Nombre y apellido: ....

Segundo Parcial

11 de junio de 2012

1. Sean X,Y dos espacios topológicos compactos. Probar directamente (es decir, sin usar el teorema de Tijonov) que el producto $X\times Y$ también es compacto.

Solución. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $X\times Y$. Como cada abierto de la topología producto es unión de abiertos de la forma $A\times B$, con A abierto en X y B abierto en Y, se puede asumir que U_i es de la forma $V_i\times W_i$, con V_i abierto en X y W_i abierto en Y, para todo $i\in I$.

Fijemos $x\in X$. Entonces $\{V_i\times W_i : i\in I, x\in V_i\}$ es un cubrimiento abierto de $\{x\}\times Y$ (con la topología relativa). Como $\{x\}\times Y$ es compacto, pues es homeomorfo a Y, podemos extraer un subcubrimiento $\{V_i\times W_i\}_{i\in I(x)}$, en donde $I(x)\subset I$ es un subconjunto finito de índices. Observemos que V_i es un entorno abierto de x en X para todo $i\in I(x)$. Luego, $V_x=\bigcap_{i\in I(x)}V_i$ es un entorno abierto de x en X, pues $I(x)$ es finito. Como X es compacto, el cubrimiento $\{V_x\}_{x\in X}$ admite un subcubrimiento finito. Es decir, existen $x_1,\dots,x_n\in X$ tales que $X=V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_n}$. Ahora, $\{U_i\}_{i\in J}$, en donde $J=I(x_1)\cup\cdots\cup I(x_n)$, es un subcubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. En efecto, dado $(x,y)\in X\times Y$, existe x_k tal que $x\in V_{x_k}$. Como $\{x_k\}\times Y\subset\bigcup_{i\in I(x_k)}V_i\times W_i$, existe $i_0\in I(x_k)$ tal que $y\in W_{i_0}$. Luego, $x\in V_{x_k}\subset V_{i_0}$ y por lo tanto $(x,y)\in V_{i_0}\times W_{i_0}$.

Otra forma de hacerlo es probando que las funciones coordenadas son funciones propias, ver las notas de Dotti-Druetta pp. 41. □

2. Sea (X_i,τ_i), con $i\in I$, una familia de espacios topológicos.

(a) Probar que $\mathscr{B}=\{\prod_{i\in I}U_i : U_i\in\tau_i \text{ para todo } i\in I\}$ forma una base para una topología en el conjunto $\prod_{i\in I}X_i$. Esta topología se denomina la topología *caja*.

(b) Probar que las proyecciones $\pi_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ son funciones continuas y abiertas para todo $j\in I$. Probar que la topología producto es menos fina que la topología caja en $\prod_{i\in I}X_i$.

(c) Sea $X_i=[0,1]$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Mostrar que $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ no es compacto con la topología caja.

Solución. Claramente se tiene que $\prod_{i\in I}X_i\in\mathscr{B}$. Luego, para probar que $\mathscr{B}$ es base de una topología en el producto, es suficiente ver que si $U,V\in\mathscr{B}$, entonces $U\cap V\in\mathscr{B}$. Esto es inmediato, pues si $U=\prod_{i\in I}U_i$ y $V=\prod_{i\in I}V_i$ con $U_i,V_i\in\tau_i$, entonces $U\cap V=\prod_{i\in I}U_i\cap V_i\in\mathscr{B}$. Esto prueba la parte (a).

Para probar que las proyecciones son continuas, observemos que si U es abierto en X_j, entonces $\pi_j^{-1}(U)=\prod_{i\in I}U_i$, donde $U_i=X_i$ para todo $i\neq j$ y $U_j=U$. Luego $\pi_j^{-1}(U)\in\mathscr{B}$ y por ende es abierto con la topología caja. Para probar que las proyecciones son abiertas, basta probar que π_j manda elementos de la base $\mathscr{B}$ en abiertos de X_j, pero esto es obvio, pues $\pi_j(\prod_{i\in I}U_i)=U_j$. Finalmente, la topología producto es menos fina que la topología caja, pues, por definición, la topología producto es la topología menos fina tal que las proyecciones son continuas (aunque también se puede chequear directamente que la base usual de la topología producto están contenida en la base $\mathscr{B}$ de la topología caja). Esto prueba (b).

