Práctico 1

Espacios Topológicos

1. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Verificar que las siguientes aplicaciones son distancias en $\mathbb{R}^n$.

- $d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.
- $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
- $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, llamada *distancia usual* o *euclídea* (*Sugerencia*: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Para cada una de estas distancias en $\mathbb{R}^2$ graficar $B(0,1)$.

2. Consideremos $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

es una métrica en $C[a,b]$. Ver en un gráfico qué mide esta distancia.

3. Dado un espacio métrico (X,d) y $A \subset X$ no vacío, definimos el diámetro del subconjunto A como

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} d(a,b).$$

Por otro lado, dado $x \in X$, la distancia de x al conjunto A se define como

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Finalmente, si $B \subset X$, también no vacío, definimos la distancia entre A y B como

$$d(A,B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a,b).$$

Probar que:

(a) $x \in \bar{A}$ si y sólo si $d(x,A) = 0$.

(b) La desigualdad $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ puede no valer (dar un ejemplo). Sin embargo, se verifica que $d(A,B) \leq d(A,C) + \operatorname{diam}(C) + d(C,B)$.

(c) Existen A, B tales que $d(A,B) = 0$ y $A \cap B = \emptyset$.

(d) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$, lo cual implica que, fijado A, la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A)$ es continua.

4. Hallar todas la topologías en $X = \{a,b\}$ y $X = \{a,b,c\}$.

5. Sea X un conjunto. Probar que las siguientes son topologías en X.

(a) $\tau = \{A \subset X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

(b) $\tau = \{A \subset X : A^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$.
(c) $\tau_{x_0} = \{A \subset X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, donde x_0 es un punto fijo en A.
(d) $\tau_{-x_0} = \{A \subset X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$.

6. Sean I_a el intervalo $(-\infty, a)$ y D_a el intervalo (a, ∞).
(a) Probar que $\tau_i = \{I_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ y $\tau_d = \{D_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ son topologías en $\mathbb{R}$.
(b) Si en τ_i y τ_d hacemos variar $a \in \mathbb{Q}$, ¿las familias resultantes son topologías en $\mathbb{R}$?

7. Consideremos en $\mathbb{N}$ la topología τ formada por el conjunto vacío y los conjuntos $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.
(a) Encontrar los puntos de acumulación de $A = \{4, 13, 28, 37\}$.
(b) Determinar los subconjuntos cerrados $(\mathbb{N}, \tau)$.
(c) Determinar la clausura de los conjuntos $\{7, 24, 47, 81\}$ y $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
(d) Determinar aquellos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son densos en $\mathbb{N}$.

8. Supremo e ínfimo de topologías. Probar que:
(a) La intersección de una colección arbitraria de topologías en un conjunto X es una topología en X.
(b) La unión de dos topologías en X no necesariamente es una topología.
(c) Para cualquier colección de topologías en X, hay una única topología en X, denominada *ínfimo* (resp. *supremo*) tal que es la más fina (resp. la menos fina) de todas las topologías en X, menos finas (resp. más finas) que todas las de la colección dada.

9. Sean X un espacio topológico, $A, B \subset X$. Probar que:
(a) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.
(b) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.
(c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
(d) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
(e) $\bar{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A)$.
(f) $A^\circ = A - \operatorname{Fr}(A)$.
(g) $(X - A)^\circ = X - \bar{A}$ y $\overline{X - A} = X - A^\circ$.
(h) $\operatorname{Fr}(A^\circ) \subset \operatorname{Fr}(A)$ y $\operatorname{Fr}(\bar{A}) \subset \operatorname{Fr}(A)$.
(i) En los puntos (a), (d) y (h) dar ejemplos donde no se cumpla la igualdad.
(j) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.
(k) Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera, y es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.

10. Dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que
(a) $\operatorname{Fr}(A) = A$.
(b) $(\operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)) - \operatorname{Fr}(A \cap B) \not\subset \operatorname{Fr}(A \cup B)$.

11. Sean X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $A \subset Y$. Probar que:
(a) A es cerrado en Y si y sólo si existe un cerrado F en X tal que $A = F \cap Y$.
(b) Si $a \in A$, B es un entorno de a en Y si y sólo si existe un entorno U de a en X tal que $B = U \cap Y$.
(c) Si $(\bar{A})_Y$ es la clausura de A en Y, entonces $(\bar{A})_Y = \bar{A} \cap Y$.
(d) ¿Qué relación existe entre $(A^\circ)_Y$ y A° y entre $(\operatorname{Fr}(A))_Y$ y $\operatorname{Fr}(A)$?

12. Probar que el conjunto de semiplanos abiertos de $\mathbb{R}^2$ forma una sub-base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. ¿Qué topología generan en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de rectas paralelas a los ejes coordenados?

13. Consideramos a $\mathbb{R}$ con la topología τ generada por los conjuntos $C_a = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
(a) ¿Cuáles son los abiertos en esta topología? ¿Cuáles son los cerrados?
(b) Dar la clausura e interior de los siguientes conjuntos:

$$\{a\} \cup (c,d), \text{ si } a \notin (c,d); \quad [a,b]; \quad \{x \in \mathbb{R} : x > a\}; \quad \{x \in \mathbb{R} : x > a\} - \mathbb{N}.$$

(c) Probar que $(\mathbb{R}, \tau)$ es separable, N_1, Lindelöff, pero que no es N_2.

14. Topología del orden. Sea X un conjunto ordenado por una relación $<$ antirreflexiva (es falso $x < x$). La *topología del orden* tiene como sub-base a los conjuntos de la forma $\{x : x < a\}$ o $\{x : a < x\}$ para algún $a \in X$.
(a) Probar que la topología del orden es la mínima topología en la cual el orden es continuo. Es decir, si $a, b \in X$ con $a < b$, entonces existen entornos U de a y V de b tales que si $x \in U, y \in V$ se tiene que $x < y$.
(b) ¿Cuál es la topología del orden de $\mathbb{R}$?
(c) Sea X un conjunto ordenado e Y un subconjunto de X (hereda el mismo orden). Probar que la topología del orden de Y puede no ser la topología relativa de X.

15. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea τ la topología que tiene como base a la familia de todos los intervalos de la forma $[a,b)$ (con $a, b \in \mathbb{R}$). Probar que:
(a) Los miembros de la base son simultáneamente abiertos y cerrados.
(b) El espacio (X, τ) es separable, N_1 pero no es N_2.
(c) Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\ell(A)$ denota el conjunto de puntos límites de A, entonces $A - \ell(A)$ es numerable.
(d) Todo subespacio de (X, τ) es separable.

16. ¿El conjunto de los números irracionales con la topología usual es separable?

17. Sea $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea τ la topología generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, con $A = [a,b)$ y $B = [c,d)$. Probar que:
(a) (X, τ) es separable.
(b) (X, τ) contiene un subespacio cerrado que no es separable.
(c) (X, τ) no es Lindelöff, pues admite un subespacio cerrado que no es Lindelöff.

18. Definimos en $\mathbb{R}^2$ el *orden lexicográfico*: $(a,b) < (c,d)$ si $a < c$ o $a = c$ y $b < d$. Sea τ la topología del orden en $\mathbb{R}^2$.

Analizar cuáles son los abiertos en esta topología y decir si es T_2.

Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología inducida por el orden lexicográfico. Determinar la clausura de los siguientes conjuntos:
(a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$.