}X(q)$. Probar que si existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t_0) = p$, entonces existe $F : S^1 \to M$ tal que (S^1, F) es una subvariedad integral conexa maximal para $\mathscr{D}$ que contiene a p.

15. *La distribución vertical en el fibrado tangente.* Sea M una variedad diferenciable y sea $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que $\mathscr{D}_v = \ker d\pi_v$ define una distribución (diferenciable) involutiva en TM, conocida como la *distribución vertical*. ¿Cuáles son las subvariedades integrales conexas maximales de $\mathscr{D}$?

16. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\cos(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -z\log(z)\tan(y).$$

Utilizar el Teorema de Frobenius para probar que dicho sistema tiene una solución $z(x,y)$ en un entorno de $(0,0)$, con condición inicial $z(0,0) = 1$. *Sugerencia*: considerar en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ la distribución generada por los campos

$$X(x,y,z) = e_1 + z\cos(y)e_3, \qquad Y(x,y,z) = e_2 - z\log(z)\tan(y)e_3.$$