Para probar (c), consideremos, dado $\mathscr{A}\subset\mathbb{N}$, el abierto $U_{\mathscr{A}}=\prod_{i\in\mathbb{N}}U_i$, en donde $U_i=[0,1)$ si $i\in\mathscr{A}$ y $U_i=(0,1]$ si $i\notin\mathscr{A}$. Luego $\{U_{\mathscr{A}}\}_{\mathscr{A}\subset\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de $X=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$

que no admite subcubrimiento finito. En efecto, dado $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$, sea $\mathscr{A} = \{i \in \mathbb{N} : x_i = 0\}$. Entonces $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U_{\mathscr{A}}$. Además, dado $\mathscr{A} \subset \mathbb{N}$, el elemento $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ definido por $x_i = 0$ si $i \in \mathscr{A}$ y $x_i = 1$ si $i \notin \mathscr{A}$ satisface que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U_{\mathscr{A}'}$ si y sólo si $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$. Luego, $\{U_{\mathscr{A}}\}_{\mathscr{A}\subset\mathbb{N}}$ no admite subcubrimiento finito. □

3. Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$, en donde $(x,0) \sim (x,1)$ para $x < 0$. Llamemos θ la proyección al cociente.
(a) Decidir si θ es abierta o cerrada.
(b) Decidir si $G_\sim = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\mathbb{R}\times\{0,1\})^2 : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$ es cerrado.
(c) Probar que X es conexo. ¿Es X conexo por arcos?
(d) Mostrar que cada punto de X posee un entorno abierto homeomorfo a un entorno de $\mathbb{R}$, pero X no es T_2.

Solución. Observemos que una base para la topología de $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ es la formada por abiertos de la forma $(a,b)\times\{0\}$ o $(a,b)\times\{1\}$, con $a,b \in \mathbb{R}$ (aquí $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$).

(a) θ es abierta. Basta verificarlo en la base mencionada en el párrafo anterior. Para ver que $\theta((a,b)\times\{0\})$ es abierto en X, tenemos que ver que $\theta^{-1}(\theta((a,b)\times\{0\}))$ es abierto en $\mathbb{R}\times\{0,1\}$. Distinguimos tres casos según los signos de a y b.

$$\theta^{-1}(\theta((a,b)\times\{0\})) = \begin{cases} (a,b)\times\{0\}, & 0 \le a < b \\ ((a,b)\times\{0\}) \cup ((a,0)\times\{1\}), & a < 0 < b \\ ((a,b)\times\{0\}) \cup ((a,b)\times\{1\}), & a < b \le 0. \end{cases}$$

En todos los casos $\theta^{-1}(\theta((a,b)\times\{0\}))$ es abierto en $\mathbb{R}\times\{0,1\}$. Análogamente se ve que $\theta^{-1}(\theta((a,b)\times\{1\}))$ es abierto y, por consiguiente, θ resulta abierta.

Por otro lado θ no es cerrada. Por ejemplo

$$\theta^{-1}(\theta([-1,1]\times\{0\})) = ([-1,1]\times\{0\}) \cup ([-1,0)\times\{1\})$$

no es cerrado en $\mathbb{R}\times\{0,1\}$.

(b) El gráfico de la relación $G_\sim$ no es cerrado. Una forma fácil de verlo es utilizando sucesiones. En efecto, si $\mathbf{x}_n = (1/n,0)$ e $\mathbf{y}_n = (-1/n,1)$ entonces $\mathbf{x}_n \sim \mathbf{y}_n$ para todo n, o lo que es lo mismo, $(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) \in G_\sim$. Sin embargo, $(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) \to ((0,0),(0,1)) \notin G_\sim$ pues $(0,0) \nsim (0,1)$. Luego, $G_\sim$ no puede ser cerrado.

También es posible probar por definición que $((0,0),(0,1)) \in \overline{G_\sim}$. En efecto, sea U un entorno de $((0,0),(0,1))$ en $(\mathbb{R}\times\{0,1\})^2$. Se puede asumir que U es de la forma $V\times W$ en donde V y W son entornos abiertos de $(0,0)$ y $(0,1)$ en $\mathbb{R}\times\{0,1\}$, respectivamente. Sin perder generalidad, podemos también asumir que $V = (-\varepsilon,\varepsilon)\times\{0\}$ y $W = (-\varepsilon,\varepsilon)\times\{1\}$ para algún $\varepsilon > 0$. Luego $((-\varepsilon/2,0),(-\varepsilon/2,1)) \in U \cap G_\sim$ y así $((0,0),(0,1)) \in \overline{G_\sim}$. Observar que, como ya mencionamos, $((0,0),(0,1)) \notin G_\sim$. Luego, $G_\sim$ no es cerrado.

