Práctico 6

Formas Diferenciales, Orientación en Variedades

1. Mostrar que el producto exterior de formas diferenciables es diferenciable.

2. (a) Encontrar la diferencial exterior de $\cos(xy^2)dx \wedge dz \in E^2(\mathbb{R}^3)$ y de $x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \in E^2(\mathbb{R}^3)$.
(b) Encontrar una $(n-1)$-forma ξ tal que $d\xi = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in E^n(\mathbb{R}^n)$.

3. Una forma diferenciable α de grado k se dice cerrada si $d\alpha = 0$. La forma α se dice exacta si existe una forma β tal que $d\beta = \alpha$.
(a) Mostrar que toda forma exacta es cerrada y que toda n-forma en una variedad de dimensión n es cerrada.
(b) Mostrar que el producto exterior de dos formas cerradas es una forma cerrada y que el producto exterior de una forma cerrada con una exacta es una forma exacta.

4. Sea $F : M \to N$ una función diferenciable y sea $\omega \in E^k(N)$, con $k \geq 0$.
(a) Mostrar que

$$\delta F(\omega)_p (u_1, \ldots, u_k) = \omega_{F(p)} (dF_p(u_1), \ldots, dF_p(u_k)),$$

para $p \in M$ y $u_1, \ldots, u_k \in T_pM$, define una k-forma (diferenciable) $\delta F(\omega)$ en M.
(b) Mostrar que si además $\theta \in E^\ell(N)$, entonces $\delta F(\omega) \wedge \delta F(\theta) = \delta F(\omega \wedge \theta)$.
(c) Mostar que $d(\delta F(\omega)) = \delta F(d\omega)$.

5. Mostrar que la 1-forma $\theta = x\,dy$ en $\mathbb{R}^2$ no es localmente exacta. Más aún, en ningún abierto U está definida una función f tal que $df = \theta$ en U.

6. Considerar en la circunferencia S^1 los sistemas coordenados canónicos $s = \varphi^{-1}$ y $t = \psi^{-1}$ con imágenes los intervalos $(0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi)$, respectivamente. Mostrar que ds, dt definen una 1-forma suave θ en S^1. Probar que θ es localmente exacta (es decir, para todo $u \in S^1$ existe una función $f : U \to \mathbb{R}$ con $df = \theta|_U$, definida en cierto entorno abierto de U de u), pero no exacta (no existe f así definida en todo S^1).

7. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$. Se definen las aplicaciones $F_j : \mathfrak{X}(U) \to E^j(U)$ $(j = 1, 2)$, y $F_3 : C^\infty(U) \simeq E^0(U) \to E^3(U)$ mediante

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \sum u_j dx_j, \\ F_2(u) &= u_1 dx_2 \wedge dx_3 + u_2 dx_3 \wedge dx_1 + u_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ F_3(f) &= f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Mostrar que F_j es un isomorfismo de $C^\infty(U)$-módulos.

Dada $f : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, se define

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Dado un campo u en U, se definen

$$\operatorname{div}(u) = \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

y

$$\operatorname{rot}(u) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Mostrar que $df = F_1(\operatorname{grad} f)$, $d(F_1(u)) = F_2(\operatorname{rot}(u))$ y $d(F_2(u)) = F_3(\operatorname{div}(u))$. Deducir que $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ y $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$.

8. Exhibir la n-forma diferenciable canónica de una hipersuperficie M^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ que admite un campo normal diferenciable nunca nulo N.

9. (a) Sea M una subvariedad de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que M es orientable si y sólo si M admite un campo normal diferenciable nunca nulo.
(b) Mostrar que si una subvariedad como en (a) se obtiene por el Teorema de la Función Implícita, entonces es orientable.

10. Mostrar que el espacio proyectivo P^n es orientable si y sólo si n es impar.

11. (a) Sea M una variedad cubierta por dos sistemas coordenados (U, φ) y (V, ψ) conexos, tales que $U \cap V$ tiene exactamente dos componentes conexas con la propiedad que el determinante de cambio de coordenadas es positivo en una componente conexa y negativo en la otra. Probar que M no es orientable.
(b) Mostrar que la cinta de Möebius $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)/\sim$ no es orientable.

12. (a) Para $i = 1, 2$ sea ω_i una n-forma nunca nula en una variedad M_i de dimensión n. Sea $F : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo. Mostrar que si $\delta F(\omega_2) = \omega_1$, entonces $m_1(A) = m_2(F(A))$ para todo abierto A de M_1, donde m_i es la medida en M_i asociada a ω_i.
(b) Mostrar que las áreas de las regiones del cilindro y de la esfera inscripta comprendidas entre dos planos paralelos al ecuador coinciden. *Sugerencia*: ver que la proyección que mantiene constante la tercera coordenada preserva la forma de volumen.

Ejercicios opcionales.

13. Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$.
(a) Mostrar que $\Lambda^n(T^*U)$ se identifica naturalmente con $U \times \mathbb{R}$.
(b) Mostrar que $\Lambda^n(T^*U) - \{0_q : q \in U\}$ tiene dos componentes conexas (0_q denota la función n-lineal nula en T_qU).
(c) Sea $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)/\sim$ la cinta de Möebius y sea ω un elemento no nulo de $\Lambda^2_{\pi(0,0)}(T^*M)$. Encontrar una curva diferenciable a trozos en $\Lambda^2(T^*M)$ que una ω con $-\omega$.

14. Mostrar que si M es la cinta de Möebius o el proyectivo P^2, entonces M admite un cubrimiento duplo orientado, es decir una variedad diferenciable $\tilde{M}$ junto con una función diferenciable $\pi : \tilde{M} \to M$ que satisface:
(i) $\tilde{M}$ es orientable, conexa y $\pi^{-1}\{p\}$ consiste exactamente de dos puntos para todo p;
(ii) Para cada punto $p \in M$ existe un entorno abierto conexo U de p tal que $\pi^{-1}(U)$ consiste de dos componentes conexas U_1 y U_2 tales que $\pi|_{U_i}$ es un difeomorfismo sobre U para $i = 1, 2$.