Práctico 3
Conexidad

1. Sea X un espacio topológico. Probar que X es conexo si y sólo si todo subconjunto propio de X tiene frontera no vacía.

2. Sean A, C subconjuntos de X tales que C es conexo y $C \subset A \subset \bar{C}$. Probar que A es conexo.

3. Sean A, C subconjuntos de X tales que C es conexo y contiene puntos de A y puntos que no pertenecen a A. Demostrar que C contiene puntos de la frontera de A.

4. Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico se dicen *separados* si satisfacen que
$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset.$$
Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico con la siguiente propiedad: si $A, B \in \mathscr{A}$, existe una sucesión finita $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ tales que $A_0 = A$, $A_n = B$ y A_j, A_{j+1} no son separados, para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es un conjunto conexo.

5. Sea $n \geq 2$. Probar que:
(a) si $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{todas sus coordenadas son racionales}\}$, entonces $\mathbb{R}^n - A_1$ es conexo;
(b) si $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{todas sus coordenadas son irracionales}\}$, entonces A_2 no es conexo.

6. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Para $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ consideramos las dos topologías que induce este orden: llamamos τ_1 a la topología del orden en X, y τ_2 a la topología como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Probar que (X, τ_1) es conexo, pero que (X, τ_2) no lo es.

7. (a) **Teorema de los valores intermedios.** Sean $f : X \to \mathbb{R}$ continua, $A \subseteq X$ conexo y $x, y \in A$ tales que $f(x) < f(y)$. Probar que para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c < f(y)$, existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.
(b) Sea $g : S^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = g(-x)$.
(c) Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ continua. Probar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

8. Sea B un subconjunto conexo, abierto y cerrado de X. Probar que B es una componente conexa de X.

9. (a) Probar que un abierto de $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, para $n > 1$.
(b) Probar que los intervalos (a_1, b_1), $[a_2, b_2)$, $[a_3, b_3]$, con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, no son homeomorfos.

10. Probar que un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas. Por otro lado, dar un ejemplo de que esto no vale para conjuntos cerrados.

11. Calcular las componentes conexas de $\mathbb{R}_\ell$: esto es, $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Sea X un espacio localmente conexo. Fijamos U un abierto de X y C una componente conexa de U. Probar que $\mathrm{Fr}(C) \subset \mathrm{Fr}(U)$.

13. Sean $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $B = A \cup \{0\}$, $I = [0,1]$, y definimos a partir de ellos:

$$X = A \times I, \qquad Y = B \times I, \qquad Z = Y \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Consideremos para X,Y,Z la topolgía como subespacios $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

(a) Determinar las componentes conexas de X,Y,Z, y los subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados.

(b) Determinar cuáles de los espacios X,Y,Z son conexos, cuáles localmente conexos y cuáles arcoconexos.

(c) ¿Existen $f : I^2 \to X$, $g : I^2 \to Y$ continuas tales que las restrincciones $f|_X = \mathrm{Id}_X$, $g|_Y = \mathrm{Id}_Y$?

14. Sean X un espacio topológico localmente conexo, y $f : X \to Y$ continua y suryectiva. Probar que:

(a) si f es abierta, entonces Y es localmente conexo;

(b) si f es cerrada, entonces Y es localmente conexo.