Práctico 2

Funciones Continuas

1. Sean X,Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) f es continua.
(ii) Para todo $x \in X$ y para todo $U \in \mathscr{U}_{f(x)}$, existe $V \in \mathscr{U}_x$ tal que $f(V) \subset U$.
(iii) Para todo $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.
(iv) Para todo $A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(v) Si $\mathscr{B}$ es una base para la topología de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo $U \in \mathscr{B}$.
(vi) Si $\mathscr{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo $U \in \mathscr{S}$.

2. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X y $f : X \to Y$ una función tal que para todo i la restricción de f a A_i es continua. Probar que f es continua.

3. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento cerrado de X, y $f_i : F_i \to Y$ funciones continuas tales que $f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j}$ para todo par $i \neq j$. Sea $f : X \to Y$ la función tal que $f|_{F_i} = f_i$.
(a) Probar que si I es finito, entonces f es continua.
(b) Encontrar un ejemplo donde I sea numerable y f no sea continua.
(c) Una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ se dice *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathscr{U}_x$ tal que $U \cap F_i \neq \emptyset$ sólo para finitos $i \in I$. Probar que en tal caso f es continua.

4. (a) Encontrar espacios topológicos X,Y y una función $f : X \to Y$ tal que f no es continua en ningún punto, pero que existe $A \subset X$ tal que $f|_A$ es continua.
(b) Sean A,B dos subconjuntos tales que $X = A \cup B$. Sea $f : X \to Y$ una función tal que $f|_A$ y $f|_B$ son continuas en $x \in A \cap B$. Probar que f es continua en x.
(c) Encontrar una función $f : X \to Y$ y $X = A \cup B$, tales que A y B no son disjuntos, $f|_A$ y $f|_B$ son continuas pero f no es continua.

5. Sea X un conjunto y sean τ_1, τ_2 dos topologías en X. Probar que la función identidad $\mathrm{Id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si $\tau_2 < \tau_1$; y es abierta si y sólo si $\tau_1 < \tau_2$.

6. Sean X,Y dos espacios topológicos, donde Y es T_2. Sean $f,g : X \to Y$ dos funciones continuas.
(a) Probar que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
(b) Concluir que si f,g coinciden en un subespacio denso, entonces $f = g$.

7. Sea X un conjunto, consideramos en él la topología de los complementos finitos.
(a) Probar que si $f : X \to X$ es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.
(b) Dar todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$.

8. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que las siguientes funciones son continuas:

$$f+g, \qquad f-g, \qquad f\cdot g, \qquad \frac{f}{g}, \text{ si } g \neq 0,$$
$$af, \qquad \max\{f,g\}, \qquad \min\{f,g\}, \qquad |f|.$$

9. Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Demostrar que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

10. (a) Probar que dos intervalos del mismo tipo (abiertos, cerrados, semiabiertos) son homeomorfos.

(b) Probar además que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección continua, entonces f es un homeomorfismo.

11. Sea $f : X \to Y$ una función. Consideremos en el producto $X \times Y$ la topología generada por $\{U \times V : U$ es abierto en X y V es abierto $Y\}$. Sea

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Probar que $F : X \to G(f)$, definida por $F(x) = (x, f(x))$, es un homeomorfismo si y sólo si f es continua.

12. Sea X un espacio vectorial normado[1]. Probar que $f : X \to B(0,1)$, $f(x) = \frac{1}{1+\|x\|}x$, es un homeomorfismo.

[1]Recordar que una *norma* en un espacio vectorial real X es una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface: $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$; $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$; $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todos $a \in \mathbb{R}$, $x \in X$; y $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$. Un espacio vectorial normado X se convierte en un espacio métrico definiendo $d(x,y) = \|x-y\|$.