Nombre y apellido: .....

Segundo Parcial

11 de junio de 2012

1. Sean X, Y dos espacios topológicos compactos. Probar directamente (es deicir, sin usar el teorema de Tijonov) que el producto $X \times Y$ también es compacto.

2. Sea (X_i, τ_i), con $i \in I$, una familia de espacios topológicos.

(a) Probar que $\mathscr{B} = \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ para todo } i \in I\}$ forma una base para una topología en el conjunto $\prod_{i\in I} X_i$. Esta topología se denomina la topología *caja*.

(b) Probar que las proyecciones $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ son funciones continuas y abiertas para todo $j \in I$. Probar que la topología producto es menos fina que la topología caja en $\prod_{i\in I} X_i$.

(c) Sea $X_i = [0,1]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ no es compacto con la topología caja.

3. Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$, en donde $(x,0) \sim (x,1)$ para $x < 0$. Llamemos θ la proyección al cociente.

(a) Decidir si θ es abierta o cerrada.

(b) Decidir si $G_\sim = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\mathbb{R} \times \{0,1\})^2 : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$ es cerrado.

(c) Probar que X es conexo. ¿Es X conexo por arcos?

(d) Mostrar que cada punto de X posee un entorno abierto homeomorfo a un entorno de $\mathbb{R}$, pero X no es T_2.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) El cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, en donde $x \sim y$ si y sólo si $x^2 = y^2$.

(b) Si las componentes conexas de X son los puntos, entonces X es discreto.

1	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	TOTAL	NOTA