(c) Sean $A = \theta(\mathbb{R}\times\{0\})$ y $B = \theta(\mathbb{R}\times\{1\})$. Entonces A y B son conexos en X (pues son imágenes de subconjuntos conexos por una función continua), con $A\cap B \neq \emptyset$. Luego, $X = A\cup B$ es conexo. Más aún, X es conexo por arcos. En efecto, los puntos $\theta(x,0)$ y $\theta(y,0)$ pueden unirse por la curva $c(t) = \theta((1-t)x+ty,0)$, $0 \le t \le 1$. Análogamente, los puntos $\theta(x,1)$ y $\theta(y,1)$ pueden unirse por una curva continua. Observemos, en particular, que la curva $c(t) = \theta((1-t)x - t,0)$ conecta el punto $c(0) = \theta(x,0)$ con el punto $c(1) = \theta(-1,0) = \theta(-1,1)$. Luego, todo par de puntos en X puede ser unido mediante una curva continua. Así, X resulta conexo por arcos (y, en particular, X es conexo).

(d) Observemos que restricción de la aplicación cociente $\theta : \mathbb{R}\times\{0\} \to X - \{\theta(0,1)\}$ define un homeomorfismo (pues es biyectiva, continua y abierta). Luego, todo elemento en $X - \{\theta(0,1)\}$ tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}\times\{0\} \simeq \mathbb{R}$. Con el mismo argumento, la restricción $\theta : \mathbb{R} \times \{1\} \to X - \{\theta(0,0)\}$ es un homeomorfismo. Luego, todo elemento de X tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Por último, X no es T_2. Para ver esto, probamos que no existen entornos disjuntos de los puntos $\theta(0,0)$ y $\theta(0,1)$ en X. En efecto, si U es un entorno de $\theta(0,0)$ en X, entonces $\theta^{-1}(U)$ es un entorno de $(0,0)$ en $\mathbb{R} \times \{0,1\}$. Por ende, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \subset \theta^{-1}(U)$. Análogamente si V es un entorno de $\theta(0,1)$ en X, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $(-\varepsilon', \varepsilon') \times \{1\} \subset \theta^{-1}(V)$. Luego, si $0 < r < \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}/2$ entonces $\theta(-r,0) = \theta(-r,1) \in U \cap V$.

Observar que también se puede probar que X no es T_2 usando un resultado de la teoría: pues si X fuera T_2, entonces $G_\sim$ debería ser cerrado (ver Dotti-Druetta pp. 49). $\square$

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) El cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, en donde $x \sim y$ si y sólo si $x^2 = y^2$.

(b) Si las componentes conexas de X son los puntos, entonces X es discreto.

Solución. El ítem (a) es verdadero. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

en donde $f(x) = x^2$. Observemos que $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$, lo cual nos dice que $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$ está bien definida y es inyectiva (aquí denotamos por π la proyección al cociente). Además f es continua y sobre $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, luego $\tilde{f}$ es continua y sobre. Sólo resta probar que $\tilde{f}$ es abierta y así resultará un homeomorfismo. Para ver esto, basta probar que f es abierta, y esta condición basta chequearla en un intervalo abierto $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pero

$$f(a,b) = \begin{cases} (a^2, b^2) & 0 \leq a < b \\ (b^2, a^2) & a < b \leq 0 \\ [0, \max\{a^2, b^2\}) & a < 0 < b. \end{cases}$$

En cualquier caso, $f(a,b)$ es abierto en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (con la topología relativa).

El ítem (b) es falso. El conjunto de los números racionales (con la topología relativa) es un contraejemplo. Otro ejemplo, que vimos en los prácticos, es $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos semiabiertos $[a,b)$. En este caso el espacio también es totalmente disconexo, pero la topología no es la discreta. Observar que las componentes conexas de un espacio topológico siempre son cerradas (¿por qué?), pero en general no son abiertas (¿en qué caso lo son?). $\square$