**Nombre y apellido:** .....

# Primer Parcial

**19 de abril de 2012**

**1.** Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Consideremos en $X$ la topología $\tau$ que tiene como sub-base a las bolas abiertas contenidas en $H$ y los conjuntos de la forma $\{(x,0)\} \cup B$, en donde $B$ es una bola abierta en $H$ que es tangente a $L$ en $(x,0)$.

(a) Probar que $(X,\tau)$ es un espacio $T_2$

(b) Probar que $(X,\tau)$ es $N_1$ pero no es $N_2$.

(c) Probar que $(X,\tau)$ es separable.

(d) Probar que $(X,\tau)$ no es Lindelöff. *Ayuda*: probar que $L$ es un subespacio cerrado de $(X,\tau)$ que no es Lindelöff.

**2.** Sean $(X,d_X)$, $(Y,d_Y)$ espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función que preserva distancias, es decir, $d_X(x,y) = d_Y(f(x),f(y))$ para todos $x,y \in X$.

(a) Probar que $f$ es inyectiva y continua.

(b) Concluir que si $f$ es suryectiva, entonces es un homeomorfismo.

**3.** Sean $X,Y$ dos espacios topológicos, donde $Y$ es $T_2$. Sean $f,g : X \to Y$ dos funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en $X$.

(b) Concluir que si $f,g$ coinciden en un subespacio denso, entonces $f = g$.

**4.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $\tau_1 < \tau_2$ y $(X,\tau_2)$ es conexo entonces $(X,\tau_1)$ es conexo.

(b) Si $X$ es conexo, entonces $X$ es localmente conexo.

(c) $S^1$ es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}$ (con la topología relativa).

| 1a | 1b | 1c | 1d | 2a | 2b | 3a | 3b | 4a | 4b | 4c | TOTAL | NOTA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |