Práctico 5

Álgebra Exterior

En lo que sigue, $\{e^i : i = 1, \dots, n\}$ denota la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ y sea $P = \{t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n : 0 \le t_i \le 1\}$ el paralelepípedo generado por $v_1, \dots, v_n$. Verificar que $\mathrm{vol}(P) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.
(b) Calcular el área del triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,5)$.

2. (a) Simplificar las siguientes expresiones:

$$(e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^1) \wedge (5e^1 - e^2); \qquad e^1 \wedge e^5 \wedge e^4 \wedge (e^1 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^2).$$

(b) Mostrar que si $a, b, c \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{n*})$, entonces $a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = (a - b) \wedge (b - c)$.
(c) Sea $f \in \Lambda^p(V^*)$. Mostrar que si p es par, entonces f conmuta con todos los elementos de $\Lambda^p(V^*)$.

3. (a) Mostrar que el subconjunto $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ de V^* es linealmente independiente si y sólo si $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m \neq 0$.
(b) Mostrar que $2e^1 + 3e^2 - e^3$, $e^1 + 2e^2$, $e^1 - 2e^3$ son linealmente dependientes.
(c) Probar que dos conjuntos linealmente independientes $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ y $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ son bases del mismo subespacio r-dimensional de V^* si y sólo si

$$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_r = c\, \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r,$$

para algún $c \neq 0$; y en tal caso $c = \det B$, donde $\theta_i = \sum_j B_{ij} \xi_j$.

4. Sean $\varphi_1 : \Lambda^1(\mathbb{R}^{3*}) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_2 : \Lambda^2(\mathbb{R}^{3*}) \to \mathbb{R}^3$ y $\varphi_3 : \Lambda^3(\mathbb{R}^{3*}) \to \mathbb{R}$, los isomorfismos canónicos, i.e., los isomorfismos dados por $\varphi_1(e^i) = e_i$, para $i = 1,2,3$; $\varphi_2(e^1 \wedge e^2) = e_1$, $\varphi_2(e^1 \wedge e^3) = e_2$, $\varphi_2(e^2 \wedge e^3) = e_3$; y $\varphi_3(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = 1$. Probar que las siguientes igualdades valen cualesquiera sean $\omega, \theta, \xi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{3*})$:
(a) $\varphi_2(\omega \wedge \theta) = \varphi_1(\omega) \times \varphi_1(\theta)$, en donde $\times$ es el producto cruz en $\mathbb{R}^3$;
(b) $\varphi_3(\omega \wedge \theta \wedge \xi) = \langle \varphi_1(\omega), \varphi_1(\theta) \times \varphi_1(\xi) \rangle$.

5. Un elemento α de $\Lambda^p(V^*)$ se dice *descomponible* si existen $\theta_1, \dots, \theta_p \in V^*$ tales que $\alpha = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_p$ ($\dim V = n$).
(a) Mostrar que $\alpha \wedge \alpha = 0$ si α es descomponible.
(b) Mostrar que $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ no es descomponible ($V = \mathbb{R}^4$).
(c) Suponer que V tiene dimensión n y sea ω una función n-lineal alternante no nula en V. Probar que la aplicación $F : V \to \Lambda^{n-1}(V^*)$ definida por $F(v) = \iota_v \omega = \omega(v, \dots)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
(d) Si $\dim V = n$, entonces toda $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ es descomponible si $p = 1$, $n - 1$ o n.

6. (a) Sean $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(V^*)$ y sea $v \in V$. Desarrollando el determinante por menores complementarios probar que

$$\iota_v(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i(v) \wedge \cdots \wedge \omega_k.$$

(b) Concluir que la multiplicación interior ι_v es una antiderivación de $\Lambda^k(V^*)$, es decir que

$$\iota_v(\omega \wedge \eta) = \iota_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_v(\eta)$$

para todas $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$.

Ejercicios opcionales.

7. Una *forma simpléctica* en V es una 2-forma $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ tal que $\omega(x,y) = 0$ para todo $y \in V$ implica que $x = 0$ (i.e., ω es no-degenerada). Probar que V admite una forma simpléctica si y sólo si $\dim V$ es par. Exhibir una forma simpléctica “natural” en $\mathbb{R}^{2n}$.

8. Sea $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, $x \mapsto \Theta_x$, una transformación lineal tal que Θ_x es una matriz antisimétrica para cada x. Supongamos que $\Theta_x x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Probar que $\omega(x,y,z) = \langle \Theta_x y, z \rangle$ define un elemento en $\Lambda^3(\mathbb{R}^{n*})$.

(b) Asumamos que n es par. Probar que si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, Θ_x conmuta con la multiplicación por $i = \sqrt{-1}$ en $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^{n/2}$, entonces $\Theta = 0$.